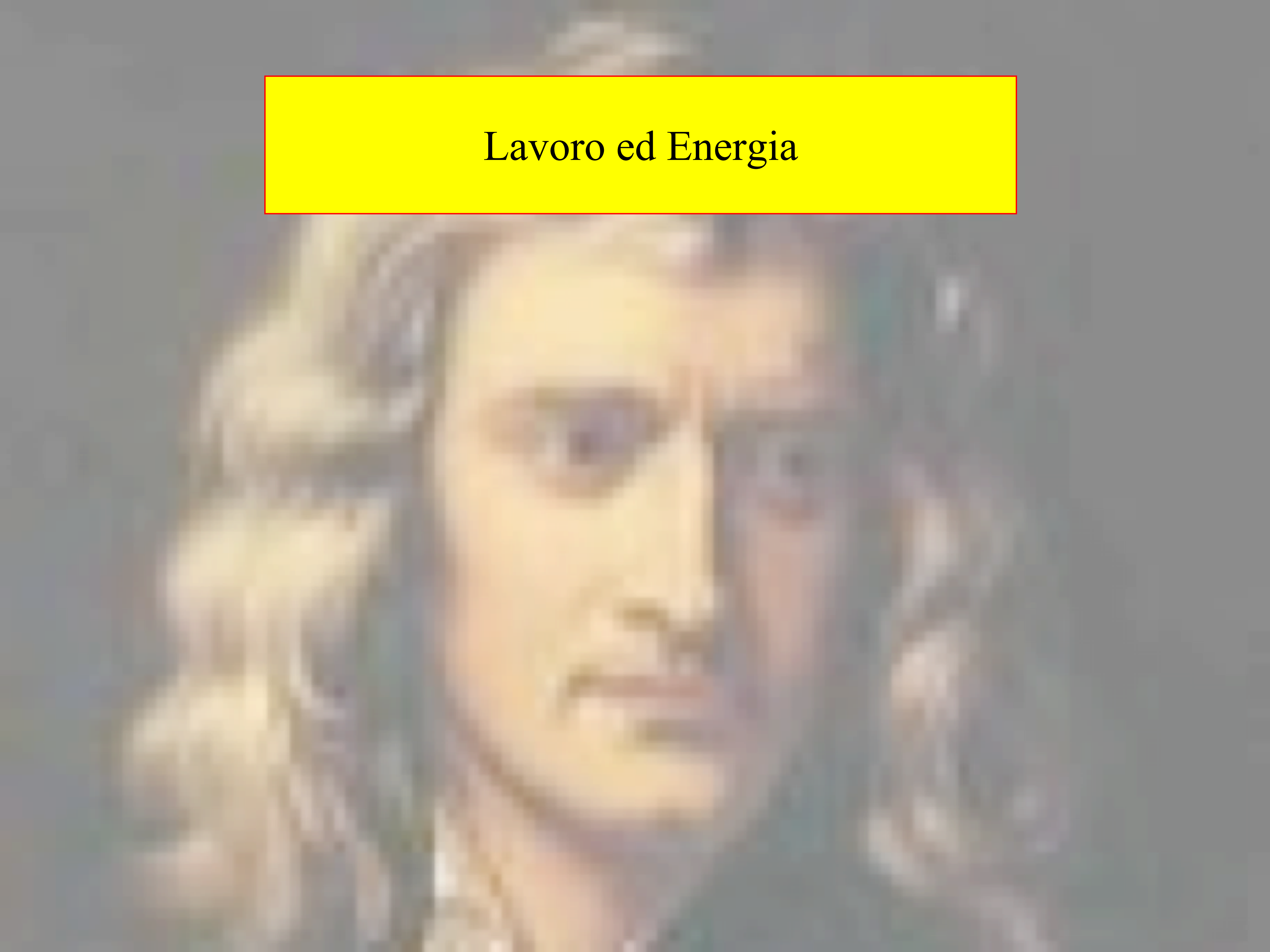
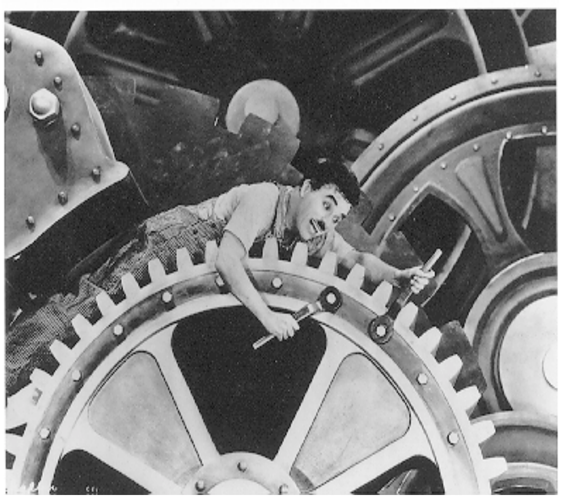
Lavoro ed Energia



Lavoro compiuto da una Forza Costante



Il termine "**lavoro**" in fisica assume un significato molto preciso che elimina le **ambiguità** legate all'uso dello stesso termine nel linguaggio naturale.

