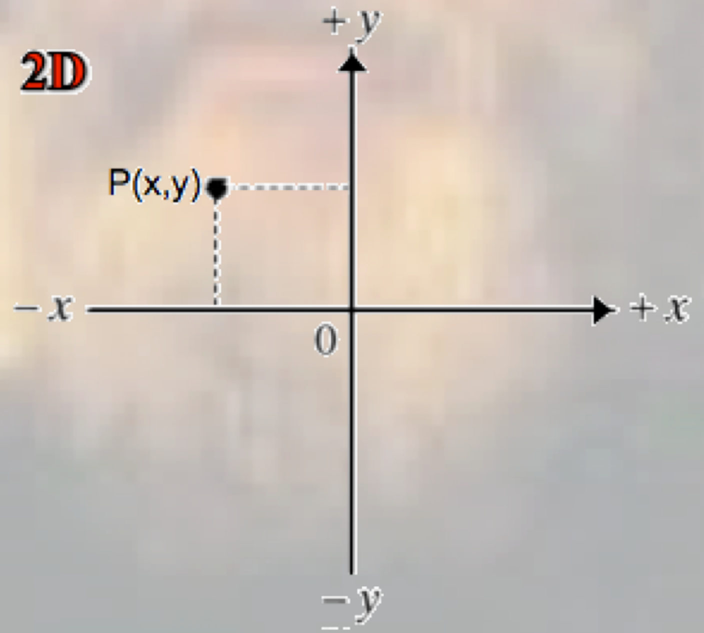
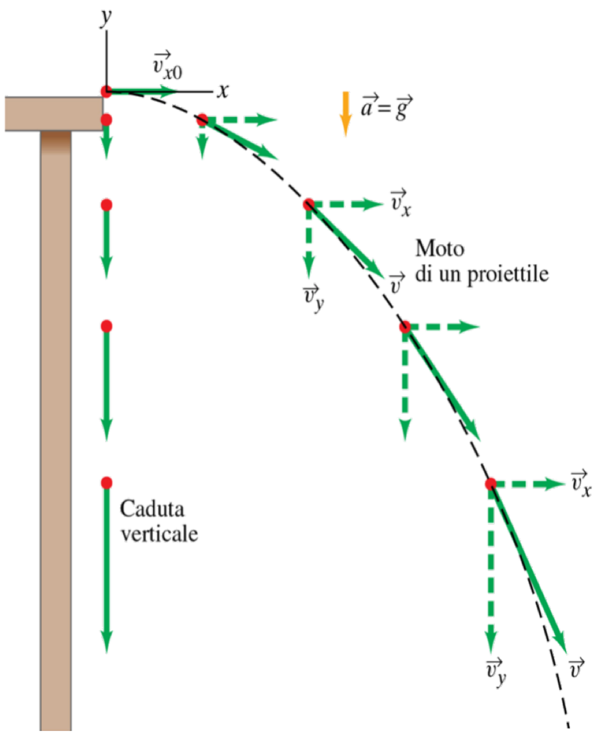
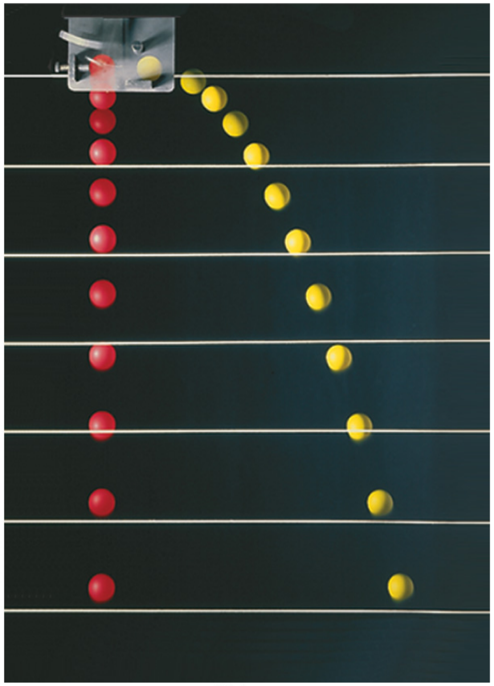
LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI



Moto di un proiettile in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché l'accelerazione di gravità è diretta costantemente verso il basso (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:** $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$



