Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

dopodiché avremo che le componenti V_x e V_y del vettore risultante, incognito, saranno uguali – rispettivamente – alla somma (**algebrica**, trattandosi di scalari – anche negativi) delle componenti x e y dei due vettori originari:

Rappresentazione cartesiana

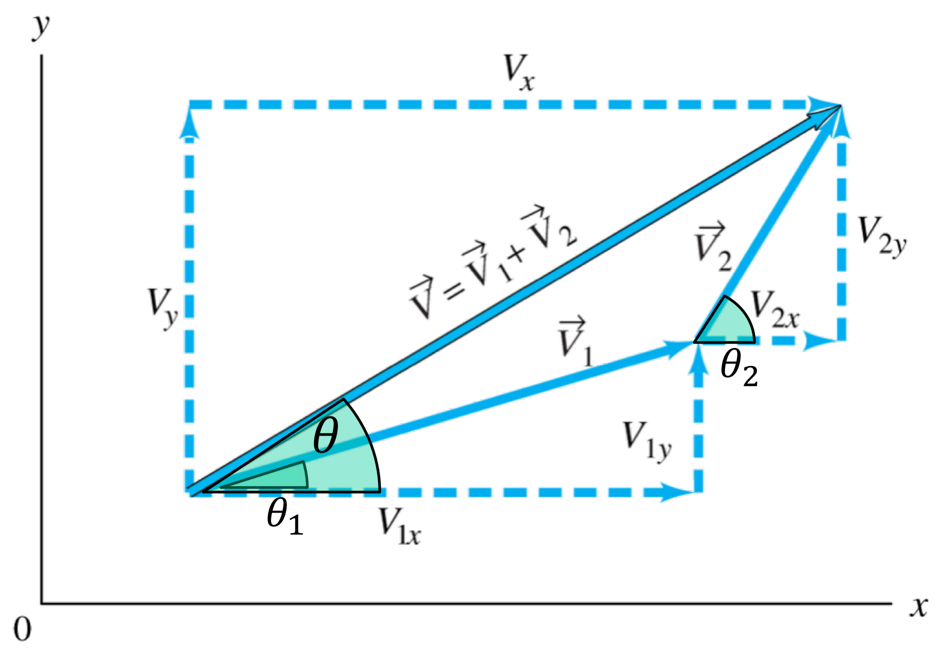
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$

da cui si possono poi ottenere modulo e direzione del vettore **risultante** per mezzo delle seguenti trasformazioni:

Rappresentazione polare

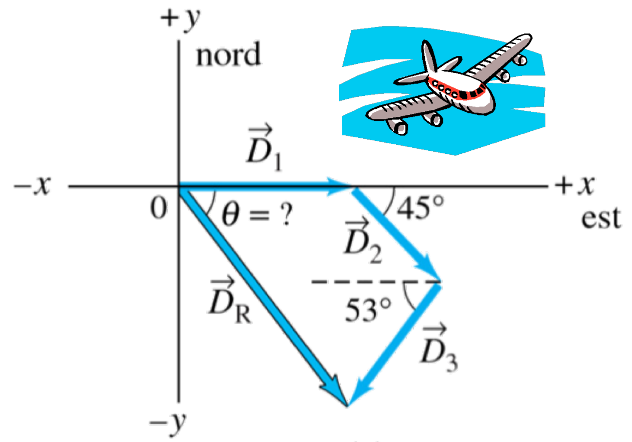
$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$

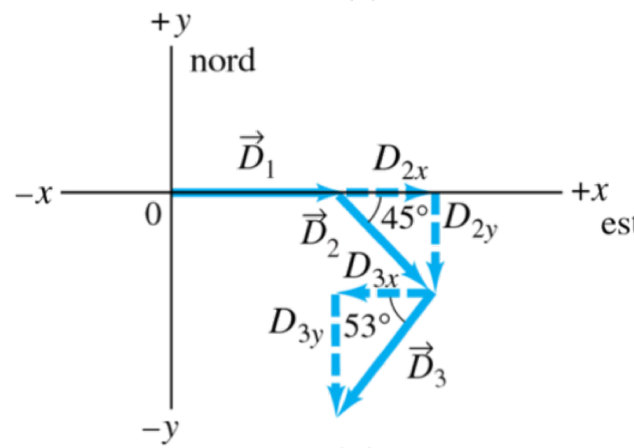


Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)



(b)

