Misura delle grandezze fisiche

"*Ogni misurazione è un'operazione chiaramente definita che dà un determinato risultato numerico e che, se immediatamente ripetuta, darà lo stesso risultato*". E.Schröedinger

Come abbiamo visto, alla base di ogni teoria fisica c'è un processo di misura, ossia di confronto tra un oggetto da misurare, ad es. una **grandezza fisica *B*,** e un opportuno oggetto ad esso omogeneo assunto come **unità di misura [*b*]**. Il **risultato** della misura sarà dunque un **numero *b*** che esprime il rapporto tra la grandezza fisica e la sua unità di misura, ossia ci dice quante volte l'unità di misura è contenuta nella grandezza misurata:

$$b = \frac{B}{[b]} \rightarrow B = b\ [b]$$

Ad esempio, se B è una lunghezza, allora $[b]$ sarà il metro (m) e un ipotetico risultato di misura sarà del tipo: $B = 2.5$ m

Incertezza nella misura delle grandezze fisiche

$$b = \frac{B}{[b]} \quad \rightarrow \quad B = b\ [b]$$

In realtà l'espressione generale $B = b\ [b]$ è incompleta poiché **nessuna misura di una grandezza fisica è precisa in assoluto** (la fisica non è matematica pura!). Ogni risultato numerico ottenuto tramite un processo di misura è infatti affetto da un **errore**, il quale non è un difetto eliminabile bensì un elemento intrinsecamente connesso alla misura stessa e che in qualche modo ne definisce la qualità. Avremo quindi: $B = b\ \pm \Delta b\ [b]$, dove Δb è appuno l'errore.

Gli errori, in fisica, sono dovuti a diversi **fattori di incertezza**, tra cui – escludendo gli errori grossolani – dobbiamo annoverare la limitata accuratezza di tutti gli strumenti di misura e la nostra incapacità di leggere uno strumento al di là di alcune frazioni della più piccola divisione riportata.

Caratteristiche di uno strumento di misura

Le principali **caratteristiche di uno strumento di misura** sono:

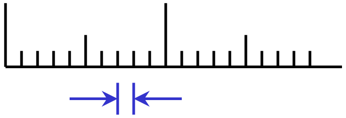
•**L'intervallo d'uso**: è l'insieme dei valori compresi tra la *soglia* e la *portata*, che sono rispettivamente il minimo e il massimo valore della grandezza misurata che lo strumento può apprezzare in un singolo atto di misura;

•**La prontezza**: è il tempo necessario affinchè lo strumento risponda ad una variazione di sollecitazione;

•**La precisione**: è legata all'errore Δb che si commette ripetendo molte volte la misura di una determinata grandezza fisica (minore è l'errore, maggiore è la precisione);

•**La sensibilità**: è la più piccola variazione della grandezza misurata che può essere apprezzata dallo strumento; si assume corrispondente alla più piccola suddivisione della scala dello strumento utilizzato.

scala graduata



E' opportuno che la sensibilità non superi mai la precisione!

Caratteristiche di uno strumento di misura

Ad esempio, non avrebbe senso utilizzare un **cronometro** con una sensibilità del millesimo di secondo per stabilire, manualmente, quando una macchina di Formula 1 attraversa il traguardo, visto che i **tempi di reazione** degli esseri umani sono dell'ordine del decimo di secondo, e dunque di questo ordine di grandezza sarebbe l'errore che commetteremmo nella misura (scarsa precisione).

E' opportuno che la sensibilità non superi mai la precisione!

Errori sistematici e accidentali

Abbiamo detto che, in ogni procedimento di misura, misure ripetute nelle stesse condizioni sperimentali (macroscopiche) danno sempre **risultati leggeremente diversi** ed impredicibili a causa di diverse fonti di errore.

