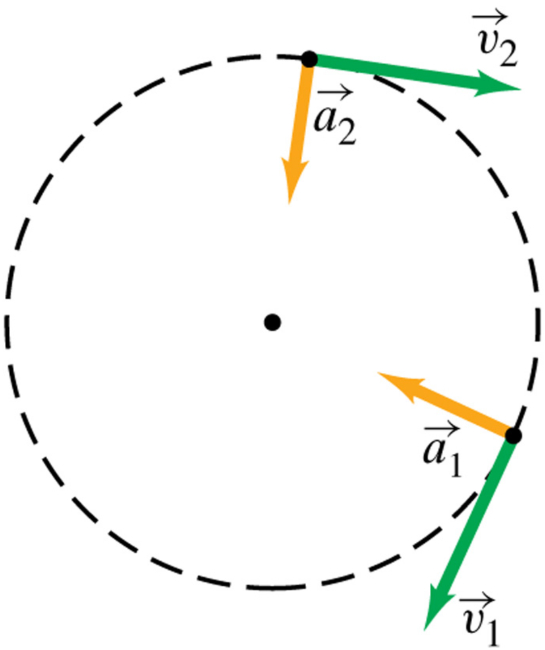
Dinamica del moto Circolare Uniforme

Studiando la cinematica del **moto circolare uniforme** di una particella su una circonferenza di raggio r, abbiamo visto che il vettore velocità (di modulo costante e sempre tangente alla traiettoria) è sottoposto ad ogni istante ad un cambiamento di direzione e la particella è soggetta ad una **accelerazione centripeta** diretta appunto verso il centro del cerchio e di modulo costante $a_R = v^2/r$, dove – come sappiamo – la velocità si può anche calcolare conoscendo il **raggio** e il **periodo** di rotazione T (o la frequenza f) :

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

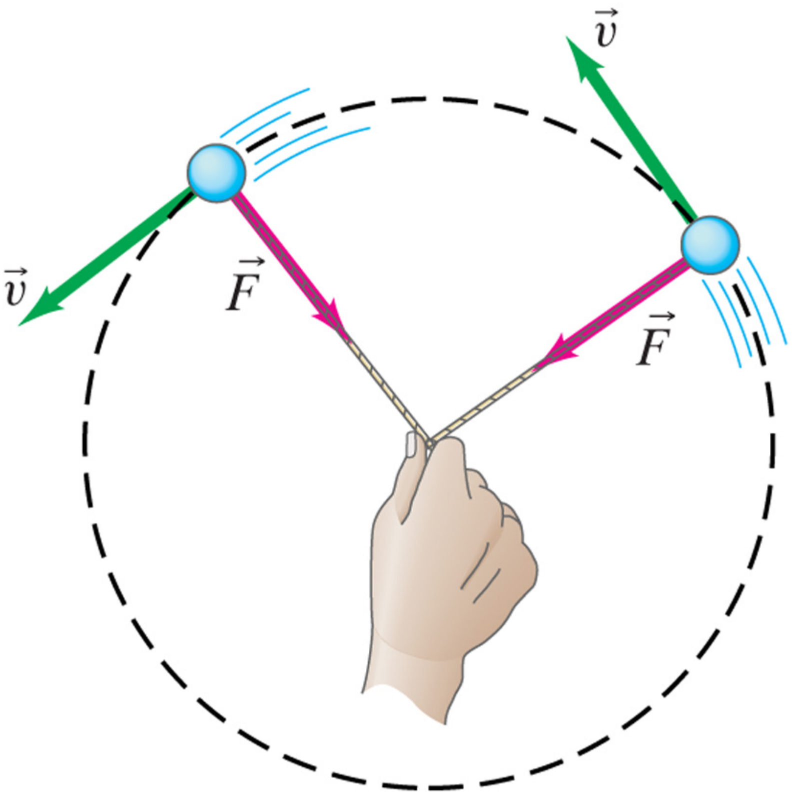


Da un **punto di vista dinamico** ciò significa che, per la seconda legge di Newton, sulla particella, che assumiamo di massa m, deve agire una **forza risultante non nulla** proporzionale alla massa e all'accelerazione della particella stessa.

Dalla seconda legge della dinamica ricaviamo subito che il **modulo** di tale forza deve essere $F_R = ma_R \rightarrow F_R = mv^2/r$, e che la sua **direzione** deve coincidere con la direzione dell'accelerazione centripeta: anche questa forza punterà dunque verso il centro del cerchio, da cui il nome di **Forza Centripeta**.

La Forza Centripeta

La forza centripeta NON E' un nuovo tipo di forza che sbuca dal nulla nei moti circolari ma deve essere **applicata** da altri oggetti o derivare da altre forze. Ad esempio, nella figura qui accanto, **la forza centripeta che si esercita su una pallina** che rotea a velocità costante **è data dalla tensione della corda**, tenuta dalla mano.



Non è dunque il moto circolare della pallina a creare la forza centripeta, ma è la **forza centripeta** esercitata dalla corda che, puntando costantemente verso il centro del cerchio, ***costringe la pallina a modificare continuamente la sua velocità e quindi a ruotare lungo la sua traiettoria circolare*****!**

https://www.youtube.com/watch?v=cQUK9kMGQQ0

La forza centrìpeta

Esempio concettuale 2

Un turista su una **ruota panoramica** si muove su una circonferenza verticale di raggio r a velocità costante v. La **forza normale** che il seggiolino esercita sul turista nel punto più alto della ruota è: (a) minore, (b) maggiore, (c) uguale a quella che il seggiolino esercita nel punto più basso della ruota?