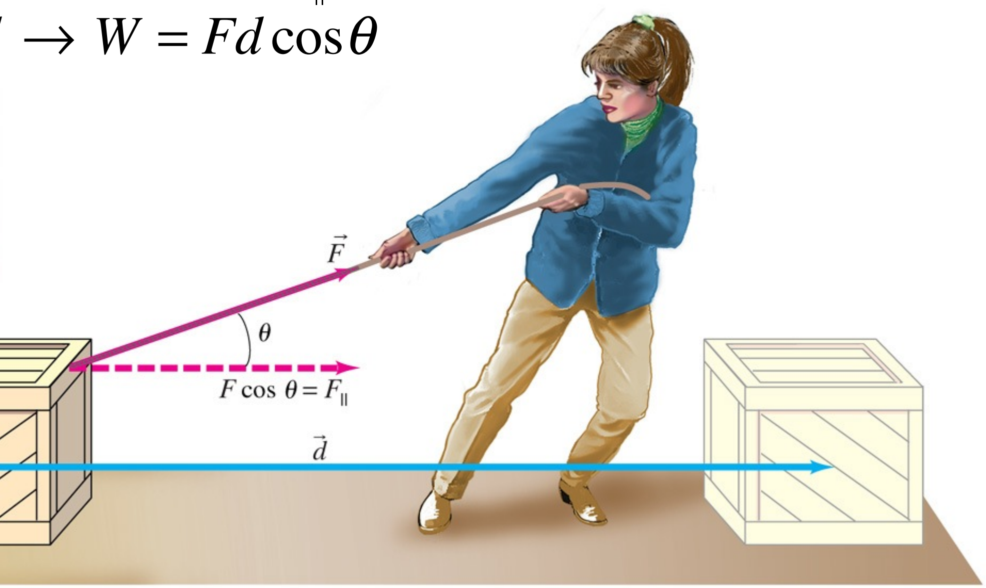
Il lavoro W compiuto da una forza costante $\vec{F}$ su un corpo qualunque che, a causa dell'azione della forza stessa, copra una distanza *d* è definito, scalarmente, come *il prodotto del modulo dello spostamento d per la componente della forza parallela allo spostamento stesso:*

$$W = F_{\parallel} d$$

Supponendo che la forza costante $\vec{F}$ formi un **angolo θ** con la direzione dello spostamento, la componente ad esso parallela sarà uguale a $F_{\parallel} = F\cos\theta$ e dunque potremo scrivere: $W = (F\cos\theta)d \rightarrow W = Fd\cos\theta$

Nelle unità di misura del SI (MKS) il lavoro si misura in **Joule** (J): $1\text{J} = 1\text{N} * 1\text{m}$.
Nel sistema CGS invece si misura in **erg**: $1\text{erg} = 1\text{dyna} * 1\text{cm}$.

James Joule



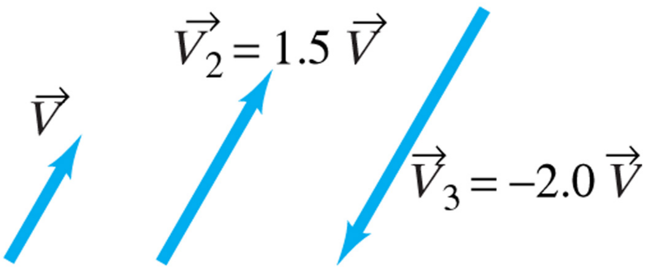
Prodotto scalare di due vettori

La relazione appena trovata, $W = Fd\cos\theta$, è una **relazione scalare** che in realtà deriva dalla definizione più generale di lavoro, una definizione che fa uso della nozione di *prodotto scalare* tra due vettori.

Ricordate la:

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

La moltiplicazione di un vettore per uno scalare b dà un vettore il cui modulo è b volte più grande del modulo del primo vettore, che ha la stessa direzione e che ha lo stesso verso se b è positivo, verso opposto se b è negativo:

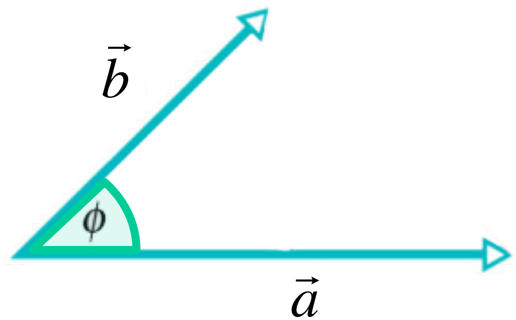


Prodotto scalare di due vettori

La relazione appena trovata, $W = Fd\cos\theta$, è una **relazione scalare** che in realtà deriva dalla definizione più generale di lavoro, una definizione che fa uso della nozione di *prodotto scalare* tra due vettori.