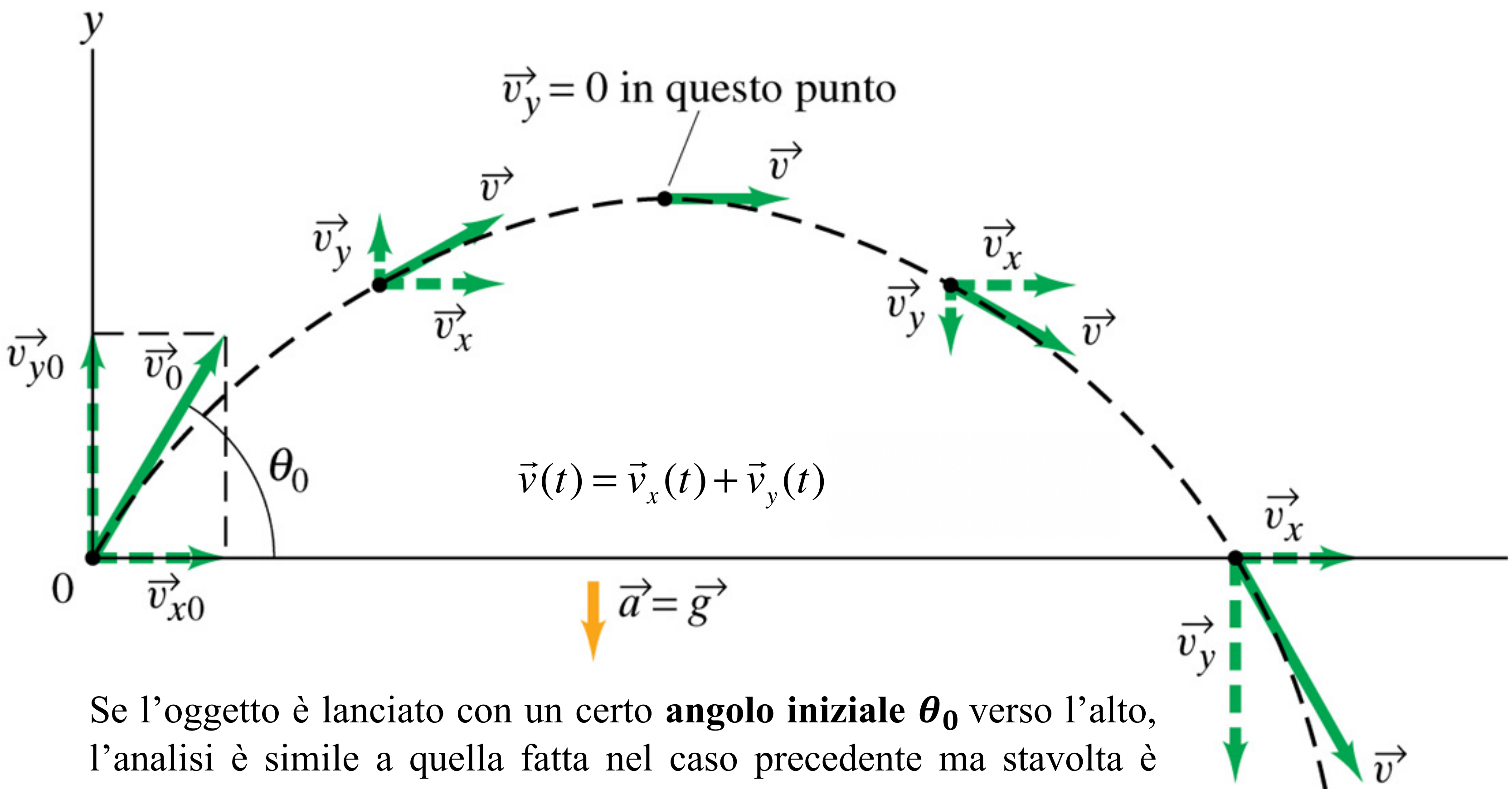


Fisica

https://www.youtube.com/watch?v=9lTOZQ5DvBM

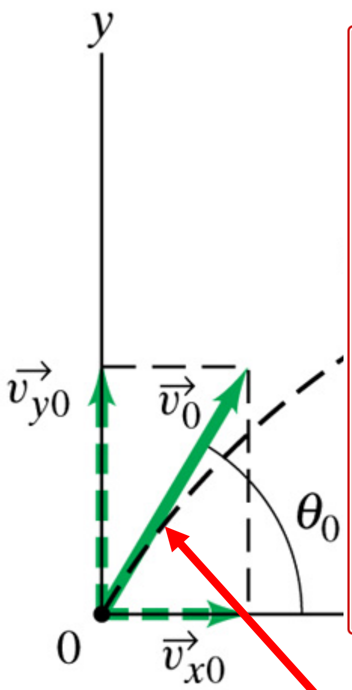
Il moto dei proiettili

Moto di un proiettile in due dimensioni: esempio 2



Se l’oggetto è lanciato con un certo **angolo iniziale $\boldsymbol{\theta_0}$** verso l’alto, l’analisi è simile a quella fatta nel caso precedente ma stavolta è presente anche una **componente verticale** della velocità $v_{y0} > 0$ che a causa della gravità decresce uniformemente fino a quando l’oggetto raggiunge il punto più alto della traiettoria, dopodiché cresce nuovamente in modulo e con verso opposto. La **componente orizzontale** v_{x0} resta invece costante come nell’esempio precedente.

Moto di un proiettile in due dimensioni: esempio 2



Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. (a_x =0, a_y = – g = cost)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

moto verticale (unif.accel. a_y= – g)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

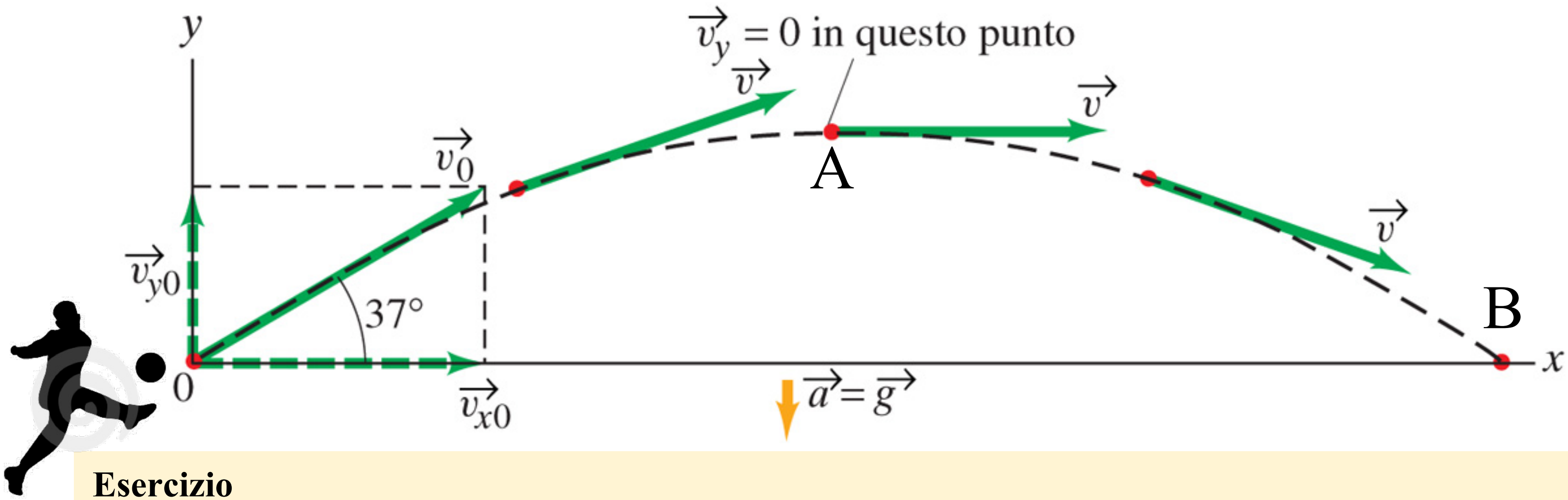
(III-y) $v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 - 2g(y - y_0)$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 ; \; v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$



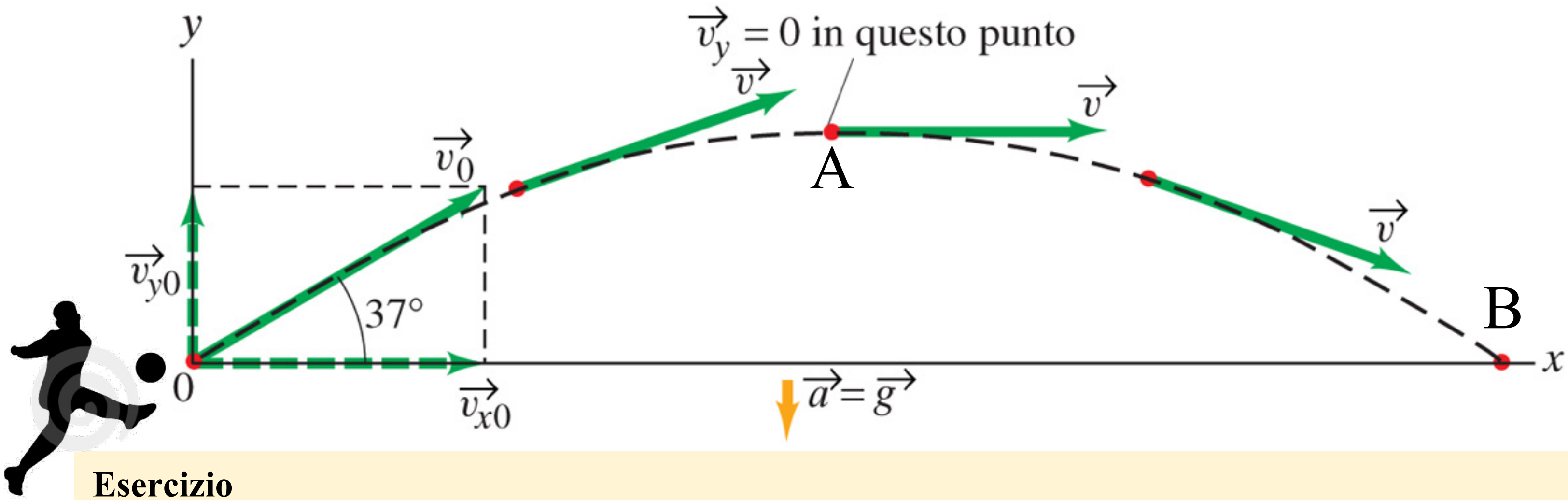
Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

Suggerimenti
-Trattare separatamente i moti lungo gli assi x e y e usare le equazioni del moto di un proiettile;
-Considerare che il tempo totale che il pallone trascorre in aria e l'altezza massima che raggiunge sono determinati solo dal moto lungo y, mentre la distanza massima in orizzontale (gittata) è determinata dal moto congiunto lungo gli assi x e y;
-Ricordare che il moto lungo x avviene a velocità costante mentre quello lungo y è a velocità variabile.

Innanzitutto occorre scomporre la velocità iniziale nelle sue componenti:

$$\boxed{v_{x0} = v_0 \cos\theta \ ; \ v_{y0} = v_0 sen\theta}$$

$$v_{x0} = v_0 \cos 37.0° = (20.0 m/s)(0.799) = 16.0 m/s$$
$$v_{y0} = v_0 sen 37.0° = (20.0 m/s)(0.602) = 12.0 m/s$$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

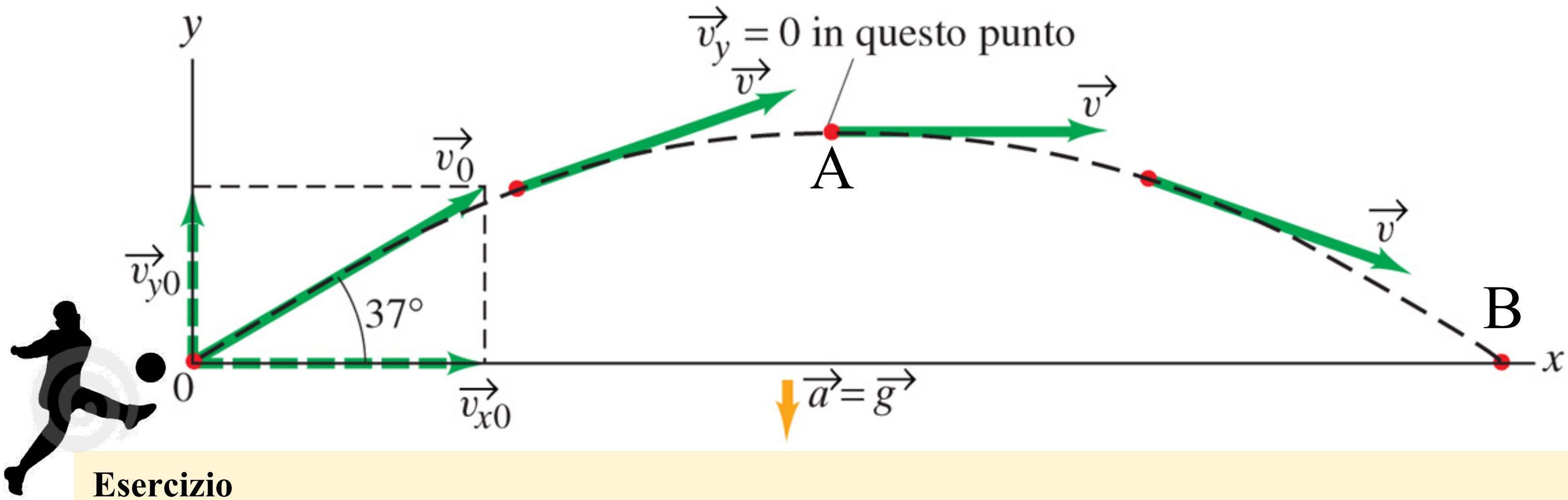
Nel punto A la velocità ha direzione orizzontale, dunque v_y=0 e il tempo t_A necessario a raggiungere il punto A sarà dato dall'equazione I-y risolta rispetto a t:

$$v_y = v_{y0} - gt \quad \rightarrow \quad t_A = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{12.0m/s}{9.80m/s^2} = 1.22s$$

da cui, essendo x_0=0 ed y_0=0, dall'equazione II-y si ricava la coordinata y_A della massima altezza:

$$y_A = v_{y0}t_A - \frac{1}{2}gt_A{}^2 = (12.0m/s)(1.22s) - \frac{1}{2}(9.80m/s^2)(1.22s)^2 = 7.35m$$

Questo risultato si poteva ricavare anche utilizzando solo l'equazione III-y (considerando che il pallone raggiunge la quota y_A con velocità v_y=0) ma in questo modo abbiamo ottenuto una informazione supplementare sul tempo t_A che ci risulterà utile per rispondere alle prossime domande…



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

...

(b) il tempo trascorso prima che il pallone tocchi terra nel punto B

...

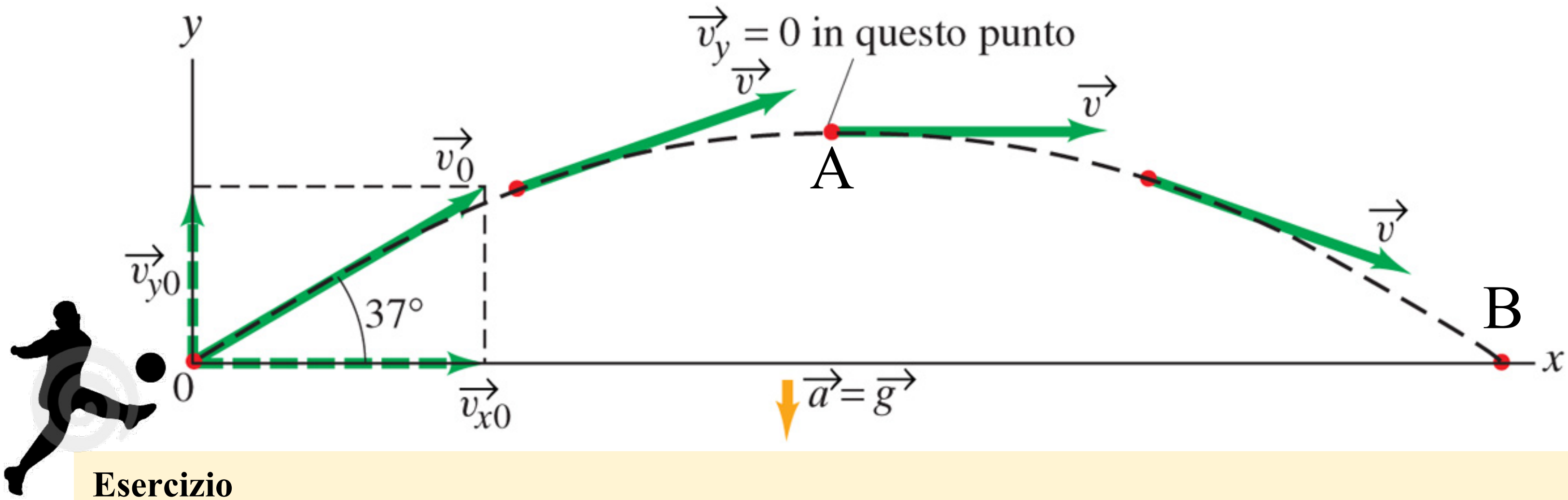
Sarebbe semplicemente uguale al doppio del tempo t_A necessario a raggiungere il punto A:

$$t_B = 2t_A = 2 \cdot (1.22s) = 2.44s$$

ma è possibile ricavarlo anche dall'equazione II-y con y_0=0 ed y=0, risolvendola rispetto al tempo:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 + (12m/s)t - \frac{1}{2}(9.80m/s^2)t^2$$

$$\rightarrow \quad [\frac{1}{2}(9.80m/s^2)t - 12.0m/s]t = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \quad t = 0 \\ \rightarrow \quad t_B = \dfrac{2(12.0m/s)}{(9.80m/s^2)} = 2.45s \end{array}$$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

...

(c) la distanza a cui tocca terra nel punto B

(d) le componenti del vettore velocità nel punto A

(e) le componenti del vettore accelerazione nel punto A

(c) La coordinata x_B si ricava semplicemente sostituendo t_B nell'equazione II-x con x_0=0 e v_{x0}=16.0m/s:

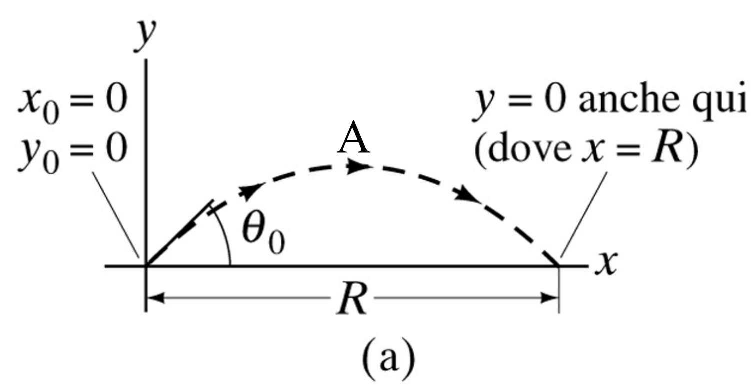
$$x = x_0 + v_{x0}t \;\; \rightarrow \;\; x_B = v_{x0}t_B = (16.0m/s)(2.45s) = 39.2m$$

(d) La componente y della velocità nel punto A è nulla, mentre la componente x resta costante per tutta la durata del moto e dunque è uguale a $v_{xA}=v_{x0}$=16.0m/s;

(e) Il vettore accelerazione, ormai dovrebbe essere chiaro, è sempre costante, di modulo pari a g e rivolto verso il basso.

Gittata orizzontale di un proiettile

La gittata orizzontale di un proiettile è definita come *la distanza orizzontale percorsa dal proiettile prima di tornare all'altezza iniziale* $y=y_0$ (che di solito è quella del suolo). E' interessante derivare una **formula generale** che permetta di calcolare la gittata orizzontale R di un proiettile sparato al tempo t=0 dall'origine (x_0,y_0) di un sistema di riferimento (nel verso delle x crescenti) in funzione della sua velocità iniziale v_0 e del suo angolo di sparo θ_0 .



Calcoliamo il tempo totale di volo dall'equazione (I-y) per il moto verticale, ponendo a zero la componente y della velocità nel punto A e poi raddoppiando il tempo necessario a raggiungere quel punto:

$$0 = v_{y0} - g t_A \;\rightarrow\; t_A = \frac{v_{y0}}{g} \;\rightarrow\; t = 2\,\frac{v_{y0}}{g}$$

…e sostituiamo nell'equazione per il moto orizzontale:

$$R = x = v_{x0} t \;\rightarrow\; R = v_{x0}\left(\frac{2v_{y0}}{g}\right) = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2{v_0}^2 sen\theta_0 \cos\theta_0}{g} \qquad \text{essendo: } \vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{y0} = v_0 sen\theta_0 \end{cases}$$

Da quì, utilizzando l'identità trigonometrica **2senθcosθ=sen2θ** , avremo infine l'espressione cercata:

$$\rightarrow R = \frac{{v_0}^2 sen 2\theta_0}{g}$$

Nota

Da questa equazione si vede che **la gittata orizzontale aumenta col quadrato di v_0**, perciò una velocità iniziale doppia (a parità di angolo di sparo θ_0) porta ad un incrememento di quattro volte nella gittata massima!

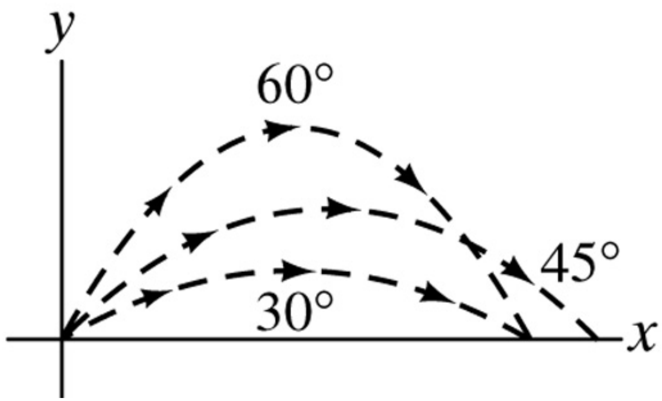
Gittata orizzontale di un proiettile

$$R = \frac{v_0^{\ 2} sen 2\theta_0}{g}$$

Fissata invece la velocità iniziale v_0, e facendo variare l'angolo di sparo θ_0, dalla formula appena vista avremo che la **gittata massima R_{max}** si otterrà quando il sen($2\theta_0$) assume il suo valore massimo (=1), e cioè quando:

$$2\theta_0 = 90° \rightarrow \theta_0 = 45° \quad per \quad cui \quad R_{max} = \frac{v_0^{\ 2}}{g}$$

Ovviamente se la **resistenza** dell'aria non è trascurabile (come si è tacitamente supposto finora) la gittata – per un certo valore della velocità iniziale – sarà minore di quella appena calcolata, e si può verificare che il suo valore massimo si ottiene per un angolo minore di 45°.



angolo in gradi	angolo in radianti	seno
0°	0	0
30°	0,52	0,5
45°	0,79	0,71
60°	1,05	0,87
90°	1,57	1
180°	3,14	0

La traiettoria di un proiettile è parabolica

Dagli esempi visti finora, e dalla nostra esperienza, sappiamo che la **traiettoria** di un proiettile, di un pallone o di un qualsiasi altro corpo in volo soggetto alla sola accelerazione di gravità (assumendo tale accelerazione costante e trascurando la resistenza dell'aria) è una **parabola**.

Ma come si fa a **dimostrarlo** usando le equazioni del moto di un proiettile in 2D?

Occorre trovare **y in funzione di x** eliminando il tempo t tra le due equazioni (II-x) e (II-y) per il moto orizzontale e verticale (in cui poniamo anche $x_0=y_0=0$):

moto orizzontale ($a_x=0$, v_x=cost.) UNIFORME

(I-x) $$v_x = v_{x0}$$

(II-x) $$x = x_0 + v_{x0}t$$

$$\boxed{v_{x0} = v_0 \cos\theta \;;\; v_{y0} = v_0 sen\theta}$$

moto verticale ($a_y= - g$) UNIFORMEMENTE ACCELERATO

(I-y) $$v_y = v_{y0} - gt$$

(II-y) $$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

(III-y) $$v_y^{\ 2} = v_{y0}^{\ 2} - 2g(y - y_0)$$


(a)


(b)


(c)

La traiettoria di un proiettile è parabolica

Dagli esempi visti finora, e dalla nostra esperienza, sappiamo che la **traiettoria** di un proiettile, di un pallone o di un qualsiasi altro corpo in volo soggetto alla sola accelerazione di gravità (assumendo tale accelerazione costante e trascurando la resistenza dell'aria) è una **parabola**.

Ma come si fa a **dimostrarlo** usando le equazioni del moto di un proiettile in 2D?

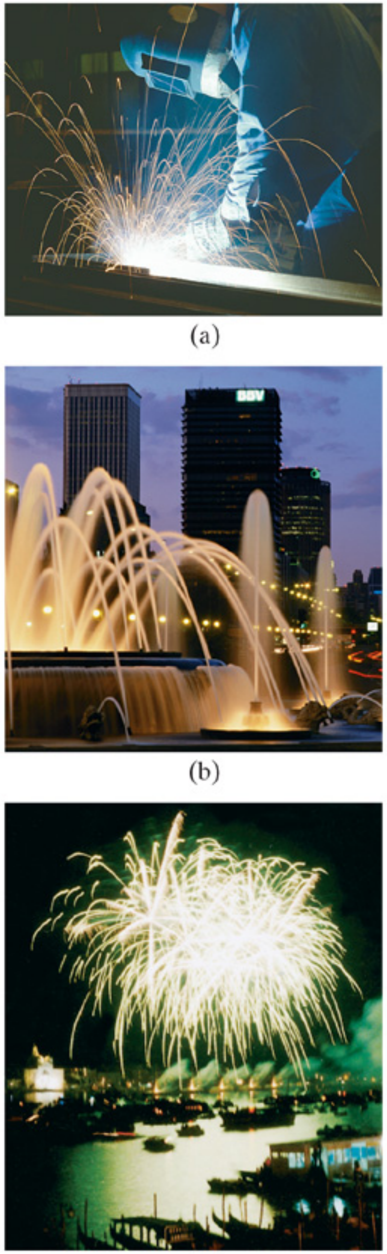
Occorre trovare **y in funzione di x** eliminando il tempo t tra le due equazioni (II-x) e (II-y) per il moto orizzontale e verticale (in cui poniamo anche $x_0=y_0=0$):

$$x = v_{x0}t \;\rightarrow\; t = \frac{x}{v_{x0}}$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{y0}\left(\frac{x}{v_{x0}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{x0}}\right)^2 \;\rightarrow\; y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^{\;2}}\right)x^2$$

da cui, considerando che $v_{x0}=v_0\cos\theta_0$ e che $v_{y0}=v_0\mathrm{sen}\theta_0$, avremo:

$$\rightarrow y = \underbrace{\left(tg\theta_0\right)}_{\mathrm{A}}x - \underbrace{\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)}_{\mathrm{B}}x^2 \quad del\ tipo: y = Ax - Bx^2$$



(a)

(b)

(c)

Fisica

La traiettoria di un proiettile è parabolica


(a)


(b)

Dagli esempi visti finora, e dalla nostra esperienza, sappiamo che la **traiettoria** di un proiettile, di un pallone o di un qualsiasi altro corpo in volo soggetto alla sola accelerazione di gravità (assumendo tale accelerazione costante e trascurando la resistenza dell'aria) è una **parabola**.

Ma come si fa a **dimostrarlo** usando le equazioni del moto di un proiettile in 2D?

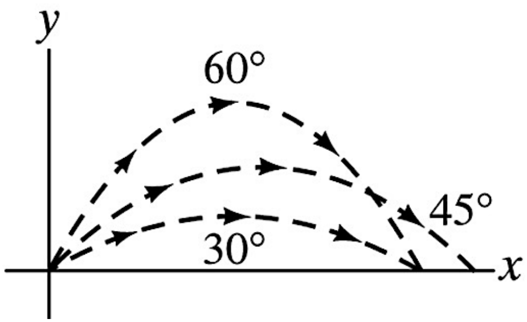
Occorre trovare **y in funzione di x** eliminando il tempo t tra le due equazioni (II-x) e (II-y) per il moto orizzontale e verticale (in cui poniamo anche $x_0=y_0=0$):

$$x = v_{x0}t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{x0}}$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{y0}\left(\frac{x}{v_{x0}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{x0}}\right)^2 \quad \rightarrow y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^{\;2}}\right)x^2$$

da cui, considerando che $v_{x0}=v_0\cos\theta_0$ e che $v_{y0}=v_0\mathrm{sen}\theta_0$, avremo:

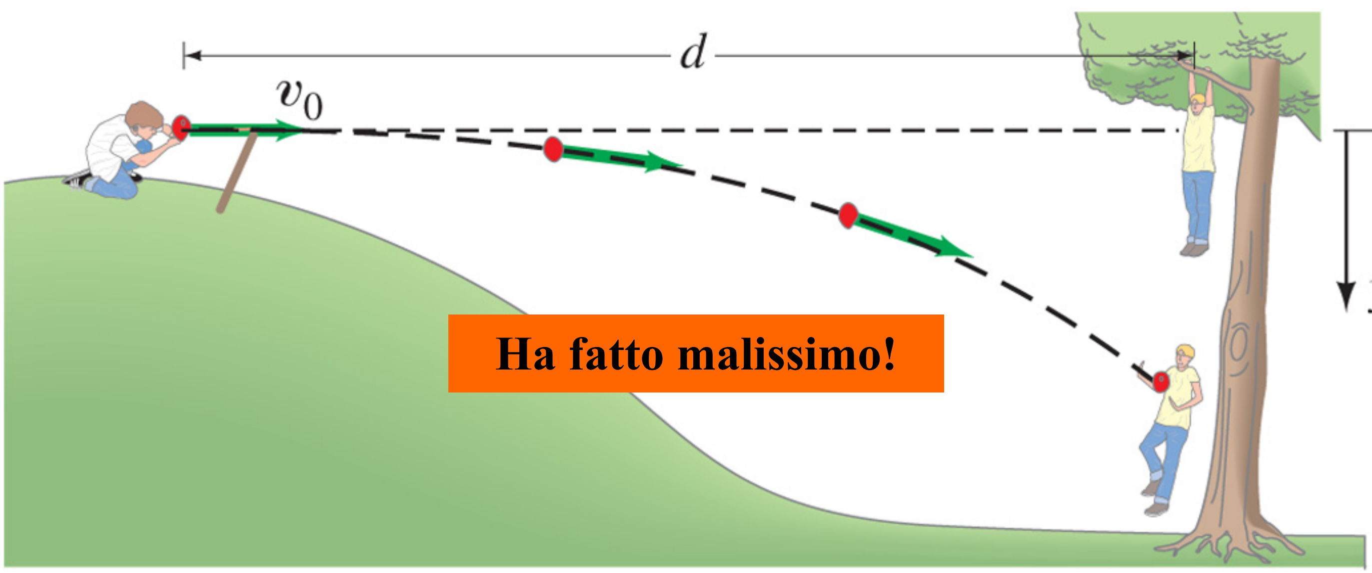
$$\rightarrow y = \underbrace{(tg\theta_0)}_{A}x - \underbrace{\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)}_{B}x^2 \quad del\ tipo: y = Ax - Bx^2$$



Problema concettuale n.1

Un ragazzo su una collina punta la sua **fionda** caricata con un palloncino ad acqua orizzontalmente verso un secondo ragazzo che fa da bersaglio (poverino!) e che sta appeso al ramo di un **albero** (non avendo evidentemente di meglio da fare!). Nell'istante in cui il palloncino viene lanciato, il ragazzo-bersaglio, pensando di fare una **furbata** e di evitare così di essere colpito, abbandona istintivamente la presa e si lascia cadere dal ramo...

Ha fatto bene o ha fatto male a mollare la presa?

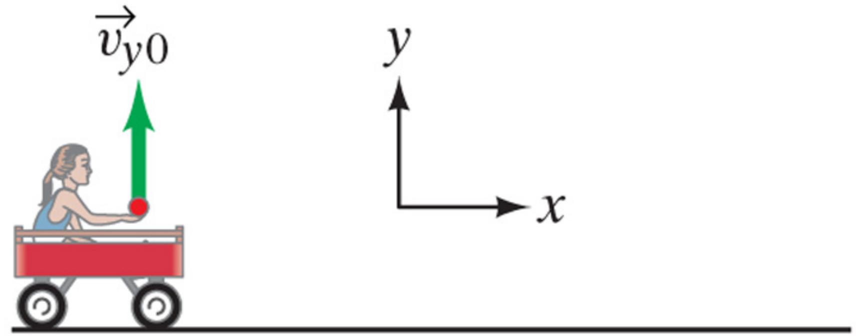


Ha fatto malissimo!

Problema concettuale n.2

Una bambina è seduta su un **carretto** che si muove verso destra con velocità costante. La bambina stende la mano e lancia una **mela** verticalmente verso l'alto (nel suo sistema di riferimento), mentre il carretto continua a muoversi con **velocità costante**.

Trascurando l'attrito dell'aria, la mela cadrà (A) dietro il carretto, (B) sul carretto, (C) davanti al carretto?

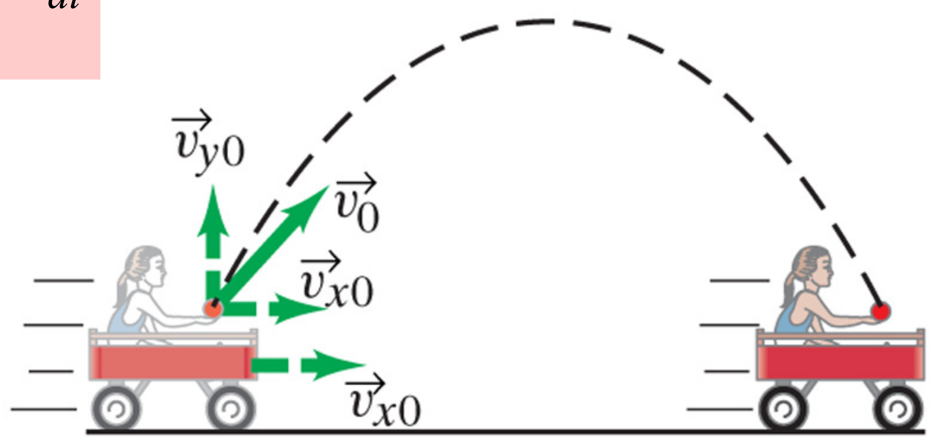


(a) Sistema di riferimento del carretto

Suggerimento

Ragionare ponendosi nel *sistema di riferimento* del terreno...

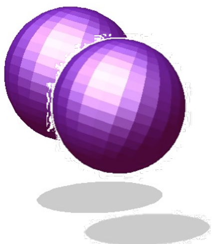
La risposta corretta è la B!



(b) Sistema di riferimento del terreno

Fisica

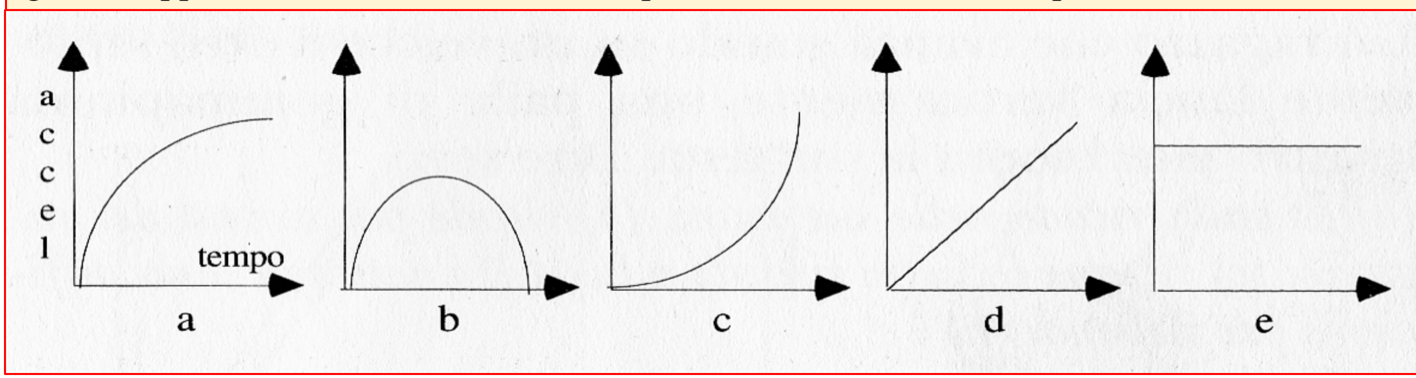
Qualche quesito...



Quesito n.1
Due sfere uguali ma di diverso peso sono lanciate verso l'alto con la *stessa velocità iniziale*. Trascurando l'effetto dell'aria, si hanno dati sufficienti per dire **quale delle due sfere arriverà più in alto?**
Possibili risposte: (a) sì, arriva più in alto la sfera che pesa meno; (b) sì, le due sfere arrivano alla stessa altezza; (c) sì, arriva più in alto la sfera che pesa di più; (d) no, non ci sono dati sufficienti per poterlo dire.

(b)

Quesito n.2
Una pietra è lanciata verso l'alto. Se si *trascura la resistenza dell'aria*, quale dei cinque grafici rappresenta **l'accelerazione** della pietra al trascorrere del tempo mentre è in aria?



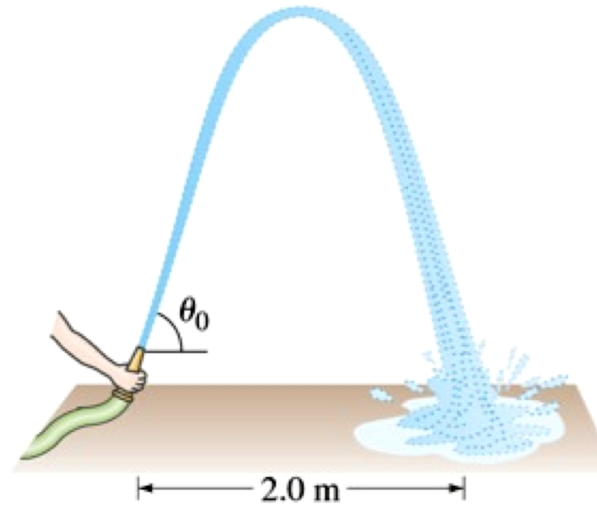
(e)

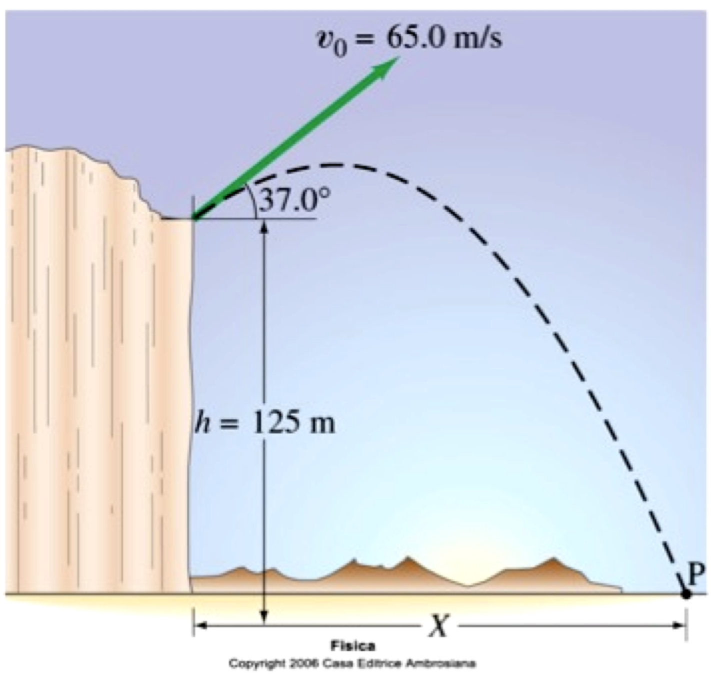
Quesito n.3
Un atleta che corre a *velocità costante* lascia cadere una boccia di piombo dalla sua mano. Dire se **essa tocca terra**: *(a) sulla verticale del punto da dove è lasciata cadere; (b) un po' più indietro; (c) nel punto dove, in quell'istante si troverà l'atleta; (d) in un punto intermedio tra (a) e (c).*

(c)

Esercizi Cinematica 2-D

Esercizio 1
La canna di una pompa antincendio, tenuta vicino al suolo, espelle l'acqua a una velocità pari a 6.8 m/s. A quale/i angolo/i deve essere orientata la canna per fare ricadere l'acqua a una distanza di 2.0 m (vedi figura)? Perchè gli angoli sono due? Disegnate le due traiettorie.





Esercizio 2
Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura). (a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno. (b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe. Nell'istante immediatamente prima di colpire il punto P, trovate (c) le componenti orizzontale e verticale della sua velocità, (d) il modulo della velocità e (e) l'angolo formato dal vettore velocità con l'orizzontale. (f) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Esercizi Cinematica 2-D

Esercizio 3

Durante il servizio, un tennista cerca di colpire la palla orizzontalmente. Qual'è la velocità minima che deve essere impressa alla palla per superare la rete alta 0.90 m e posta a circa 15.0 m di distanza dal tennista, se la palla viene lanciata da 2.50 m di altezza? Dove cadrà la palla, se sfiora la rete? E in tal caso sarà un servizio valido (cioè la palla cadrà entro 7.0 m dalla rete)? Quanto a lungo resterà in aria?