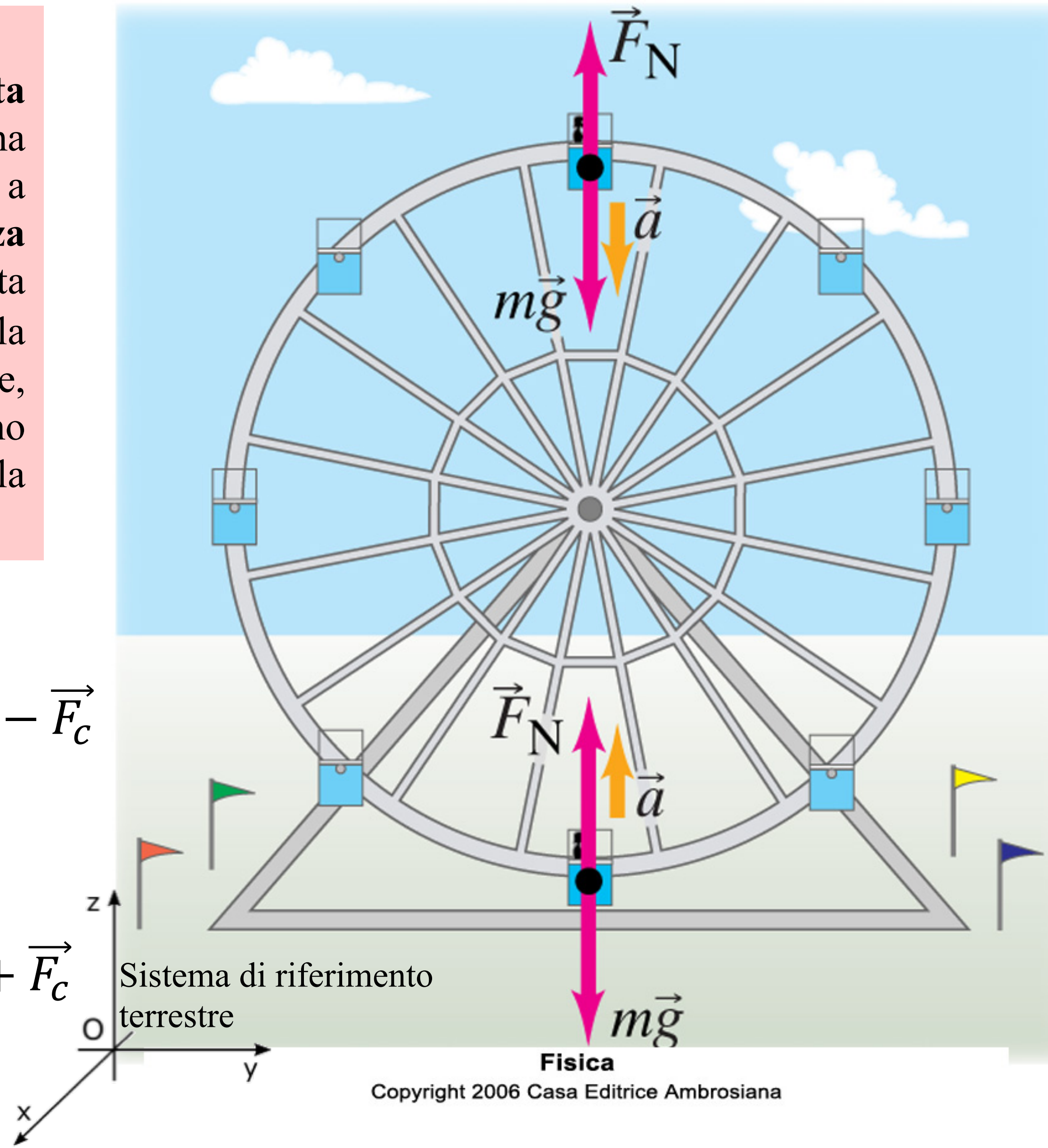
Nel punto più alto:

$$-\vec{F_c} = -m\vec{g} + \vec{F_N} \rightarrow \vec{F_N} = m\vec{g} - \vec{F_c}$$

Forza Centripeta

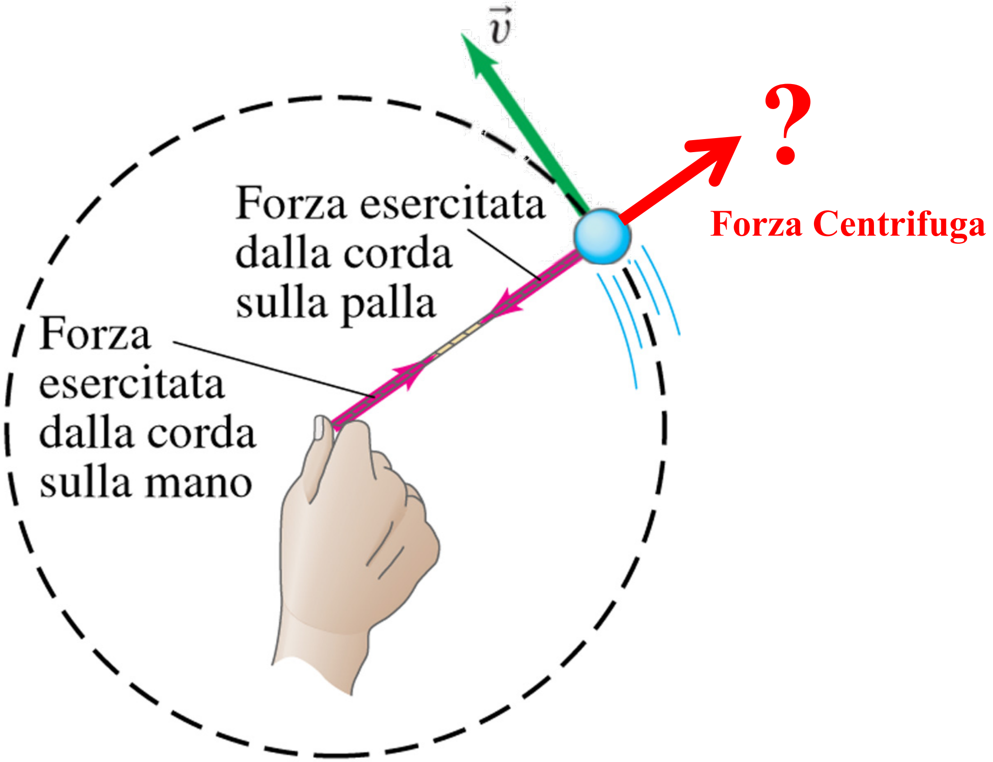
Nel punto più basso:

$$\vec{F_c} = -m\vec{g} + \vec{F_N} \rightarrow \vec{F_N} = m\vec{g} + \vec{F_c}$$



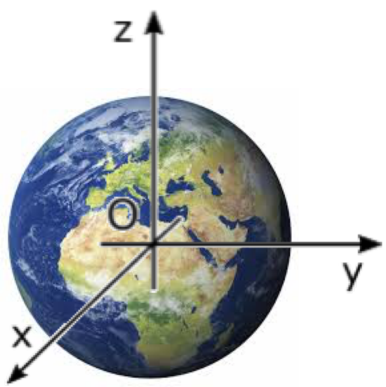
Forza Centripeta e Forza Centrifuga

E’ indubbio che, nell’esperimento della pallina che rotea per effetto della tensione della corda trattenuta dalla nostra mano, **la mano senta una forza**, esercitata su di lei dalla corda, **che punta verso l’esterno**: questa forza appare uguale ed opposta a quella centripeta (esercitata dalla corda sulla palla) e per questo viene chiamata **forza centrifuga**. La nostra sensazione è che anche la pallina senta questa forza e che per questo cerchi di «fuggire» verso l’esterno…

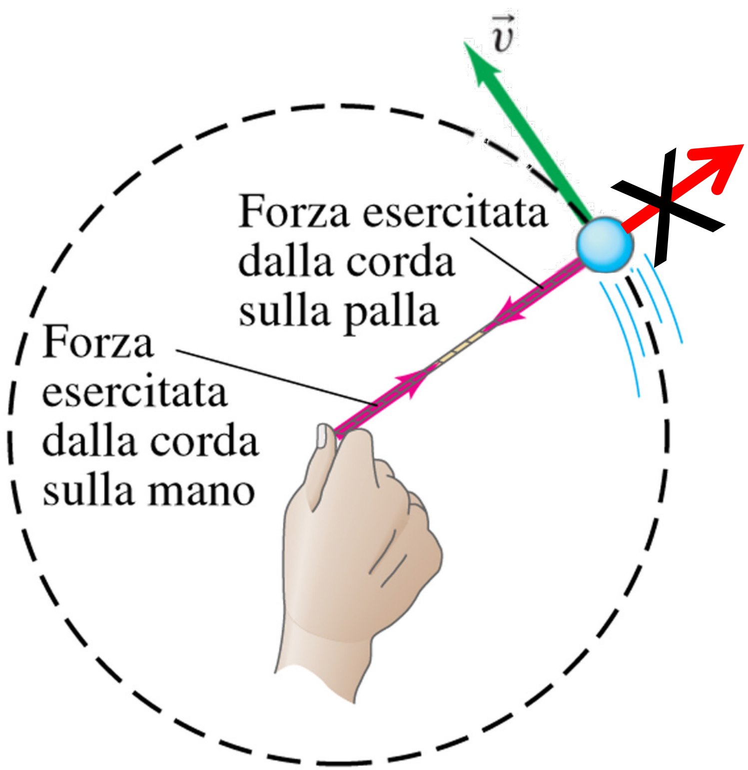


Forza Centripeta e Forza Centrifuga

In realtà, nel sistema di riferimento inerziale della Terra, **l'unica forza agente sulla pallina è la forza centripeta** esercitata dalla corda verso il centro della traiettoria circolare e **non esiste nessuna forza reale indipendente** diretta verso l'esterno: in questo sistema di riferimento terrestre la **forza centrifuga avvertita dalla mano** e generata su di essa dalla corda è solo una forza di reazione, per il terzo principio della dinamica, alla forza che la mano esercita sulla corda.

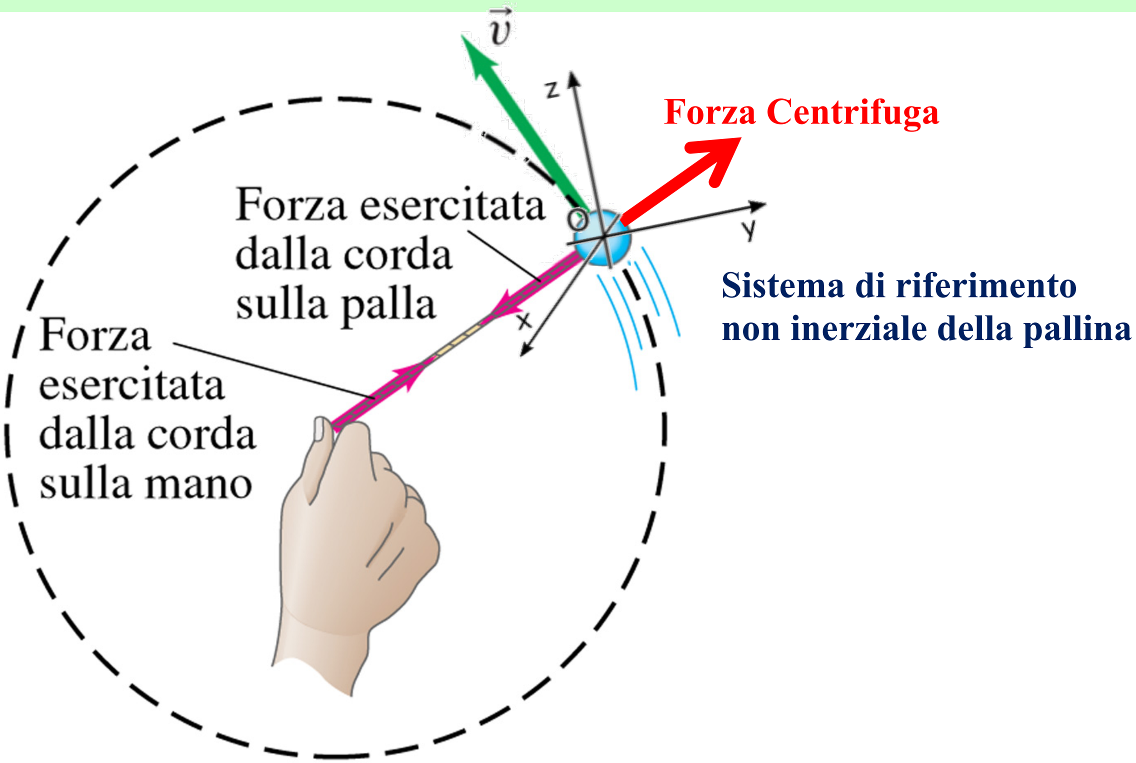


Sistema di riferimento inerziale della Terra



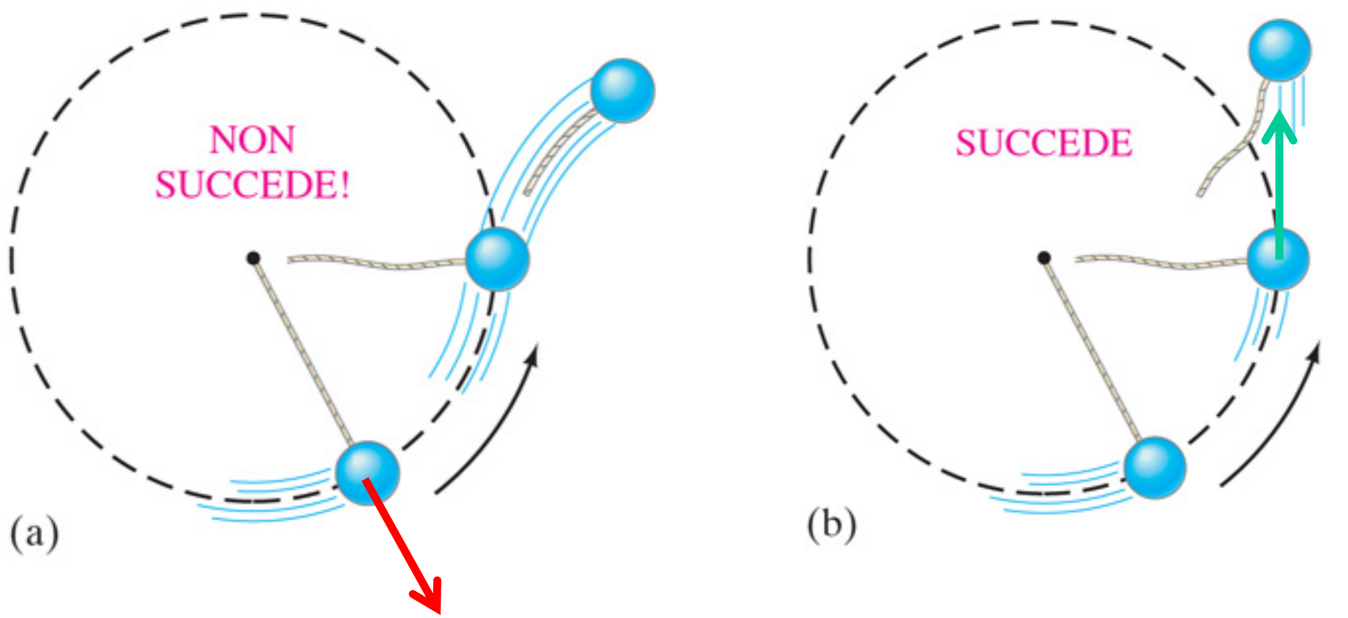
Forza Centripeta e Forza Centrifuga

D'altra parte, **nel sistema di riferimento in rotazione della pallina**, quest'ultima – che per inerzia tenderebbe a muoversi lungo la direzione tangente della sua velocità – è costretta, dalla forza esercitata su di lei dalla corda, a deviare continuamente dalla sua potenziale traiettoria rettilinea e a percorrere la circonferenza: **la pallina percepisce questa costrizione come una forza <u>reale</u> diretta verso l'esterno!** In altre parole, la **forza centrifuga** è una forza (**apparente** nel sistema di riferimento terrestre, **reale** in quello della pallina) sintomatica del fatto che un certo corpo si trova in un **sistema di riferimento non inerziale**.



Forza Centripeta e Forza Centrifuga

Il fatto che, nel sistema di riferimento della Terra, sulla pallina non agisca nessuna forza reale indipendente da quella centripeta e diretta verso l'esterno diventa evidente se ad un certo istante **si molla la corda** e si lascia libera la pallina di abbandonare la sua traiettoria circolare: una volta scomparsa la forza centripeta, se veramente esistesse una forza centrifuga indipendente, la pallina volerebbe via in **direzione radiale** come mostrato in figura (a); al contrario, sperimentalmente, essa segue invece, per **inerzia**, la **direzione tangenziale** alla traiettoria, come mostrato in figura (b), che è poi la direzione che il suo vettore velocità aveva all'istante in cui la mano ha mollato la presa (dunque la forza centrifuga scompare insieme a quella centripeta!).

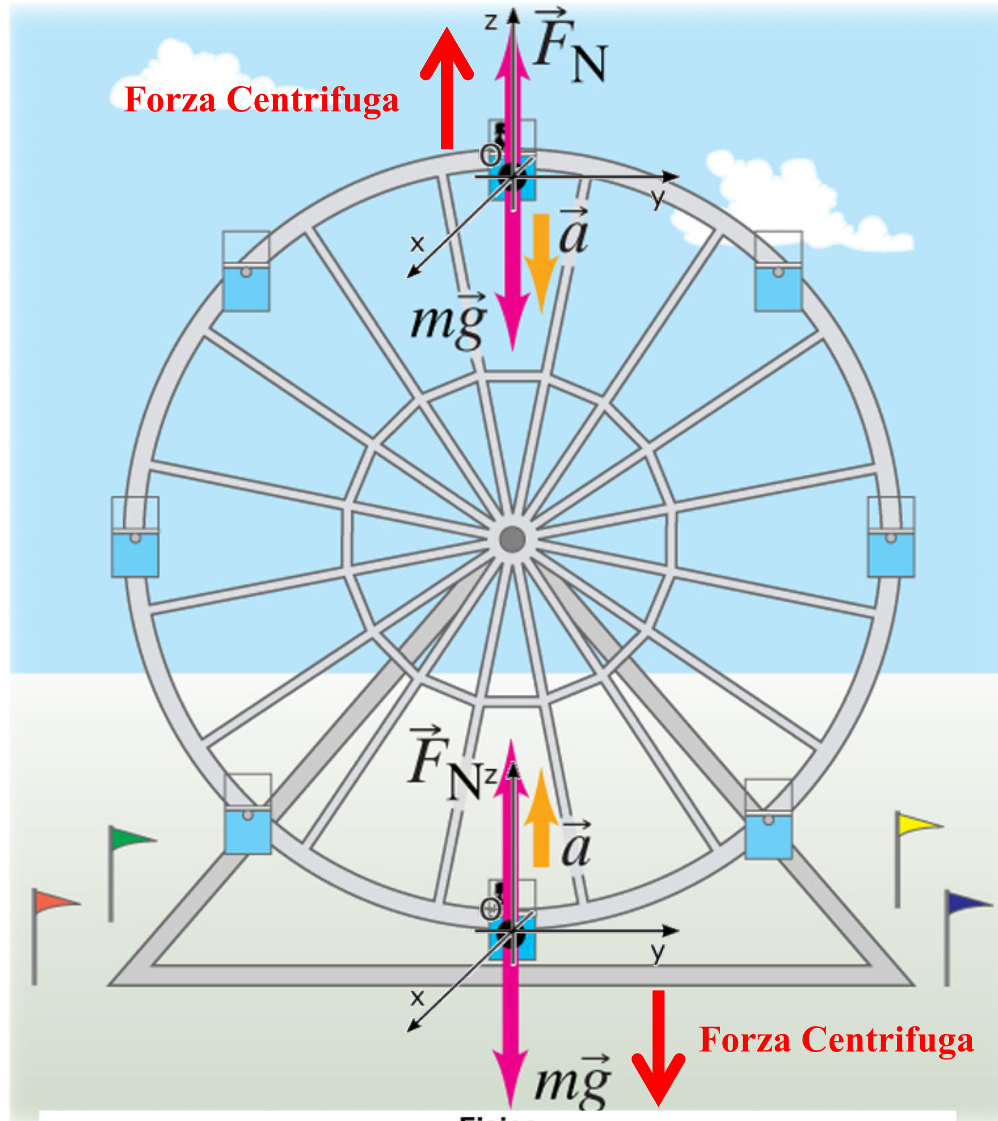


Esempi di Forza Centrifuga

La **forza centrifuga** diretta verso l'esterno che avvertiamo quando giriamo seduti su una **giostra** come quella mostrata in figura**,** è dunque una **forza apparente** dal punto di vista del riferimento inerziale solidale con la Terra, ma diventa **reale** per noi che ci troviamo nel riferimento in **rotazione** solidale con la giostra, che è **non inerziale:** essa è, ancora una volta, dovuta al fatto che il nostro corpo, il quale tenderebbe **per inerzia** a proseguire il suo moto in linea retta, è invece costretto a girare assieme alla giostra a causa della **forza centripeta** (dovuta in questo caso all'**attrito** con la sedia su cui siamo seduti).

Esempi di Forza Centrifuga

Esempio concettuale della ruota
La **forza normale** che il seggiolino esercita sul turista nel punto più alto della ruota è: (a) minore, (b) maggiore, (c) uguale a quella che il seggiolino esercita nel punto più basso della ruota? **Si può riconsiderare dal punto di vista del sistema di riferimento del seggiolino…**



Nel punto più alto:

$$\overrightarrow{F_C} - m\vec{g} + \overrightarrow{F_N} = 0 \rightarrow \overrightarrow{F_N} = m\vec{g} - \overrightarrow{F_C}$$

Forza Centrifuga

Nel punto più basso:

$$\overrightarrow{-F_C} - m\vec{g} + \overrightarrow{F_N} = 0$$

$$\rightarrow \overrightarrow{F_N} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_C}$$

Esempi di Forza Centrifuga

Percorrendo una curva in automobile
Ormai sappiamo da dove ha origine la forza centripeta che mantiene **l'auto** sulla curva impedendole di sbandare. Ma cosa sperimenta un **passeggero** dentro l'auto durante la curva?

Orbitando intorno alla Terra
Sappiamo anche da dove ha origine la forza centripeta che mantiene la **navicella Atlantis** in orbita attorno alla terra.

Ma perchè, diversamente dal passeggero dell'auto, che viene schiacciato contro lo sportello, un astronauta dentro la navicella sperimenta uno stato di **galleggiamento,** come in assenza di peso, senza sentire quindi alcuna forza agire su di lui?


OVHD
EXIT

To JEM
To MPLM

Gravitazione

Verso una legge della Gravitazione Universale...

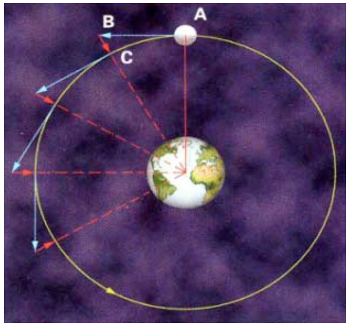
La **leggenda** narra che **Newton**, proprio mentre guardava la Luna seduto sotto un albero nel suo giardino, sia stato colpito da una **mela** caduta dall'albero e abbia esclamato: "*Una mela? Strano, io sono seduto sotto un pero!*"

Pero o melo che fosse, il colpo però evidentemente gli fece bene perché subito dopo ebbe la geniale **intuizione** che sia proprio la **forza di gravità** della Terra, che si sapeva già essere responsabile dell'accelerazione ($g=9.80 m/s^2$) verso il basso che subiscono tutti i corpi sulla superficie del nostro pianeta, a trattenere la Luna nella propria orbita. E fu questa ispirazione a permettergli di elaborare le idee che lo portarono a sviluppare la sua **teoria della gravitazione universale**.

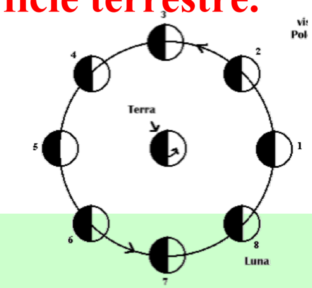
Il problema, a quei tempi, era che si aveva difficoltà ad accettare l'idea di un'**interazione a distanza**, cioè di una forza che si esercita tra due corpi senza che questi vengano in qualche modo, direttamente o indirettamente, a contatto.

Newton invece affermava proprio questo, che la gravità agisse tra due corpi **anche senza contatto**, e anche se questi due corpi sono molto distanti tra loro, come ad esempio la Terra e la Luna.

Verso una legge della Gravitazione Universale...



Dalla cinematica del moto circolare uniforme sappiamo che **l'accelerazione centripeta della Luna**, dovuta alla forza di gravità della Terra (che quì gioca quindi il ruolo di forza centripeta), è pari a $2.72 * 10^{-3}$ m/s^2, che equivale a circa 1/3600 g : ciò significa che **l'accelerazione della Luna è circa 3600 volte più piccola dell'accelerazione di gravità di un oggetto sulla superficie terrestre.**



Si veda il relativo esercizio già svolto in cinematica…

La **lunghezza** dell'orbita lunare è pari a $C = 2\pi r, \quad con \quad r = 3.84 \cdot 10^8 m$

Il **periodo** di rotazione, espresso in secondi, è $T = (27.3 giorni)\dfrac{24.0h}{giorno}\dfrac{3600s}{h} = 2.36 \cdot 10^6 s$

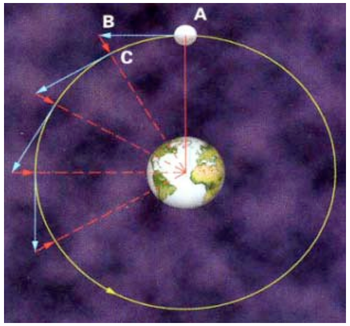
Dunque, essendo la velocità scalare di rotazione $v = 2\pi r / T$, avremo una **accelerazione centripeta** di modulo pari a :

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 (3.84 \cdot 10^8 m)}{(2.36 \cdot 10^6 s)^2} = 0.00272 \;\; m/s^2 = 2.72 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

Riscrivendo questo risultato in termini della **accelerazione di gravità** g=9.80m/s^2, avremo:

$$a_R = 2.72 \cdot 10^{-3} m/s^2 \left(\frac{g}{9.80 m/s^2} \right) = \boxed{\frac{1}{3600} g} << g$$

Verso una legge della Gravitazione Universale...



Dalla cinematica del moto circolare uniforme sappiamo che **l'accelerazione centripeta della Luna**, dovuta alla forza di gravità della Terra (che quì gioca quindi il ruolo di forza centripeta), è pari a $2.72 * 10^{-3}$ m/s^2, che equivale a circa 1/3600 g : ciò significa che **l'accelerazione della Luna è circa 3600 volte più piccola dell'accelerazione di gravità di un oggetto sulla superficie terrestre.**

Dai suoi calcoli **Newton** si accorse che la distanza della Luna dalla Terra, pari a 384000 km, equivale a circa 60 volte il raggio terrestre (6380 km), e che dunque **la Luna è 60 volte più lontana dal centro della Terra di quanto lo sia un oggetto dalla superficie terrestre**. Ma 60*60=**3600**, che è l'inverso del numero trovato prima in riferimento all'accelerazione: una bella coincidenza, pensò Newton!

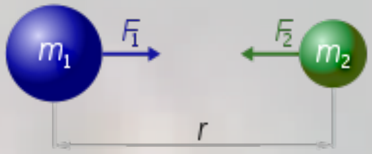
Noi, oggi, ci saremmo giocati il numero 60 al **superenalotto**, ma poichè ai suoi tempi il superenalotto non era ancora stato inventato, Newton si limitò a dedurne che la forza gravitazionale esercitata dalla Terra sulla Luna doveva **decrescere con il quadrato della distanza dal centro della Terra**. Inoltre, a Newton sembrò verosimile che tale forza di attrazione fosse **proporzionale** non solo alla **massa** della Luna ma, per la sua terza legge della dinamica, anche a quella della Terra.

La Legge di Gravitazione Universale

Mettendo assieme tutte queste intuizioni e deduzioni, ed estendendole audacemente dal caso Terra-Luna al caso di due corpi qualunque dell'Universo, dotati di **masse** m_1 ed m_2 e posti ad una **distanza** reciproca r , Newton enunciò (sempre nei "*Principia Mathematica*" del 1687) la sua celebre **legge di gravitazione universale**:

Ogni corpo dell'Universo attrae ogni altro corpo con una forza, agente lungo la linea che congiunge i centri dei due corpi, la cui intensità è direttamente proporzionale al prodotto delle rispettive masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra di esse:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



Ovviamente il valore della costante di proporzionalità **G**, detta **costante di gravitazione universale**, non poteva essere ricavato per deduzione ma solo sperimentalmente, anche se si sapeva che doveva essere molto **piccolo**, in quanto normalmente non notiamo nessuna attrazione tra due oggetti di dimensioni ordinarie ma solo tra gli oggetti e la Terra, che ha una massa enormemente maggiore.

Solo nel 1798, circa 100 anni dopo l'enunciazione da parte di Newton, il fisico inglese **Henry Cavendish** riuscì a confermare sperimentalmente l'ipotesi di Newton e a determinare con sufficiente precisione il valore della costante G.
Il suo valore oggi comunemente accettato è: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

https://www.youtube.com/watch?v=k-aX7Xzf1j0&list=PLFTf3psaXATPioTEyBZShpTY2vbG0SXTL&index=4

Esercizio

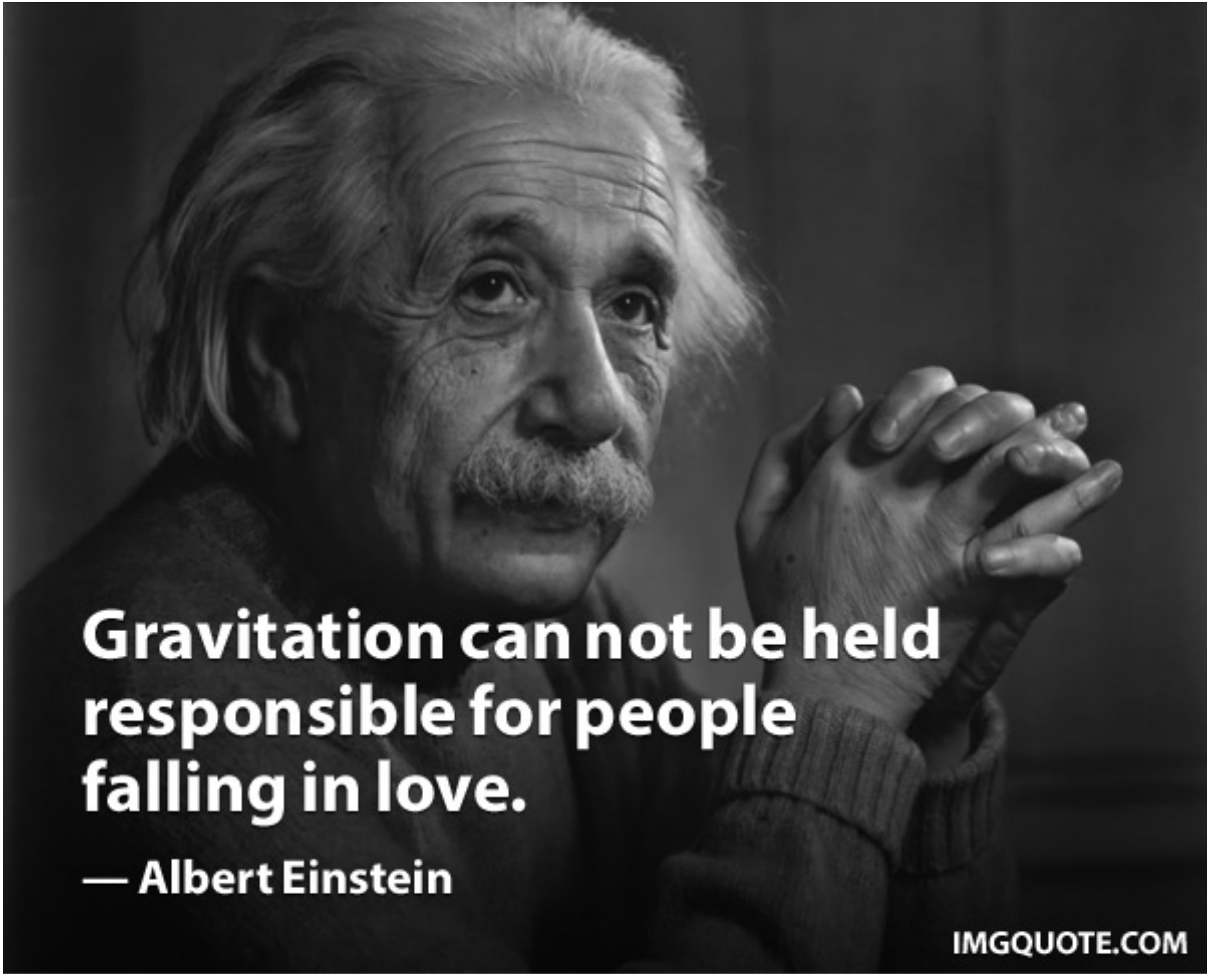
I due ragazzi in figura sono evidentemente **attratti** l'uno dall'altra e ci chiediamo se questa **forza di attrazione** possa essere di natura gravitazionale. A tale scopo, stimiamo l'ordine di grandezza dell'intensità della **forza gravitazionale** che essi esercitano l'uno sull'altra, sapendo che le loro masse sono $\mathbf{m_1=75kg}$ ed $\mathbf{m_2=50kg}$ e supponendo che la loro distanza reciproca sia $\mathbf{r = 0.5m}$ (anche se quest'ultima, come si vede in figura, sembrerebbe in procinto di tendere a zero...)

Arrotondando G a 10^{-10} Nm^2/kg^2, ed utilizzando la legge di gravitazione universale di Newton, avremo:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \approx (10^{-10}\,Nm^2/kg^2)\frac{(50kg)(75kg)}{(0.5m)^2} \approx 10^{-6}\,N$$

che è un'intensità **troppo piccola** per poter essere apprezzata.

Ne concludiamo che la **forte attrazione** sperimentata dai due ragazzi non deriva sicuramente dalla forza gravitazionale ma da qualche altro tipo di forza difficile da calcolare matematicamente…

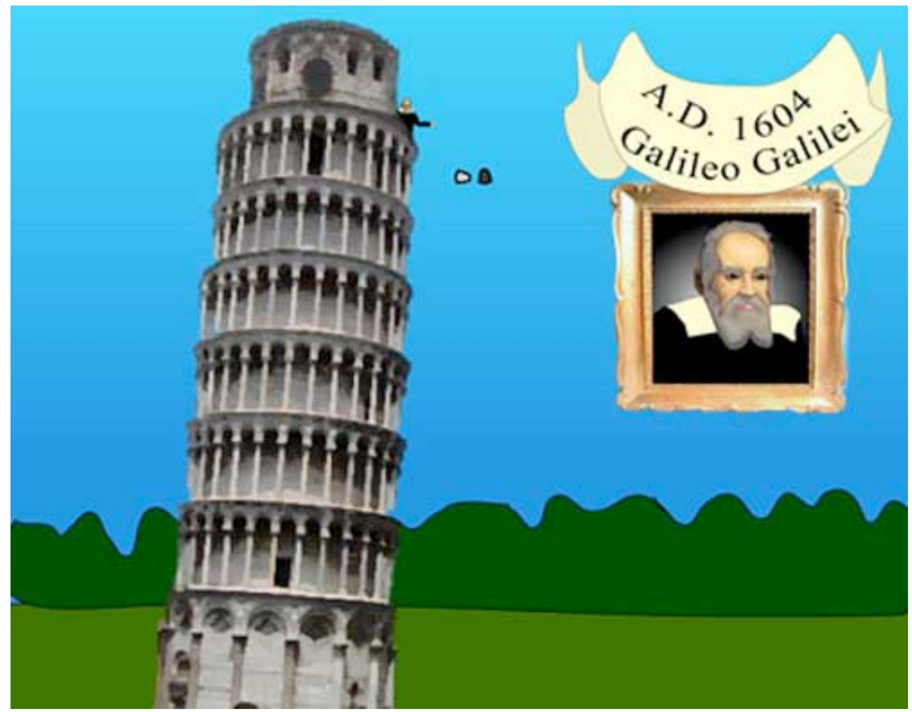

Gravitation can not be held responsible for people falling in love.
— Albert Einstein
IMGQUOTE.COM

La Legge di Gravitazione Universale

Utilizzando la legge di gravitazione universale possiamo finalmente comprendere per via analitica perchè **l'accelerazione di gravità g** sulla superficie terrestre **non dipende dalla massa** dei corpi in caduta libera, come aveva intuito Galileo per via sperimentale.

(a) 

(b) 



La Legge di Gravitazione Universale

Utilizzando la legge di gravitazione universale possiamo finalmente comprendere per via analitica perchè **l'accelerazione di gravità g** sulla superficie terrestre **non dipende dalla massa** dei corpi in caduta libera, come aveva intuito Galileo per via sperimentale.

Se infatti scriviamo la **seconda legge di Newton** in modo da ricavare l'accelerazione g a cui è soggetto un corpo di massa *m* sulla superficie terrestre a causa della forza di gravità F_G, di cui ormai conosciamo l'espressione dalla legge di gravitazione universale, avremo:

$$F_G = mg \;\rightarrow\; g = \frac{F_G}{m} \;\rightarrow\; g = G\frac{mm_T}{r_T^{\,2}}\frac{1}{m} \;\rightarrow g = G\frac{m_T}{r_T^{\,2}}$$

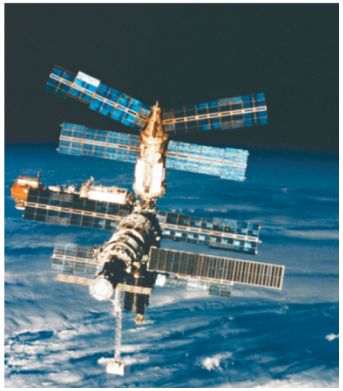
dove m_T e r_T sono, rispettivamente, la massa e il raggio della Terra.

In realtà, una volta misurato G, sapendo che g = 9.80 m/s^2 e conoscendo il raggio della Terra, fu lo stesso Cavendish ad utilizzare l'equazione appena ottenuta per stimare la **massa della Terra**, fino ad allora – per ovvi motivi – ignota:

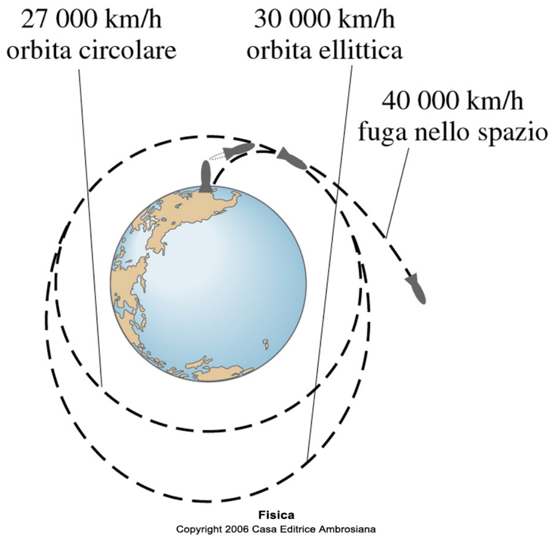
$$\rightarrow m_T = \frac{gr_T^{\,2}}{G} = \frac{(9.80m/s^2)(6.38\cdot 10^6 m)^2}{6.67\cdot 10^{-11}Nm^2/kg^2} = 5.98\cdot 10^{24}\,kg$$

https://www.youtube.com/watch?v=OWEh5yd8FQA&list=PLFTf3psaXATPioTEyBZShpTY2vbG0SXTL&index=5

Satelliti in orbita attorno alla Terra



I **satelliti artificiali** che vengono posti in orbita attorno alla Terra devono raggiungere una **velocità tangenziale** che sia sufficiente a non farli precipitare, ma che allo stesso tempo non sia così alta da farli sfuggire alla gravità terrestre e perdersi nello spazio.



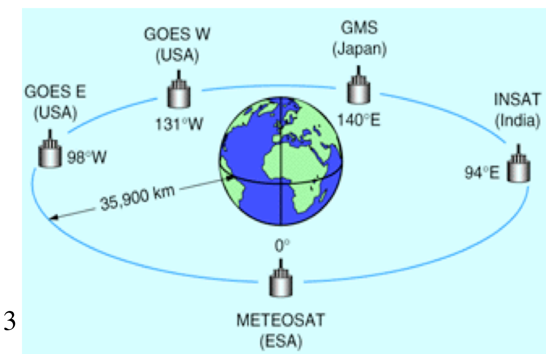
In realtà, come già sappiamo, un satellite in orbita è in uno stato di perenne **caduta libera**, cioè si muove di moto uniformemente accelerato verso la superficie terrestre, ma la presenza di una **elevata componente tangenziale della velocità** gli impedisce di schiantarsi al suolo, mantenendolo su una traiettoria approssimativamente **circolare** (la più conveniente in quanto richiede una minore velocità di decollo del razzo che porta il satellite in orbita).

Esercizio

Come sanno tutti gli abbonati Sky, le trasmissioni radiotelevisive usufruiscono ampiamente di **satelliti artificiali per le telecomunicazioni** che si muovono su orbite **geostazionarie** (solitamente equatoriali), cioè tali da farli stazionare sempre in corrispondenza di uno stesso punto della superficie terrestre (cfr.A.C.Clarke, 1945). Calcolare la **distanza** a cui devono orbitare tali satelliti e la loro **velocità**.

Per rimanere sempre sopra lo stesso punto della Terra mentre quest'ultima ruota attorno al suo asse, il satellite deve avere evidentemente un **periodo di rivoluzione** di un giorno. Applichiamo dunque la seconda legge di Newton (**legge del moto del satellite**) considerando che l'unica forza agente sul satellite (di massa m_{sat}) è quella di gravità, e dunque deve essere lei a produrre l'**accelerazione centripeta** del satellite, la quale (supponendo che l'orbita sia perfettamente circolare) avrà modulo $a_R = v^2/r$:

$$F_G = ma_R \quad \rightarrow \quad G\frac{m_{sat}m_T}{r^2} = m_{sat}\frac{v^2}{r}$$



Qui sappiamo che la velocità v deve soddisfare la relazione:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad con \qquad T = 24h = 86400s$$

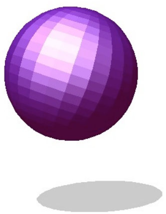
Avremo quindi: $G\frac{m_T}{r^2} = \frac{(2\pi r)^2}{rT^2} \rightarrow r^3 = \frac{Gm_T T^2}{4\pi^2} = 7.54 \cdot 10^{22} m^3$

$\rightarrow r = 4.233 \cdot 10^7 m = 42300 km$ da cui, sottraendo il raggio terrestre (6380km), troviamo una distanza di circa 36000 km dalla superficie della Terra.

Per la velocità avremo infine: $G\frac{m_T}{r^2} = \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = 3070 m/s$

https://www.youtube.com/watch?v=zAPJ1Efh_U0&list=PLFTf3psaXATPioTEyBZShpTY2vbG0SXTL&index=1

Riassumendo...

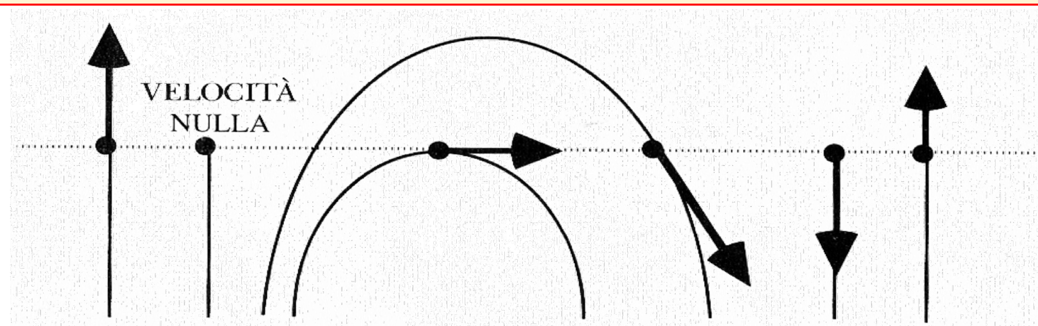


Quesito n.1
Una palla lanciata verso il suolo rimbalza più volte. **Perchè ogni volta rimbalza sempre di meno e alla fine si arresta?**
Possibili risposte: (a) la forza agente si esaurisce; (b) in natura tutto tende a fermarsi; (c) effetto della pressione dell'aria sulla palla; (d) presenza di attriti vari; (e) effetto della maggiore forza di gravità al suolo.

(d)

Quesito n.2
Un giocoliere si cimenta con sei palle identiche. A un dato istante le sei palle si trovano tutte in aria alla stessa altezza, sulle traiettorie indicate in figura, dove i vettori rappresentano le rispettive velocità. Circa **le forze agenti sulle palle nell'istante considerato**, ignorando quella d'attrito dell'aria, dire se **sono**: *(a) tutte uguali; (b) tutte diverse; (c) alcune uguali e altre diverse (specificando); (d) i dati non sono sufficienti per rispondere.*

(a)



Quesito n.3
Un satellite artificiale può ruotare a lungo attorno alla terra se il raggio dell'orbita è sufficientemente grande. **Per quale motivo**?
Possibili risposte: (a) occorre il vuoto per evitare la forza di gravità; (b) la forza frenante dell'atmosfera è piccola; (c) la forza di gravità decresce con l'altezza; (d) altre cause.

(b)

YouTube IT https://www.youtube.com/watch?v=sy1DEoAyE6k&list=PLFTf3psaXATPioTEyBZShpTY2vbG0SXTL&index=3