E' utile suddividere queste **fonti di errore** in due categorie fondamentali:

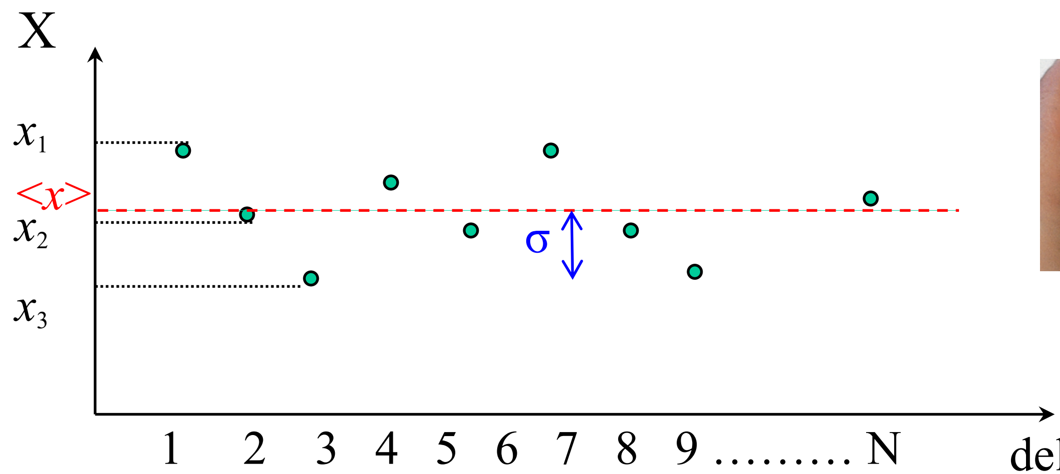
•**Gli errori sistematici:** sono errori che derivano tipicamente da imperfezioni e/o limiti degli **strumenti di misura**, includendo in essi anche i nostri organi di senso. Sono di solito errori che influenzano il risultato di una misura ***sempre nella stessa direzione***, nel senso che tendono a farci trovare dei valori sempre maggiori o sempre minori del cosiddetto "***valore vero***", incognito, della grandezza fisica in questione (vedi cronometro o bilancia non tarati);

•**Gli errori accidentali (o casuali):** sono errori che nascono da una moltitudine di **contributi elementari**, che si combinano in tutti i modi possibili, e che quindi influenzano il risultato di una misura in maniera fluttuante. Questi errori (legati essenzialmente alla **precisione** dello strumento di misura) risultano gestibili solo ricorrendo al linguaggio della probabilità e della statistica. E' a causa loro che il risultato di una misura diventa una **variabile casuale**, del tipo $X = x \pm \Delta x$, distribuita secondo una funzione caratteristica $f(x)$ (distribuzione di probabilità) intorno al "***valore vero***" della grandezza fisica considerata.

Statistica degli errori accidentali

Ma come si ottiene, in pratica, questa distribuzione di probabilità $f(x)$?

Innanzitutto i risultati di N misure ripetute di una grandezza fisica X possono essere riportati in un "ideogramma" e di essi è utile calcolare media e scarto quadratico medio:



Media aritmetica: $$< x > \; = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Scarto dalla media della misura i-esima: $$z_i = x_i - < x >$$

Scarto quadratico medio: (incertezza stimata) $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} z_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=i}^{N} (x_i - < x >)^2}{N}}$$