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440 km)(0.707) = 311 km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440 km)(0.707) = -311 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_3 \begin{cases} D_{3x} = -D_3 \cos 53° = -(550 km)(0.602) = -331 km \\ D_{3y} = -D_3 sen 53° = -(550 km)(0.799) = -439 km \end{cases}$$

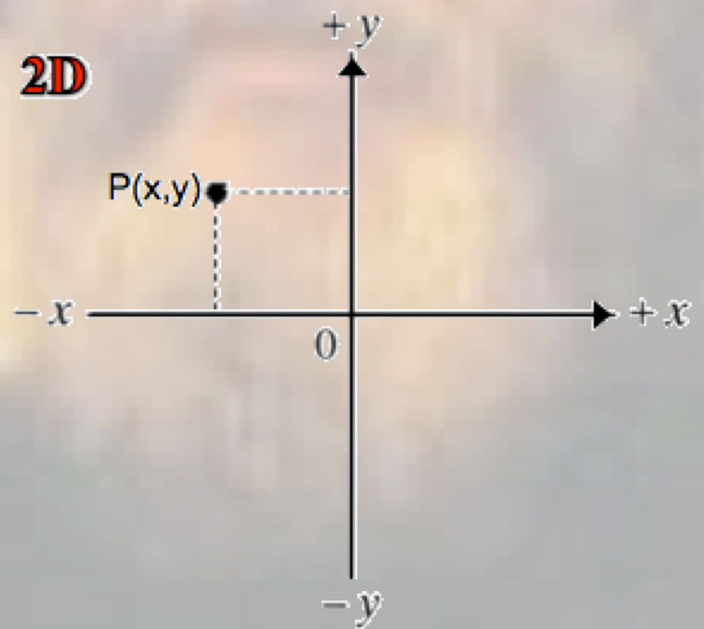
Rappresentazione cartesiana

$$\rightarrow \vec{D}_R \begin{cases} D_{Rx} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 620 km + 311 km - 331 km = 600 km \\ D_{Ry} = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 0 km - 311 km - 439 km = -750 km \end{cases}$$

Rappresentazione polare

$$\rightarrow \vec{D}_R \begin{cases} D_R = \sqrt{D_{Rx}{}^2 + D_{Ry}{}^2} = \sqrt{(600)^2 + (-750)^2} km = 960 km \\ tg\theta = \dfrac{D_{Ry}}{D_{Rx}} = \dfrac{-750 km}{600 km} = -1.25 \rightarrow \theta = arctg(-1.25) = -51° \end{cases}$$

LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI



Moto uniformemente accelerato in una dimensione

Riepilogo equazioni del moto uniformemente accelerato (a=cost) in una dimensione

(I) $v = v_0 + at$

(II) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

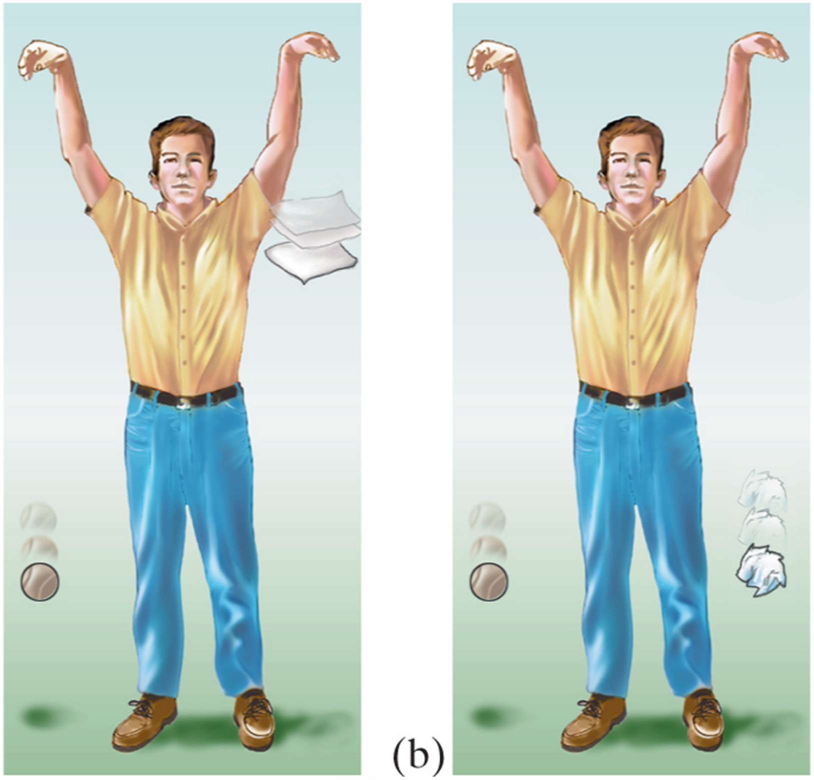
(III) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Caso particolare: equazioni del moto di oggetti in caduta libera (a = – g = cost)