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di moduli rispettivamente a e b e che formano un angolo Φ (< 180°) l'uno rispetto all'altro, il loro **prodotto scalare** è definito dall'espressione:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi$$



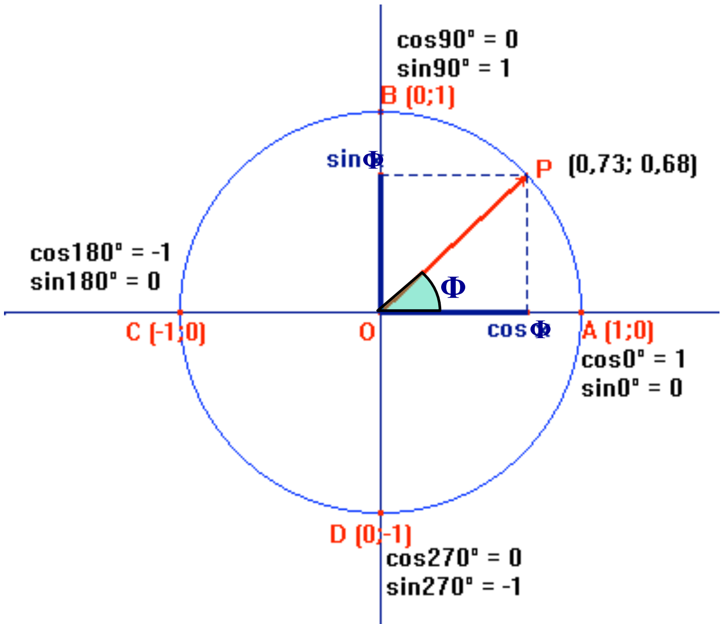
Tale prodotto si legge "*a scalar b*" ed evidentemente dà come risultato uno **scalare**, cioè un valore numerico che dipende dal valore dei **moduli** a e b e dal valore del **coseno** dell'angolo Φ (che è compreso tra 1 e –1).

Al variare dell'angolo Φ avremo dunque:

$$\phi = 0° \;\rightarrow\; \cos\phi = 1 \;\rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = ab > 0$$

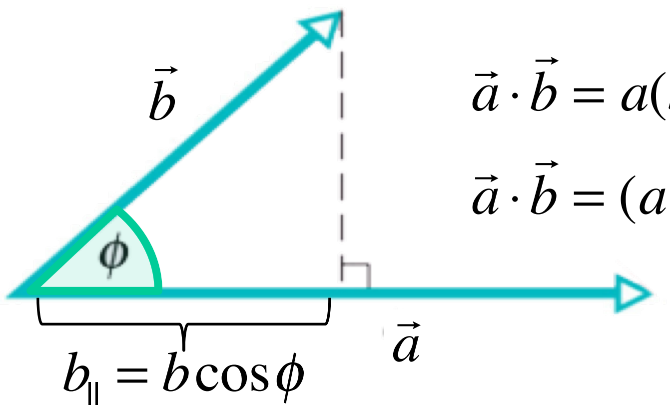
$$\phi = 180° \;\rightarrow\; \cos\phi = -1 \;\rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = -ab < 0$$

$$\phi = 90° \rightarrow\; \cos\phi = 0 \;\rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$



Prodotto scalare di due vettori

L'espressione del prodotto scalare ci dice che esso può essere considerato anche come il **prodotto del modulo di uno dei due vettori per la componente scalare dell'altro vettore parallela alla direzione del primo:**



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a(b\cos\phi) \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab_{\parallel}$$

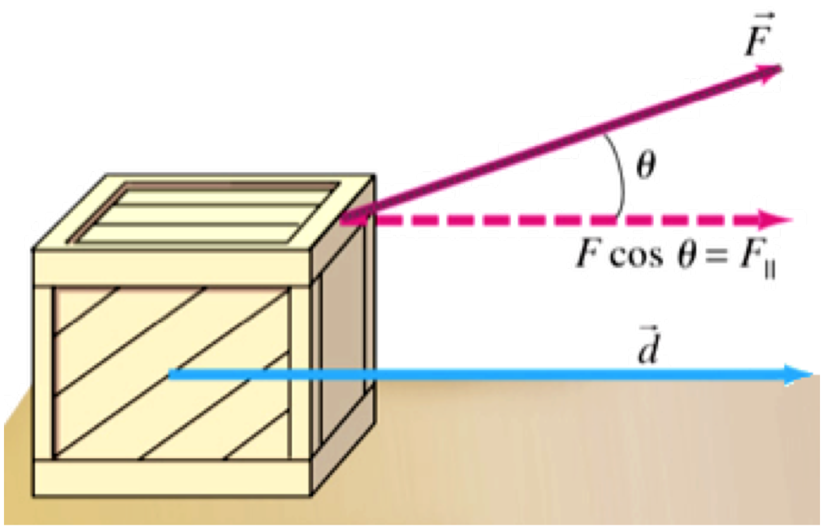
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a\cos\phi)b \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a_{\parallel}b$$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