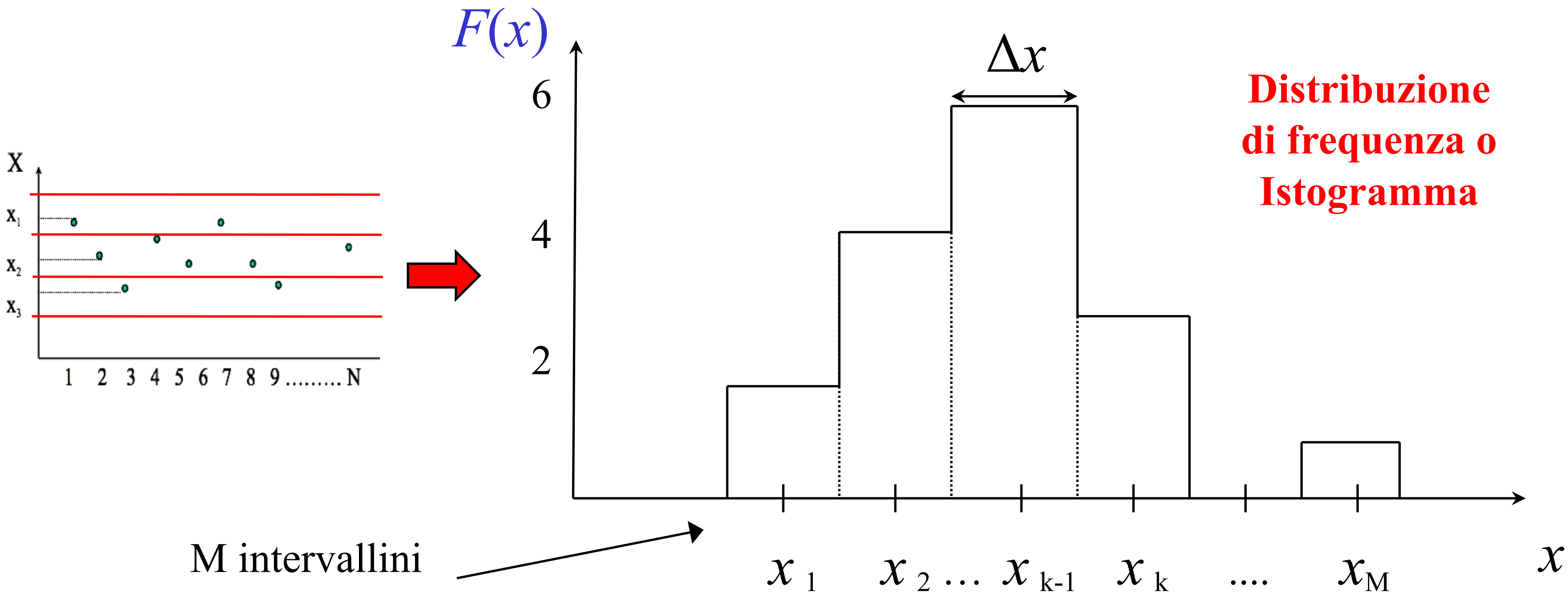
scarto quadratico medio, legato all'errore sulla singola misura

$$X = \; < x > \; \pm \; \sigma$$

media, vicina al "valore vero"

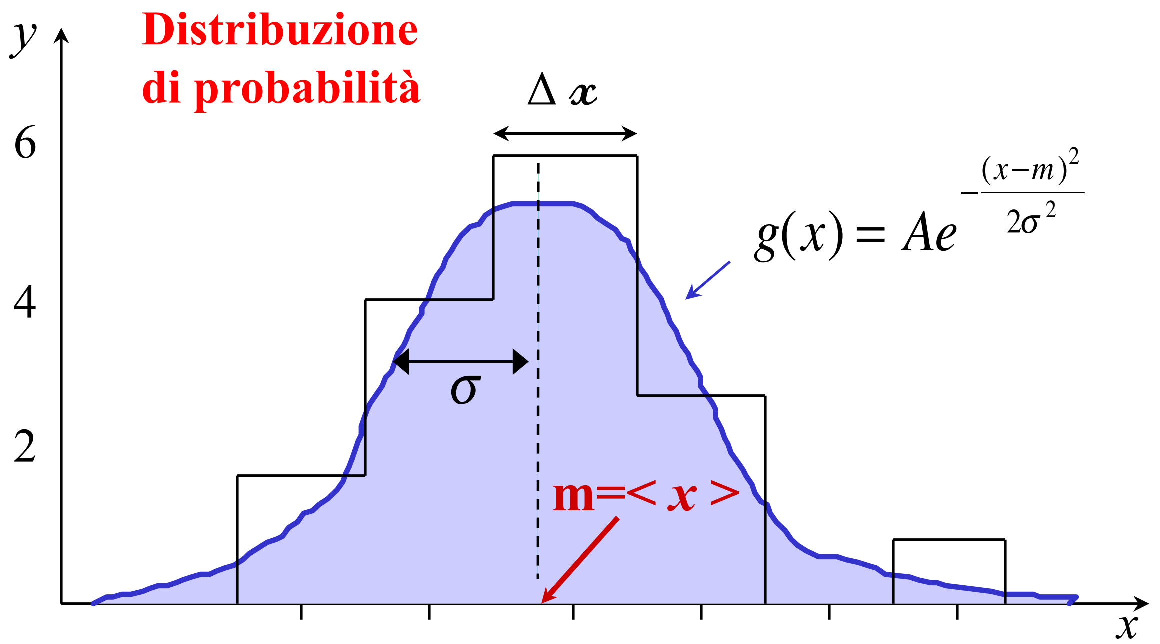
Distribuzione statistica di variabili discrete