(I) $v = v_0 - gt$

(II) $y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

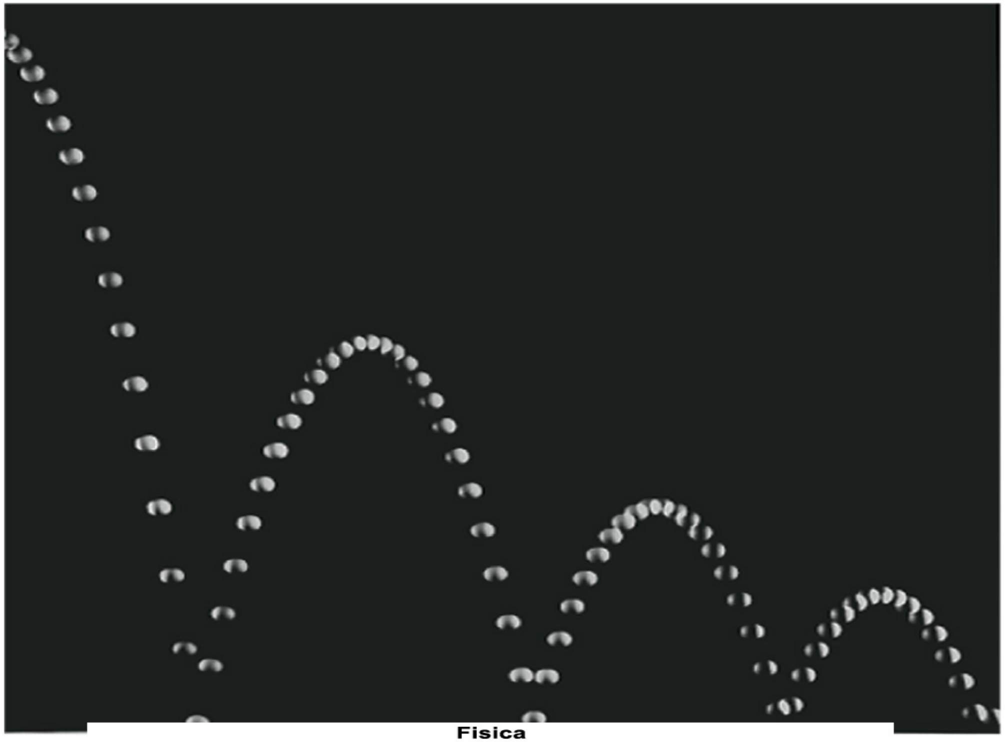
(III) $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_{0)})$



(a) (b)

Moto di un proiettile in due dimensioni

Generalizzando i risultati trovati per il moto unidimensionale uniformemente accelerato, esaminiamo adesso il moto di oggetti (palloni calciati, palline da golf, palle da baseball, pallottole, etc...) che si muovono in *due dimensioni* in prossimità della superficie terrestre: si tratta di esempi che possono essere tutti ricondotti al cosiddetto **moto di un proiettile in due dimensioni**. Trascureremo la resistenza dell'aria e considereremo il moto degli oggetti solo **dopo** che sono stati lanciati, cioè mentre si muovono sotto il solo effetto dell'**accelerazione di gravità** che, come sappiamo è sempre diretta verso il basso e ha modulo pari a $g=9.80\ m/s^2$.