Ecco dunque che il lavoro che una **forza costante** $\vec{F}$ compie per far percorrere ad un corpo una **distanza** $\vec{d}$, può esprimersi tramite il **prodotto scalare** dei vettori forza e spostamento:

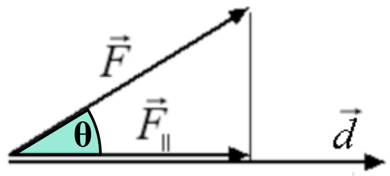
$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} \;\rightarrow\; W = Fd\cos\theta = F_{\parallel}d$$



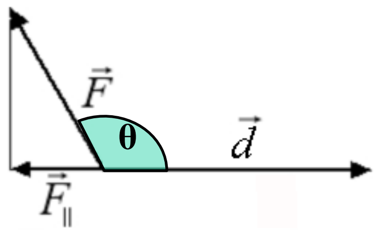
Lavoro compiuto da una Forza Costante

Il lavoro è quindi una grandezza scalare, definita da un valore numerico che dipenderà dalla componente $F_{||}$ della forza agente e che può essere sia **positivo** che **negativo**, a seconda che **l'angolo θ tra forza e spostamento** sia acuto o ottuso:

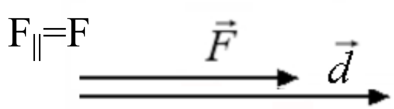
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (W = Fd\cos\theta = F_{||}d)$$



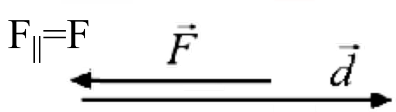
Se l'angolo θ è **acuto**, il suo coseno sarà: $0 < \cos\theta < 1$, dunque **il lavoro compiuto sarà positivo:** $0 < W < Fd$. In questo caso la componente $F_{||}$ della forza F agisce nella direzione del moto.



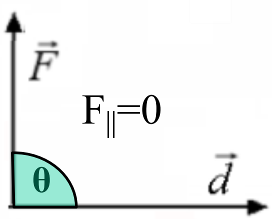
Se l'angolo θ è **ottuso**, il suo coseno sarà: $-1 < \cos\theta < 0$, dunque **il lavoro compiuto sarà negativo:** $-Fd < W < 0$. In questo caso la componente $F_{||}$ della forza F agisce in direzione opposta al moto.



Se **θ = 0°**, $\cos\theta = 1$, e dunque il lavoro compiuto sarà **massimo**, positivo ed esattamente uguale al **prodotto** dei moduli di forza e spostamento: $W = Fd$



Se **θ = 180°**, $\cos\theta = -1$, e dunque il lavoro compiuto sarà anche stavolta massimo, ma negativo, ed uguale a $W = -Fd$

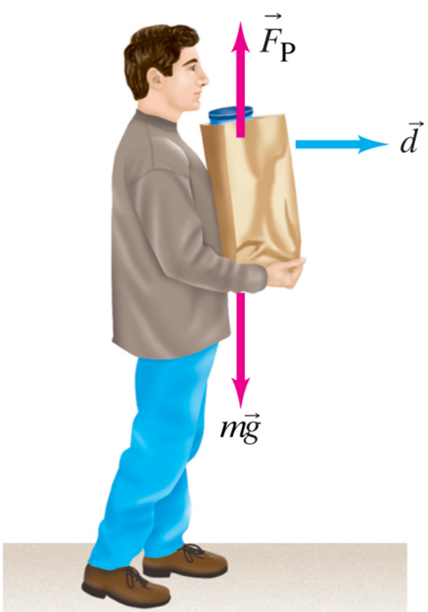


Se infine **θ = 90°**, cioè se forza e spostamento sono perpendicolari, sarà $\cos\theta = 0$ e dunque il lavoro compiuto sarà nullo: $W = 0$

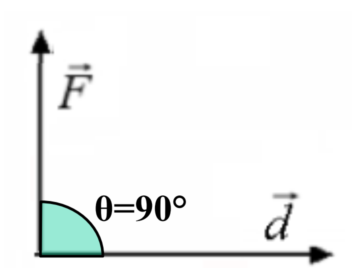
Lavoro compiuto da una Forza Costante

Se un **uomo** è fermo in attesa dell'ascensore con un **pesante pacco** in mano, il senso comune ci direbbe che sta compiendo lavoro (per tenere sollevato il pacco), ma se siete stati attenti a quanto detto finora avrete capito, che dal punto di vista della fisica, ...**l'uomo non compie alcun lavoro!**

Infatti, nostante egli eserciti una **forza $\mathbf{F_P}$** diretta verso l'alto per contrastare la forza peso (e quindi, dal suo punto di vista, sta certamente faticando!), essendo il suo **spostamento nullo** (d=0) la fisica ci dice che W = 0.



Ma la cosa strana è che, a ben guardare, **l'uomo non ha compiuto lavoro nemmeno durante il tragitto** nel quale ha trasportato il pacco camminando dal supermercato all'ascensore... **Perchè???**



Semplicemente perchè durante il tragitto **la forza applicata è sempre perpendicolare allo spostamento** e dunque, come appena visto, si ha cos90°=0, cioè W=Fdcos90°=0 e la forza **non compie lavoro!**

https://www.youtube.com/watch?v=LvpDFokDvB0

Esercizio

Una persona traina una **cassa** di massa 50 kg lungo una distanza x = 40 m lungo un **pavimento orizzontale** mediante una forza costante, F_P=100 N, agente ad un angolo di 37° come in figura. Sapendo che il pavimento esercita una forza di **attrito** di modulo F_{att}=50 N, calcolare **(a) il lavoro compiuto da ciascuna forza agente sulla cassa** e (b) il lavoro totale compiuto sulla cassa.

(a) Scegliendo il vettore spostamento lungo l'asse x, vediamo che sulla cassa agiscono **quattro forze**: la forza esercitata dalla persona che tira, di intensità F_P, la forza di attrito, di intensità F_{att}, la forza peso F_G = mg diretta verso il basso e la forza normale esercitata verso l'alto dal pavimento. Vediamo qual'è il **lavoro compiuto da ciascuna di queste forze** durante lo spostamento:

$$\left.\begin{aligned} W_G &= mgx\cos 90° = 0 \\ W_N &= F_N x \cos 90° = 0 \end{aligned}\right\}$$

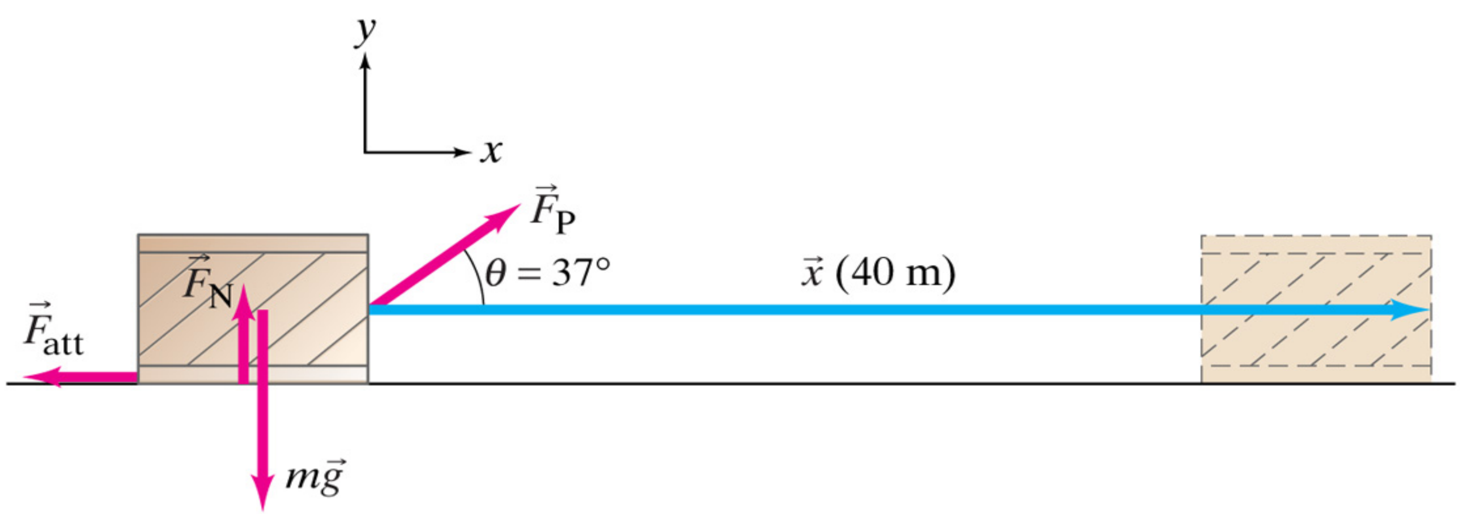
Il lavoro della forza peso e di quella normale è nullo perchè esse sono perpendicolari al vettore spostamento $\vec{x}$.

$$W_P = F_P x \cos\theta = (100N)(40m)\cos 37° = 3200J$$

→W > 0 *perchè la forza produce il moto*

$$W_{att} = F_{att} x \cos 180° = (50N)(40m)(-1) = -2000J$$

→W < 0 *perchè la forza si oppone al moto*



Esercizio
Una persona traina una **cassa** di massa 50 kg lungo una distanza x = 40 m lungo un **pavimento orizzontale** mediante una forza costante, F_P=100 N, agente ad un angolo di 37° come in figura. Sapendo che il pavimento esercita una forza di **attrito** di modulo F_{att}=50 N, calcolare **(a) il lavoro compiuto da ciascuna forza agente sulla cassa** e (b) il lavoro totale compiuto sulla cassa.

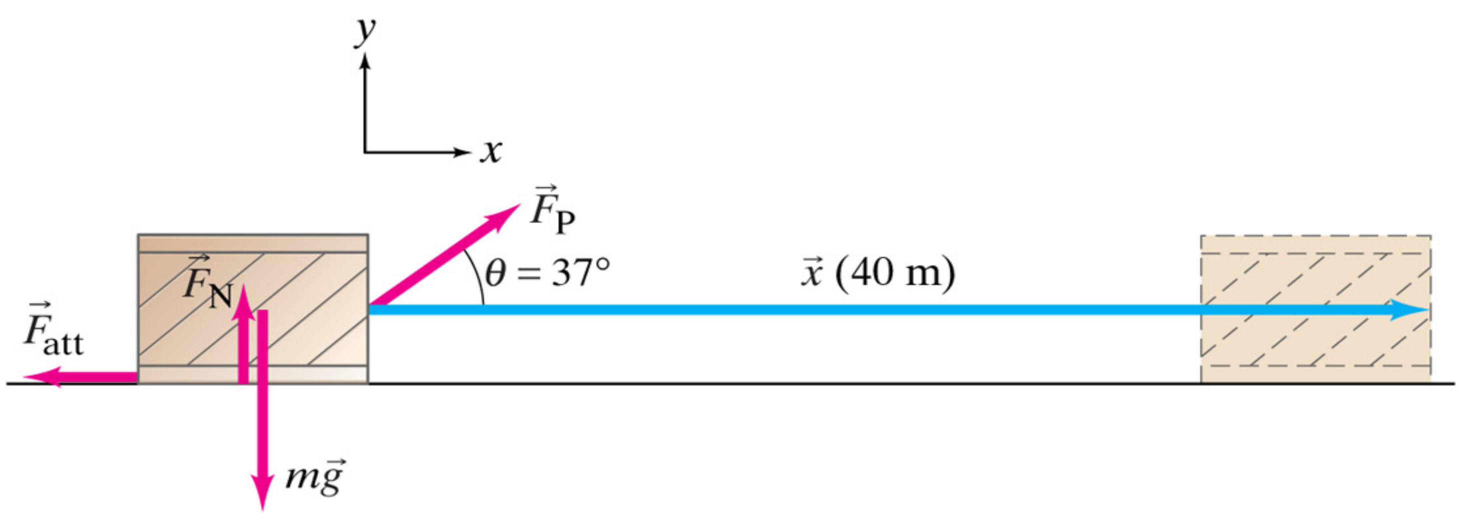
(b) Essendo il lavoro una grandezza scalare, il **lavoro totale** può essere calcolato semplicemente come **somma algebrica** del lavoro compiuto dalle singole forze:

$$W_{tot} = W_G + W_N + W_P + W_{att} = 0 + 0 + 3200J - 2000J = 1200J$$

In alternativa, esso può essere calcolato determinando dapprima la **forza risultante** sulla cassa, e calcolando poi il lavoro compiuto dalla sua componente nella direzione dello spostamento:

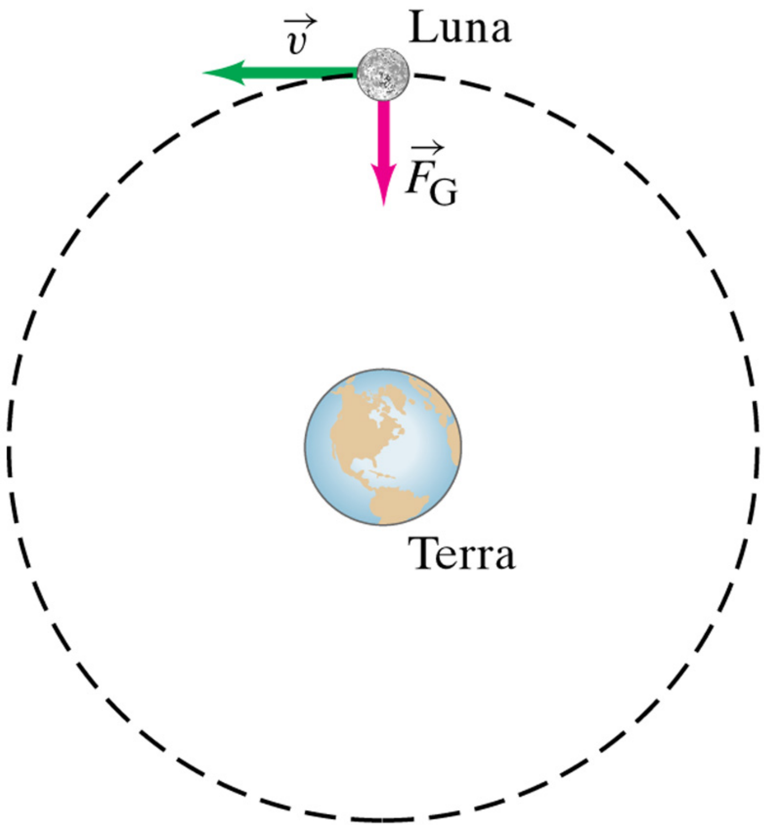
$$(F_{net})_x = F_P \cos\theta - F_{att} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad W_{tot} = (F_{net})_x x = (F_P \cos\theta - F_{att}) x = (100N \cos 37° - 50N)(40m) = 1200J$$



Esempio concettuale

La **Luna**, come sappiamo, ruota attorno alla **Terra** su un'orbita quasi circolare, ivi trattenuta dalla forza gravitazionale esercitata dalla Terra. La **forza di gravità**, in questo caso, compie sulla Luna un lavoro (a) **positivo**, (b) **negativo** o (c) **nullo**?



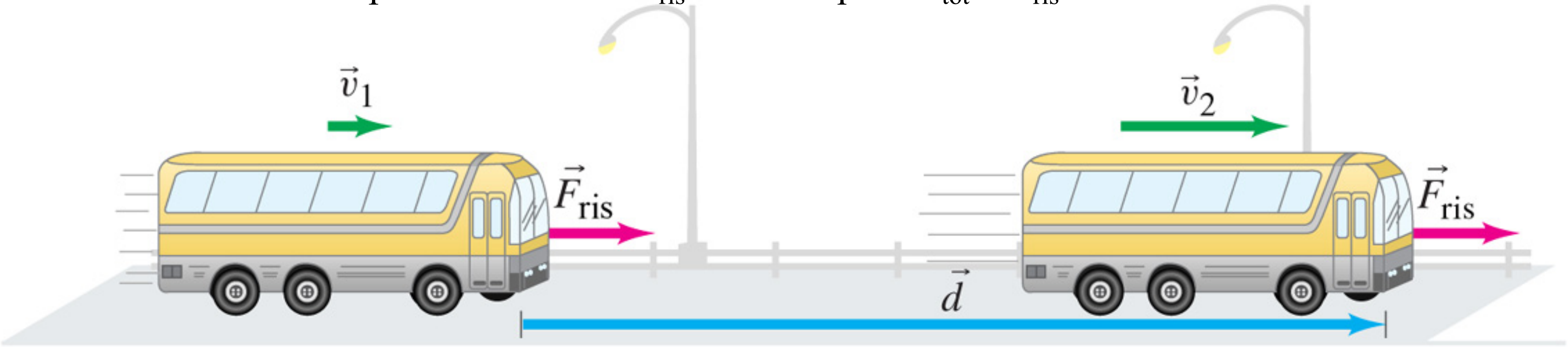
Essendo la forza di gravità diretta verso il centro della Terra, essa è sempre **perpendicolare** allo spostamento, che invece è in ogni istante **tangente** alla traiettoria: dunque il **lavoro** compiuto dalla gravità della Terra sulla Luna mentre essa orbita è **nullo!**

Lavoro ed Energia Cinetica

Come il lavoro, anche il concetto di **energia** assume in fisica una connotazione peculiare. Ovviamente quello di energia è uno dei concetti scientifici più importanti e non ammette definizioni univoche, ma nell'ambito della *Meccanica*, che è quello cui siamo interessati, esso è strettamente connesso con **la capacità di un corpo di compiere lavoro**.

In particolare, quando un **oggetto in moto** urta su un altro oggetto (una palla di cannone contro un muro, un martello contro un chiodo, etc..), eserciterà su di esso una **forza** e ne provocherà un certo **spostamento**: così facendo esso mostra di essere in grado di **compiere lavoro proprio grazie al fatto che è in movimento**, e per questo diciamo che un oggetto in moto possiede una certa **energia cinetica**.

Per giungere ad una **definizione operativa** di energia cinetica, consideriamo un corpo di massa m (un autobus ad es.) che si muove in linea retta con una velocità iniziale v_1, e immaginiamo di accelerarlo uniformemente con una forza risultante F_{ris}, costante e parallela al suo moto, per una distanza d fino a portarlo alla velocità v_2.
Il **lavoro totale** compiuto dalla forza F_{ris} sarà dunque: $W_{tot} = F_{ris}\, d$.



Il Teorema dell'Energia Cinetica

Per la **seconda legge di Newton** sarà anche $F_{ris} = ma$, dove l'accelerazione a può essere ricavata utilizzando una delle **equazioni cinematiche** del moto uniformemente accelerato unidimensionale:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \;\rightarrow\; a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

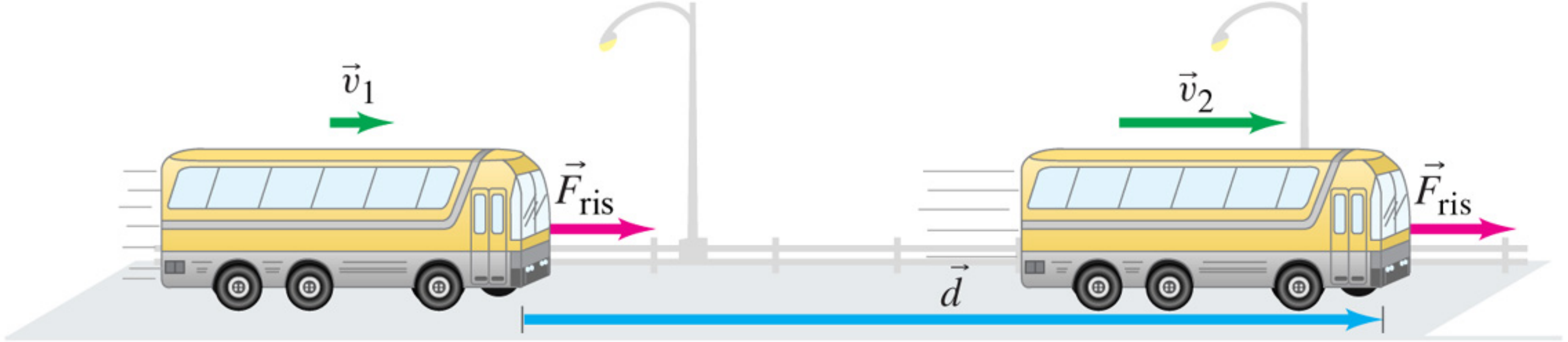
Sostituendo nell'espressione della forza e poi del lavoro da essa compiuto avremo:

$$W_{tot} = F_{ris}d = mad = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}\right)d = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) \;\rightarrow\; W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

e se definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità: $K = \frac{1}{2}mv^2$

avremo che: $W_{tot} = K_2 - K_1 \;\rightarrow\; W_{tot} = \Delta K$

espressione valida anche per traslazioni in 3 dimensioni e per forze variabili, che prende il nome di **Teorema dell'Energia Cinetica: Il lavoro <u>totale</u> compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso.**



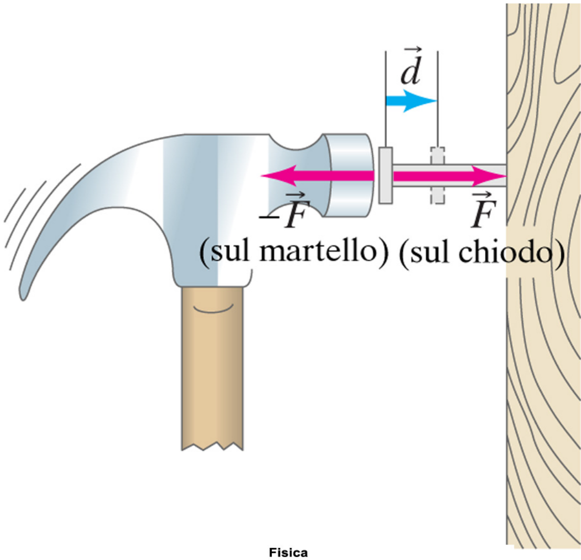
Teorema dell'Energia Cinetica

Il lavoro totale compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione (positiva o negativa) dell'energia cinetica del corpo:

$$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} \;\rightarrow\; W_{tot} = K_2 - K_1 \;\rightarrow\; W_{tot} = \Delta K$$

Esempio concettuale

Consideriamo un **martello** in movimento che batte su un **chiodo** (vedi figura) e cerchiamo di capire cosa succede dal punto di vista del lavoro e della variazione di energia cinetica.



1) Nell'istante in cui **il martello colpisce il chiodo**, esso esercita su di esso una **forza** di intensità F diretta verso destra e si **sposta** assieme al chiodo di un tratto *d* nella stessa direzione. Dunque, per la **terza legge di Newton**, il chiodo restituisce al martello una forza uguale e contraria, cioè anch'essa di intensità F ma diretta verso sinistra. Essendo lo spostamento del martello verso destra, **il lavoro compiuto dal chiodo sul martello** è negativo, $W_{MC} = Fd\cos 180° = -Fd = \Delta K_M < 0$, dunque l'energia cinetica del martello diminuisce (di solito fino a zero, in quanto il martello arriva a fermarsi).

2) D'altro canto, mentre rallenta fino a fermarsi, il martello compie lavoro positivo sul chiodo, in quanto quest'ultimo di sposta verso destra a causa della forza F diretta anch'essa verso destra. Infatti **il lavoro compiuto dal martello sul chiodo** è $W_{CM} = Fd\cos 0° = Fd = \Delta K_C > 0$, e quindi (essendo ΔK_C uguale ed opposta ad ΔK_M) l'energia cinetica del chiodo aumenta della stessa quantità di cui quella del martello era diminuita: possiamo concluderne che il martello, a causa della sua energia cinetica, è stato capace di compiere un lavoro positivo sul chiodo, **trasferendogli** così la sua energia cinetica (che a sua volta servirà al chiodo per compiere lavoro sulla parete conficcandosi dentro di essa...).

YouTube IT https://www.youtube.com/watch?v=b5xM75MPMwc

L’energia cinetica