All'aumentare del numero N di misure di una grandezza fisica è utile passare dall'ideogramma ad un **diagramma di frequenza**, detto anche **istogramma**, dove si divide l'intervallo in cui cadono tutte le misure in piccoli intervallini di ampiezza Δx (detti "bins") e si riporta in asse y la **distribuzione di frequenza** $f(x_k)=N_k/N$ delle misure che cadono in ogni intervallino di centro x_k:



M intervallini
di ampiezza $\Delta x = x_k - x_{k-1}$

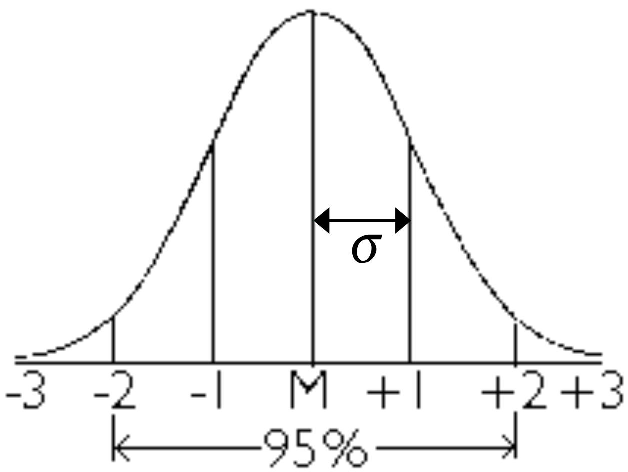
Distribuzione Normale o Gaussiana



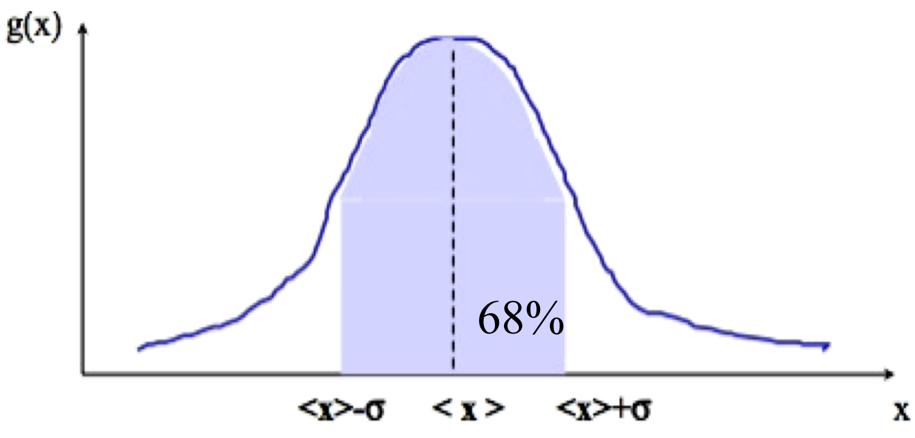
Graficamente, se il numero di misure di una grandezza fisica diventa molto grande (cioè se appunto N $\longrightarrow \infty$) ecco che l'istogramma si trasforma in una *curva continua* la quale, se le misure effettuate sono indipendenti le une dalle altre (cioè se variabili che le rappresentano <u>non sono correlate</u>), è ben approssimata dalla cosiddetta **Distribuzione Normale**, cioè dalla tipica distribuzione di probabilità **Gaussiana**:

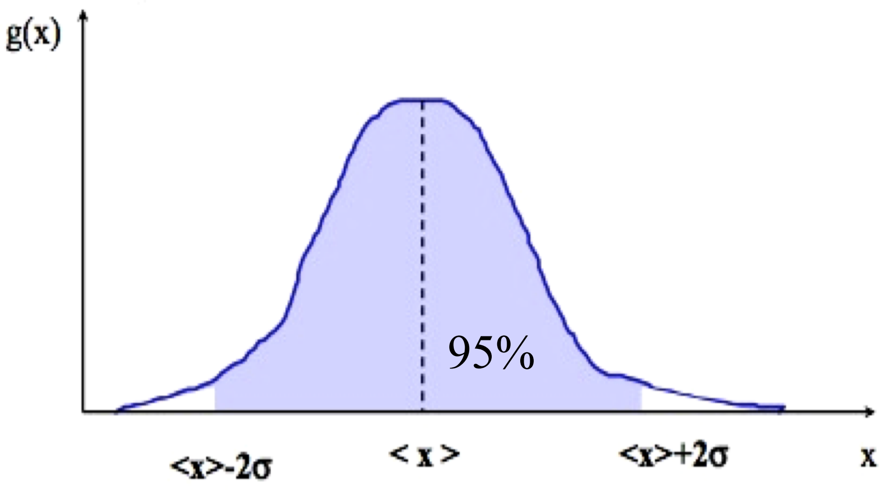
$$f(x) \overset{N\to\infty}{\to} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$

Distribuzione Normale o Gaussiana



Come si è visto, quindi, la distribuzione Gaussiana è dotata della classica forma a campana, con il massimo in corrispondenza della **media** dei valori misurati, e può essere più o meno stretta a seconda della dispersione dei valori attorno alla media, espressa dallo scarto quadratico medio, detto anche **deviazione standard dalla media**. Una delle proprietà della gaussiana è che il 68% delle misurazioni differisce dalla media meno di una deviazione standard e il 95% meno di due deviazioni standard: quindi maggiore è la deviazione standard, più la gaussiana è "aperta" e minore è la precisione delle nostre misure.





Incertezza stimata e incertezza percentuale

Data dunque l'espressione del risultato della misura di una grandezza fisica *B*:

$$B = b \pm \Delta b \ \ [b]$$

abbiamo detto che l'errore Δb (*sperimentalmente uguale allo scarto quadratico medio σ – o deviazione standard – della distribuzione di valori ottenuti ripetendo più volte la stessa misura*) è equivalente alla cosiddetta **incertezza stimata**. Se ad esempio nell'espressione precedente si ha b=3.5 e Δb=0.2, avremo che il valore della grandezza fisica B sarà un numero reale compreso (con approssimazione del 68%) fra **3.5 - 0.2** e **3.5 + 0.2** cioè fra **3.3** e **3.7**.

Innanzitutto osserviamo che è possibile esprimere questa incertezza anche in **percentuale**, semplicemente prendendo il rapporto tra l'incertezza stimata e il valore numerico misurato b (*sperimentalmente uguale alla media* $< x >$ *della distribuzione di misure*) e moltiplicandolo per 100.

Ad es., se b=8.8 m e l'incertezza stimata è Δb=0.1 m, l'**incertezza percentuale** sarà:

$$\Delta b(\%) = \frac{0.1}{8.8} \cdot 100\% \approx 0.01 \cdot 100\% \approx 1\%$$

Notiamo poi che, **se l'incertezza non è esplicitamente riportata**, si assume che essa sia pari a poche unità dell'ultima cifra specificata. Se quindi scriviamo b=12.6 m, si assume che l'incertezza Δb sia pari a circa 0.1 m , o al massimo 0.2 m. Scrivendo invece b=12.60m, si assumerà un'incertezza dell'ordine di 0.01 m, minore della precedente. E' quindi importante che il risultato di una misura sia espresso con tutte e sole le cifre che si conoscono in modo attendibile (che indicheranno **l'accuratezza** della misura stessa).

Cifre significative di un valore numerico

Dato un certo valore numerico *b*, le cifre che si conoscono in modo attendibile si chiamano **cifre significative** e la loro quantità si chiama “*numero di cifre significative*”. Maggiore è questo numero, maggiore sarà quindi l’accuratezza della misura.

Le **tre regole** per individuare le cifre significative di un numero:

- La *cifra più significativa* è sempre la prima da sinistra che sia diversa da zero (es. 0.**2**1);
- La *cifra meno significativa*
    - in un valore intero, è la prima da destra che sia diversa da zero (es. 783**4**0)
    - in un valore con una parte frazionaria, è l'ultima cifra a destra, anche se si tratta di uno zero (es. 67.45**0**);
- Le **cifre significative** sono tutte quelle comprese tra la *più significativa* e la *meno significativa*, queste incluse.

Ad esempio:

- *b*=**542**0 possiede *tre* cifre significative
- *b*=**23.21** possiede *quattro* cifre significative
- *b*=0.0**62** possiede *due* cifre significative (gli zeri sono, in questo caso, solo dei segnaposto per indicare dove va collocato il punto della suddivisione decimale)
- *b*=0.**380** possiede *tre* cifre significative, e così via...

Potenze di Dieci

E' prassi comune, nel linguaggio scientifico, esprimere i numeri coinvolti in un processo di misura riportando solo le cifre significative sotto forma di numeri decimali con una sola cifra nella parte intera, e moltiplicandole per una opportuna **potenza di dieci.**
E' questa la cosiddetta "**notazione scientifica**".
Ad esempio: $36900 = 3.69 \cdot 10^4$ oppure $0.0021 = 2.1 \cdot 10^{-3}$

Se l'esponente è **positivo**:
la potenza di 10 è uguale al numero 1 seguito da tanti zeri quant'è il valore dell'esponente.

Esempio

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1\,000$

$10^4 = 10\,000$

.

.

.

$10^{10} = 10\,000\,000\,000$

Se l'esponente è **negativo**:
la potenza ha per base il reciproco della base e per esponente l'opposto dell'esponente.

Esempio

$10^{-1}= 1/10^1= 0{,}1$; $10^{-2} =1/10^2=0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$

Nota: una potenza di 10 cambia il segno dell'esponente se "viene trasferita" dal numeratore al denominatore.

Esempio

$10^{-2} = 1/10^2 = 0{,}01$ $\qquad$ $10^{-5} = 1/10^5 = 0{,}00001$

Se l'esponente è 0 la potenza vale sempre 1 con qualsiasi base, purché diversa da zero.

Esempio $\qquad 10^0 = 1$

Ordini di Grandezza e Potenze di Dieci

Dato un numero espresso in **notazione scientifica**, ad esempio $36900 = 3.96 \cdot 10^4$ oppure $0.0021 = 2.1 \cdot 10^{-3}$, il valore numerico con segno dell'esponente della potenza di dieci si chiama "**ordine di grandezza**" del numero considerato.

La notazione scientifica in **potenze di dieci** ha diversi vantaggi:

•Innanzitutto fa sì che **il numero di cifre significative, e quindi l'accuratezza della misura, vengano indicati chiaramente** dal numero decimale che precede la potenza di dieci.

•Essa è inoltre utile in quei casi in cui **ci interessa conoscere solo il valore approssimato** di una certa grandezza, perchè magari un calcolo accurato potrebbe richiedere troppo tempo o troppi dati supplementari, oppure perchè vogliamo controllare se il risultato di un calcolo è approssimativamente corretto. In questi casi la notazione scientifica permette di effettuare rapidamente la cosiddetta "*stima dell'ordine di grandezza*"

PROPRIETÀ DELLE POTENZE:

Prodotto Il prodotto di due o più potenze aventi ugual base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma algebrica degli esponenti.

Esempio

$$10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 10^{3+4+2} = 10^9$$

$$10^4 \cdot 10^{-2} = 10^{4-2} = 10^2$$

Quoziente Il quoziente di due potenze aventi ugual base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

Esempio

$$10^4 / 10^5 = 10^{4-5} = 10^{-1} \qquad 10^5/10^{-3} = 10^{5-(-3)} = 10^8$$

Potenza di potenza Per elevare a potenza una potenza si moltiplicano gli esponenti.

Esempio

$$(10^3)^3 = 10^{3 \cdot 3} = 10^9 \qquad (10^3)^{-2} = 10^{3 \cdot (-2)} = 10^{-6}$$

Radice La radice di una potenza è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il rapporto fra l'esponente del radicando e l'indice della radice.

Esempio

$$\sqrt{10^4} = 10^{4/2} = 10^2$$

$$\sqrt[3]{10^9} = 10^{9/3} = 10^3$$

$$\boxed{\text{Es. } \frac{300 \cdot 400000}{200000000} =} \; ?$$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE:

Prodotto Il prodotto di due o più potenze aventi ugual base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma algebrica degli esponenti.

Esempio

$$10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 10^{3+4+2} = 10^9$$

$$10^4 \cdot 10^{-2} = 10^{4-2} = 10^2$$

Quoziente Il quoziente di due potenze aventi ugual base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

Esempio

$$10^4 / 10^5 = 10^{4-5} = 10^{-1} \qquad 10^5/10^{-3} = 10^{5-(-3)} = 10^8$$

Potenza di potenza Per elevare a potenza una potenza si moltiplicano gli esponenti.

Esempio

$$(10^3)^3 = 10^{3 \cdot 3} = 10^9 \qquad (10^3)^{-2} = 10^{3 \cdot (-2)} = 10^{-6}$$

Radice La radice di una potenza è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il rapporto fra l'esponente del radicando e l'indice della radice.

Esempio

$$\sqrt{10^4} = 10^{4/2} = 10^2$$

$$\sqrt[3]{10^9} = 10^{9/3} = 10^3$$

$$\text{Es.} \quad \frac{300 \cdot 400000}{200000000} = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^8} = 6 \cdot 10^{-1} = 0.6$$

Ordini di Grandezza e Potenze di Dieci

Dato un numero espresso in **notazione scientifica**, ad esempio $36900 = 3.96 \cdot 10^4$ oppure $0.0021 = 2.1 \cdot 10^{-3}$, il valore numerico con segno dell'esponente della potenza di dieci si chiama "**ordine di grandezza**" del numero considerato.

La notazione scientifica in **potenze di dieci** ha diversi vantaggi:

•Innanzitutto fa sì che **il numero di cifre significative, e quindi l'accuratezza della misura, vengano indicati chiaramente** dal numero decimale che precede la potenza di dieci.

•Essa è inoltre utile in quei casi in cui **ci interessa conoscere solo il valore approssimato** di una certa grandezza, perchè magari un calcolo accurato potrebbe richiedere troppo tempo o troppi dati supplementari, oppure perchè vogliamo controllare se il risultato di un calcolo è approssimativamente corretto. In questi casi la notazione scientifica permette di effettuare rapidamente la cosiddetta "*stima dell'ordine di grandezza*"

•Infine, la notazione scientifica permette di **esprimere in maniera concisa numeri molto grandi o molto piccoli**, consentendo così anche di confrontarli più agevolmente tra loro semplicemente confrontando i loro ordini di grandezza.

Prefissi del Sistema Internazionale

10^n	Prefisso	Simbolo	Nome	Equivalente decimale
10^{15}	peta	P	Biliardo	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	Bilione	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	Miliardo	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	Milione	1 000 000
10^{3}	kilo o chilo	k	Mille	1 000
10^{2}	etto	h	Cento	100
10	deca	da	Dieci	10
10^{-1}	deci	d	Decimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centesimo	0,01
10^{-3}	milli	m	Millesimo	0,001
10^{-6}	micro	μ	Milionesimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Miliardesimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Bilionesimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	Biliardesimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	Trilionesimo	0,000 000 000 000 000 001