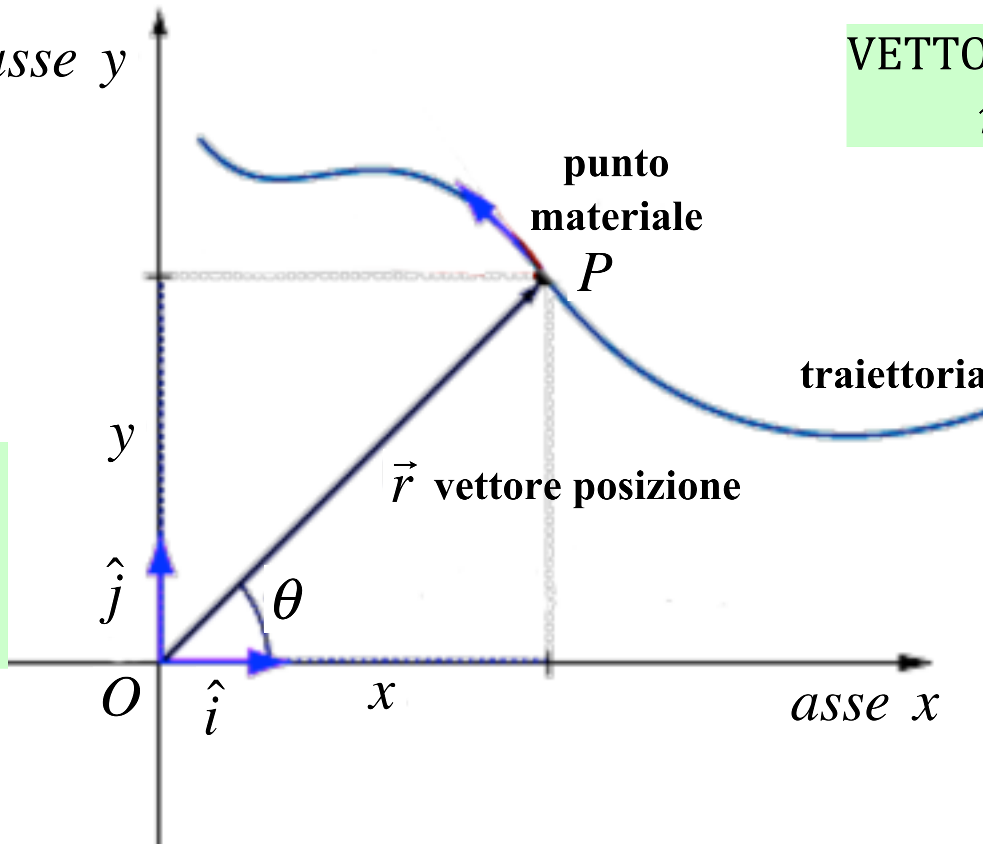


Fisica

Il vettore Posizione in due dimensioni

In due dimensioni diventa importante il «**vettore posizione**», la cui coda è situata sempre nell'origine del sistema di riferimento considerato mentre la punta indica, appunto, la posizione del punto materiale (**baricentro** del corpo) in movimento lungo la traiettoria. Le **componenti** del vettore posizione saranno quindi le **coordinate *x* e *y* del punto materiale**.

VETTORE POSIZIONE
$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$



Sistema di Riferimento bidimensionale
$\{xOy\}$

Spostamento e Velocità in due dimensioni

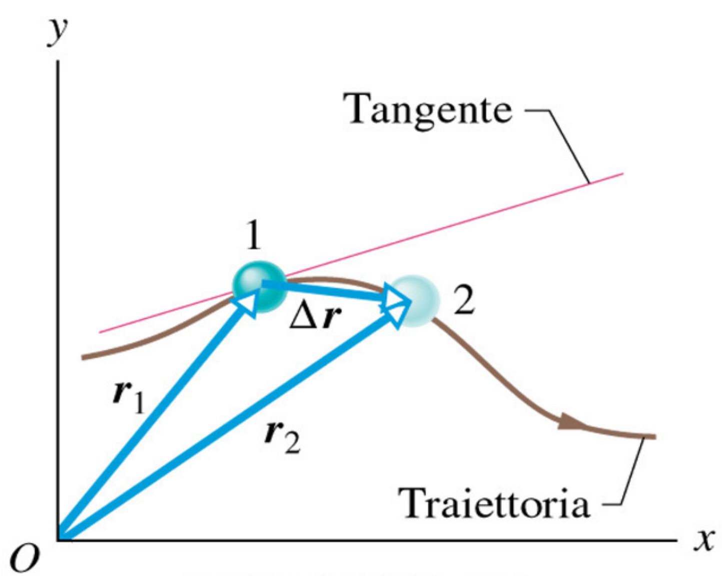
Sappiamo che la velocità media di un corpo è pari al rapporto tra il suo spostamento e il tempo impiegato a spostarsi. In due dimensioni lo **spostamento** sarà rappresentato come un vettore ottenuto dalla differenza tra due vettori posizione ad istanti di tempo successivi, e la **velocità vettoriale media** sarà data quindi dal rapporto tra il vettore spostamento così ottenuto e l'intervallo di tempo considerato. Facendo **tendere a zero** l'intervallo di tempo considerato il modulo del vettore spostamento tende anch'esso a zero mentre la sua direzione si avvicina a quella della **retta tangente** alla traiettoria nella posizione 1. Si ottiene così la **velocità vettoriale istantanea** nel punto 1, che sarà nient'altro che la derivata prima del vettore posizione in quel punto:

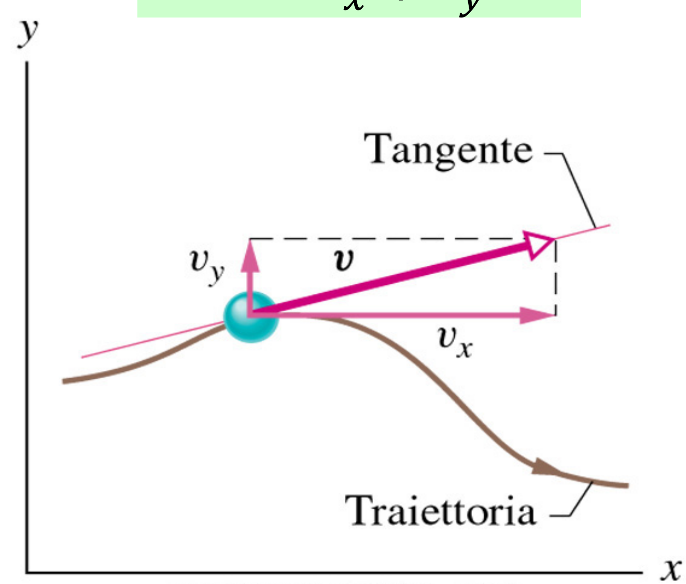
VETTORE SPOSTAMENTO

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$

VETTORE VELOCITA'

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$$





Moto di un proiettile in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché l'accelerazione di gravità è diretta costantemente verso il basso (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:** $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$

Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = -g = cost$)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0} t$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

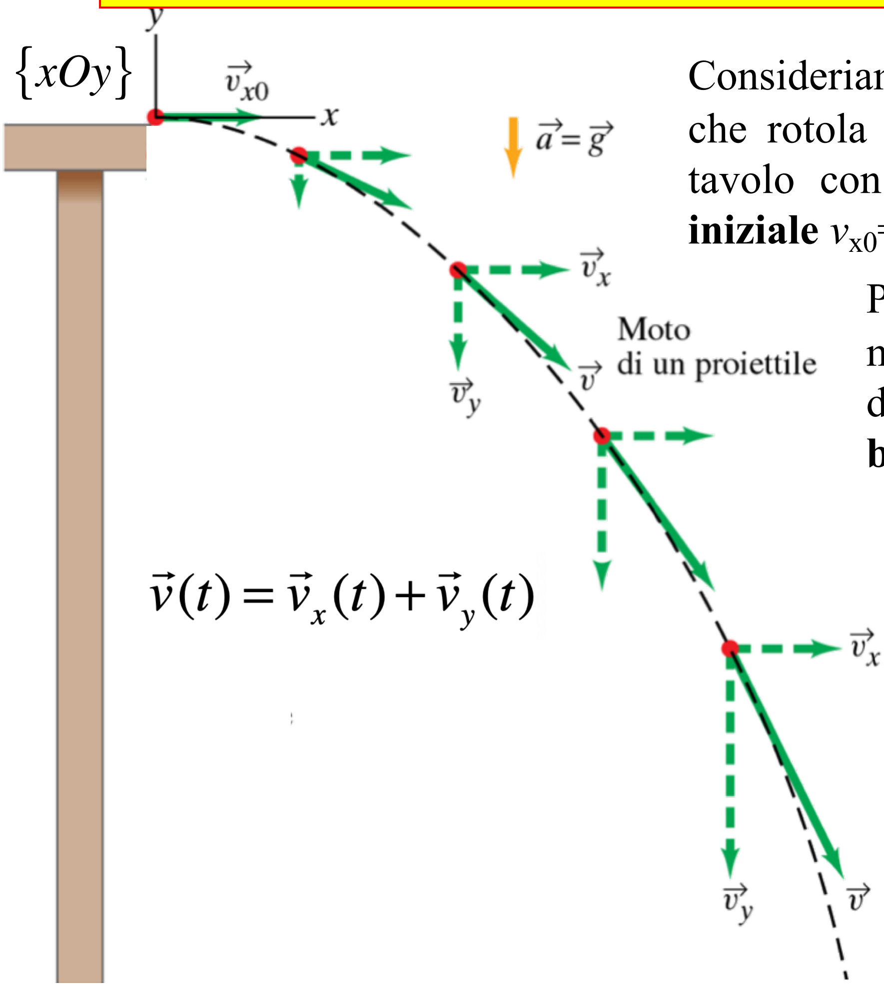
moto verticale (unif.accel. a_y= – g)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$