Definizione di logaritmo (inverso della funzione esponenziale)

Il logaritmo *y* di un numero *x* in una certa base *a* è l'esponente che bisogna dare alla base per ottenere il numero *x:*

$$Se: \quad \log_a x = y \quad allora: \quad a^y = x \;\; e \;\; viceversa$$

si legge "logaritmo di *x* in base *a*"

Per esempio:

$\log_3 81 = 4$ perché $3^4 = 81$

$\log_{10} 100 = 2$ perchè $10^2 = 100$

$\log_{10} X = 13$ se $X = 10^{13}$

$\log_{10} X = -7$ se $X = 10^{-7}$

Ordini di Grandezza

Distanze:

$\log_{10} L$ (m)

-18	-15	-10	-7	0	7	13	21	24-26
elettrone	nucleo	atomo	luce vis.	Uomo	diametro Terra	Sistema solare	Via Lattea	Confini Universo

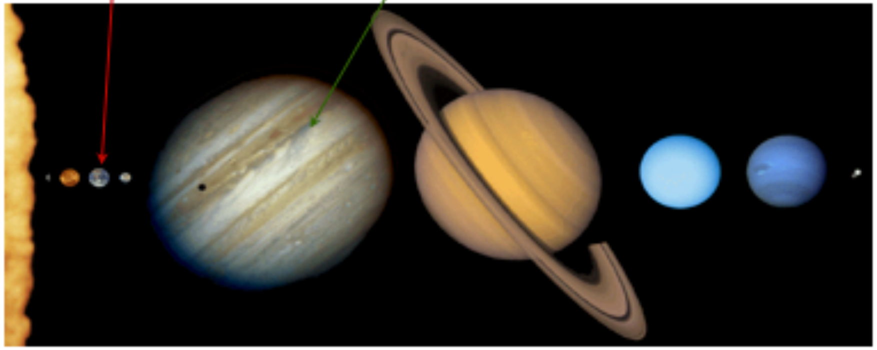
- **velocità della luce nel vuoto:** 299792458 m/s $\approx 2.99 \cdot 10^{8}$ m/s
- **1 anno luce (a.l.)** $\approx 2.99 \cdot 10^{8}$ m/s $\cdot$ 365.25 g $\cdot$ 86400 s/g $\approx 0.946 \cdot 10^{16}$ m
- **dimensioni del sistema solare** $\approx 10^{13}$ m $\approx$ 10 ore-luce

Diametro:

Terra : $1{,}274 \cdot 10^{4}$ Km

Giove: $1{,}4 \cdot 10^{5}$ Km

Sole: $1{,}4 \cdot 10^{6}$ Km



- **dimensioni della nostra galassia** (Via Lattea) $\approx 1.6 \cdot 10^{21}$ m ($\approx 1.6 \cdot 10^{5}$ a.l.)
- **distanza della galassia più vicina** (Andromeda , M31) $\approx 2.5 \cdot 10^{22}$ m ($\approx 2.5 \cdot 10^{6}$ a.l.)
- **dimensioni dell' Universo conosciuto** $\approx 10^{26}$ m ($\approx 10^{10}$ a.l.)

Ordini di Grandezza

Distanze:

$\log_{10}$ **L** (m)

-18	-15	-10	-7	0	7	13	21	24-26
elettrone	nucleo	atomo	luce vis.	Uomo	diametro Terra	Sistema solare	Via Lattea	Confini Universo

Tempi:

$\log_{10}$ T(s)

-15
Periodo di oscill. del campo e.m. della luce visibile
($c = \lambda\nu = \lambda / T$)

-3
Periodo di oscillazione di una nota musicale
($\nu_{La} = 440$ Hz)

5
"giorno"

7
"anno"

15
Periodo di rivoluzione del Sole nella nostra Galassia
(220 milioni di anni)

17
Età dell' Universo
(10^{10} anni)

Masse :

$\log_{10}$ M (Kg)

-30	-27	-7	2	24	30	42
elettrone	protone	batterio	Uomo	Terra	Sole	Galassia


POTENZE
DI DIECI