Moto di un proiettile in due dimensioni: esempio 1



$$\vec{v}(t)=\vec{v}_x(t)+\vec{v}_y(t)$$

Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. $\rightarrow \vec{v}_0=\vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

In accordo con **Galileo**, le equazioni cinematiche del moto per i corpi in caduta libera si applicano **separatamente** alle componenti *x* (moto uniforme) e *y* (moto uniformemente accelerato) del vettore velocità istantanea:

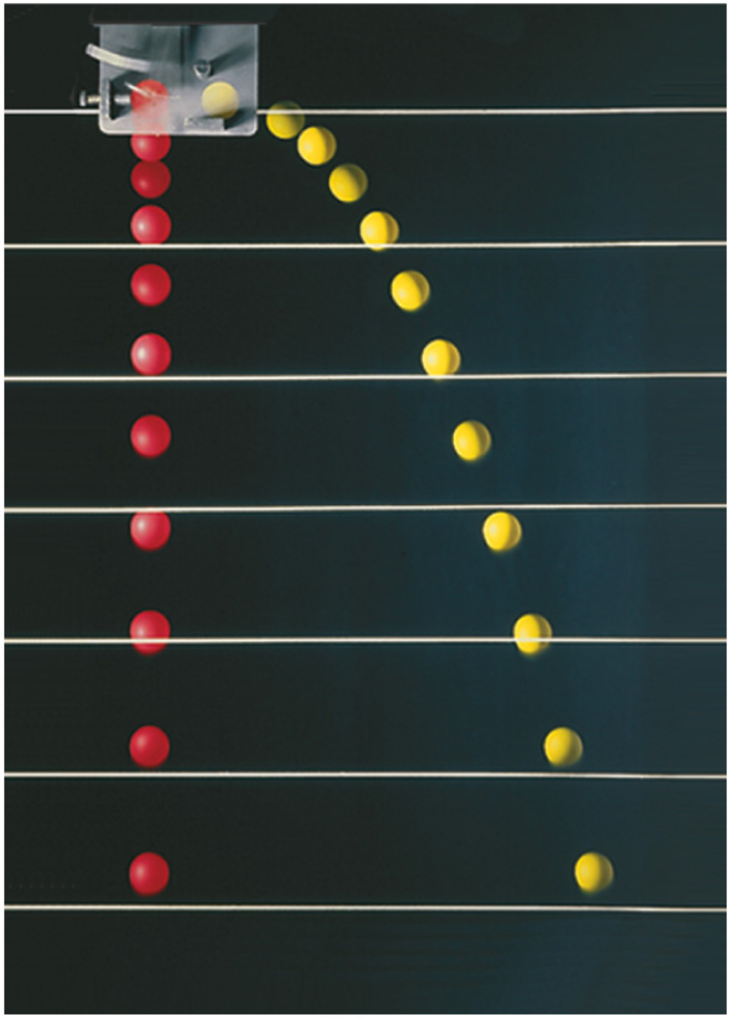
Equazioni del moto per le due componenti indipendenti

$$\begin{cases} v_x(t)=v_{x0}=\cos t \ \rightarrow x(t)=v_{x0}t \\ v_y(t)=-gt \ \rightarrow y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Moto di un proiettile in due dimensioni: esempio 1

Quesito
Se contemporaneamente alla pallina (**gialla**) dell'esempio precedente un'altra pallina (**rossa**) viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta
Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (unif.accelerato) lungo la direzione verticale è il medesimo (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente orizzontale (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .



Fisica

Moto di un proiettile in due dimensioni: esempio 1

Quesito
Se contemporaneamente alla pallina (**gialla**) dell'esempio precedente un'altra pallina (**rossa**) viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta
Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (unif.accelerato) lungo la direzione verticale è il medesimo (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente orizzontale (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .