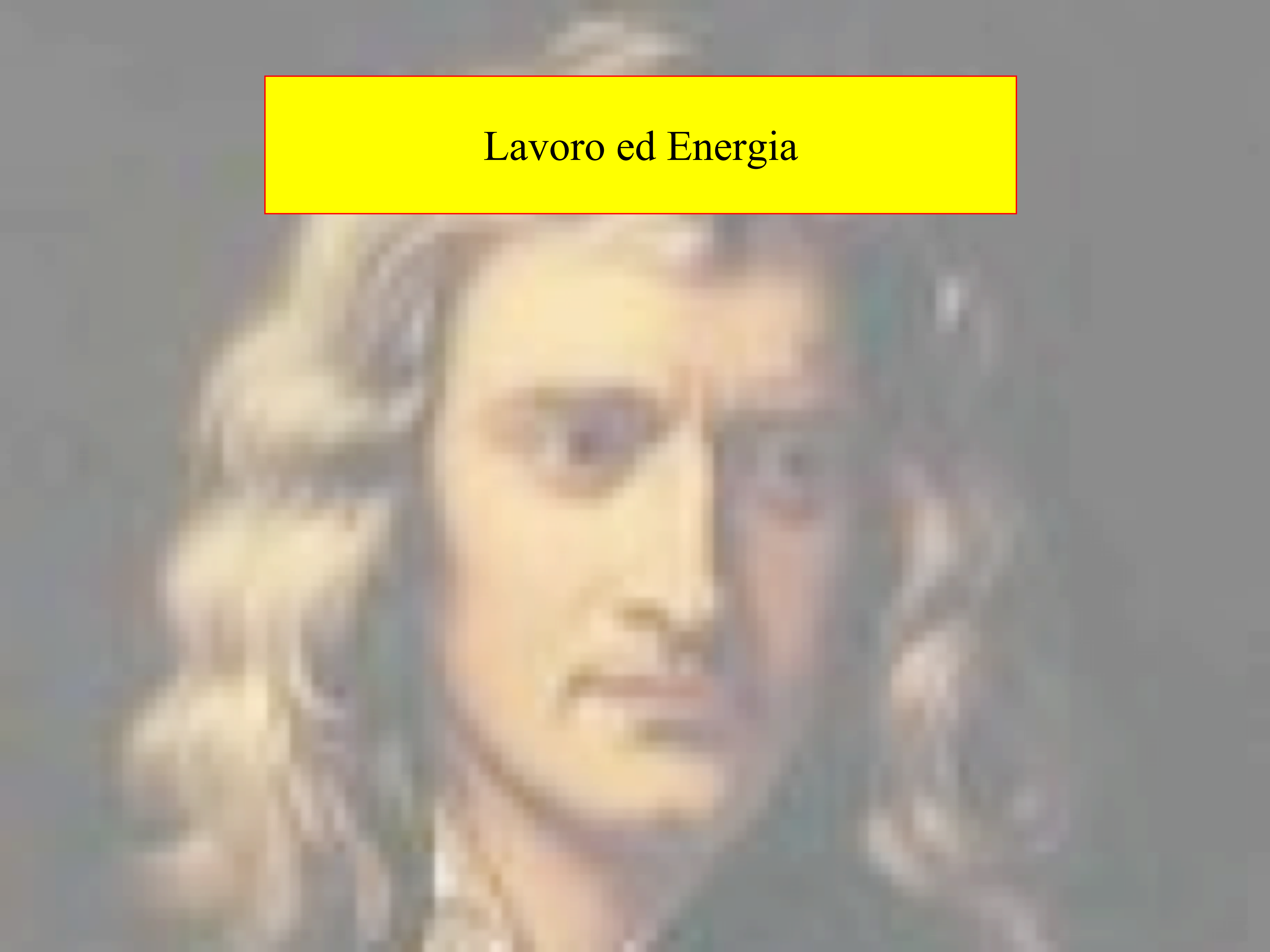
Lavoro ed Energia



Il Teorema dell'Energia Cinetica

Abbiamo visto che se, per un corpo di massa *m* che si muove a velocità *v*, definiamo **energia cinetica traslazionale** la quantità:

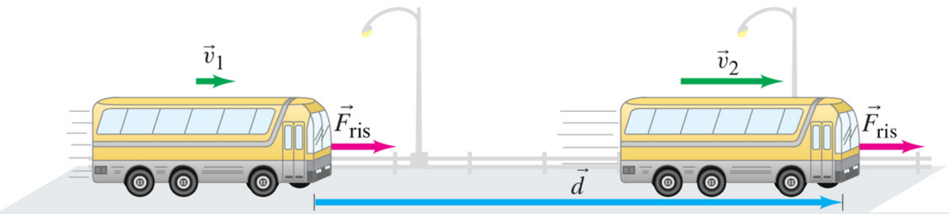
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

si può dimostrare che **il lavoro <u>totale</u> compiuto da una forza risultante non nulla sul corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso.**

$$W_{tot} = K_2 - K_1 \;\rightarrow\; W_{tot} = \Delta K$$

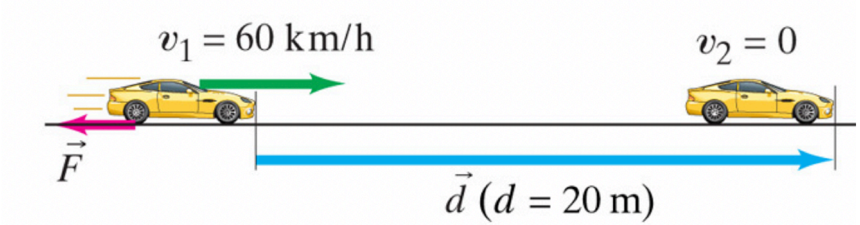
Lavoro ed Energia Cinetica

Riassumendo, quindi, possiamo considerare il lavoro come una forma di **energia in transito** da un oggetto ad un altro (un po' come il denaro transita da un conto corrente ad un altro). Infatti un **lavoro totale positivo** su un oggetto fa **aumentare** la sua energia cinetica (proprio come un versamento di denaro fa aumentare il saldo di un conto corrente), mentre un **lavoro totale negativo** la fa **diminuire** (come un prelievo fa diminuire il saldo di un conto corrente). Se invece il lavoro totale su un oggetto è **nullo**, la sua energia cinetica resta **costante**, e quindi resta costante anche la sua velocità (se non ci sono prelievi anche il saldo di un conto corrente resta costante…).



Lavoro, positivo, fatto dalla spinta del motore $\equiv$ **Versamento di energia cinetica**

Prelievo di energia cinetica $\equiv$ **Lavoro, negativo, fatto dalla forza di attrito dei freni**

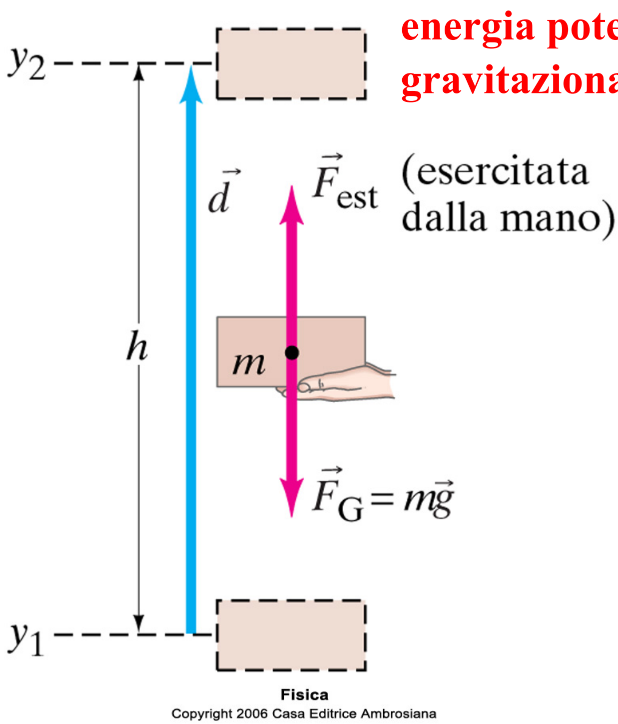


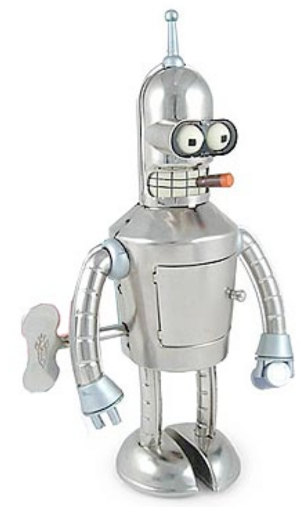
Energia Potenziale

Come abbiamo visto, l'**energia cinetica** posseduta da un corpo dipende esclusivamente dalla sua massa e dalla sua velocità, quindi essa **è presente in ogni corpo in movimento** a prescindere dall'esistenza o meno di altre forze che agiscono sul corpo stesso.

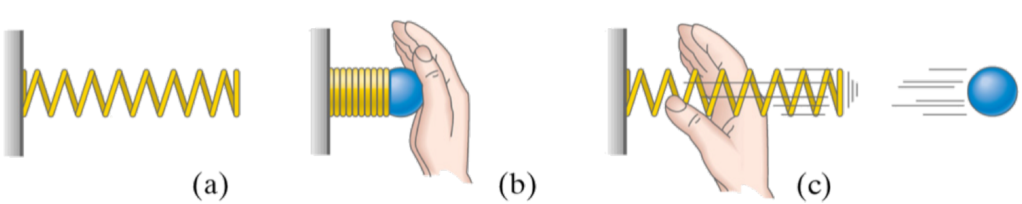
Esiste invece un'altra fondamentale forma di energia legata alla capacità di un corpo di compiere lavoro a causa della sua **configurazione** o della sua **posizione** all'interno di un campo di forza: questa forma di energia si chiama **energia potenziale** la sua definizione varia a seconda del tipo di forza da cui essa trae origine.

energia potenziale gravitazionale





energia potenziale elastica

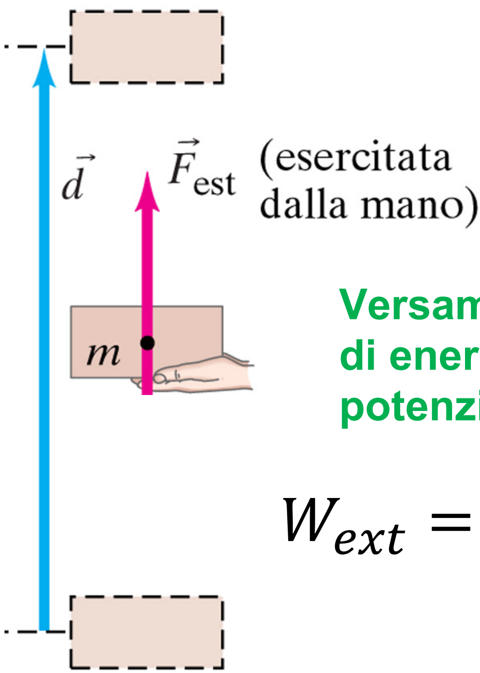


Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

Ancora una volta, quindi, se consideriamo il lavoro come una forma di **energia in transito** da un oggetto ad un altro, possiamo utilizzare la metafora del conto corrente. Infatti mentre **il lavoro compiuto su un oggetto <u>da una forza esterna</u>, fa aumentare la sua energia potenziale** – proprio come un **versamento** di denaro fa aumentare il saldo del conto corrente –, il **lavoro compiuto sul corpo <u>dalla forza gravitazionale</u>** (da cui l'energia potenziale ha origine) fa **diminuire** l'energia potenziale**,** proprio come un **prelievo** fa diminuire il saldo del conto corrente.

Lavoro, positivo, fatto dalla forza esterna

Lavoro, positivo, fatto dalla forza peso

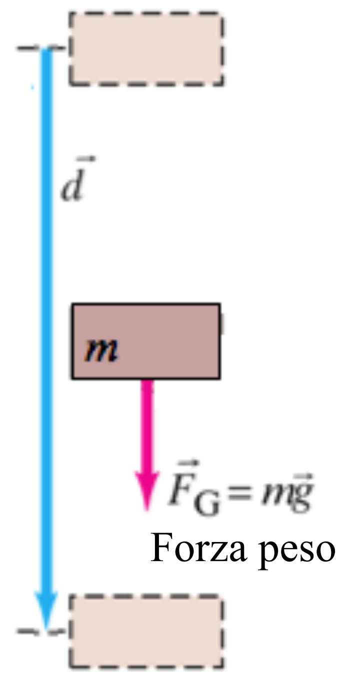


Versamento di energia potenziale

Prelievo di energia potenziale

$$W_{ext} = \Delta U_g$$

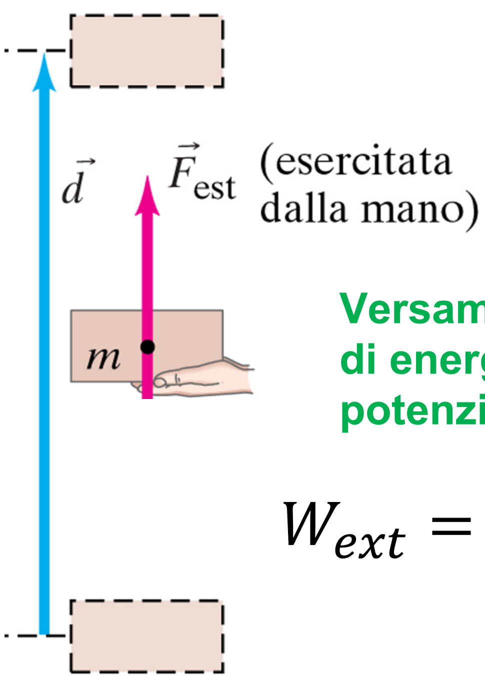
$$W_g = -\Delta U_g$$



Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

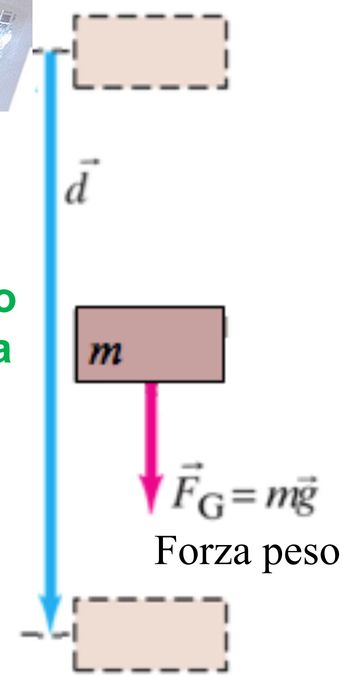
Se poi consideriamo che mentre il corpo cade sotto l'effetto della forza peso la sua **energia cinetica aumenta**, possiamo perfezionare la **metafora del conto corrente** immaginando il lavoro fatto dalla forza esterna per sollevare il corpo come il **versamento di un assegno** (energia potenziale), che poi viene scambiato e trasformato in **denaro liquido** (energia cinetica), che può essere effettivamente utilizzato per acquistare qualcosa (grazie alla energia cinetica acquisita il corpo diventa infatti in grado di **compiere a sua volta lavoro** su altri corpi!)

Lavoro, positivo, fatto dalla forza esterna



Versamento di energia potenziale

Trasformazione in energia cinetica



$$W_{ext} = \Delta U_g$$

$$W_g = -\Delta U_g = \Delta K$$

https://www.youtube.com/watch?v=ftYWV6cIsDU

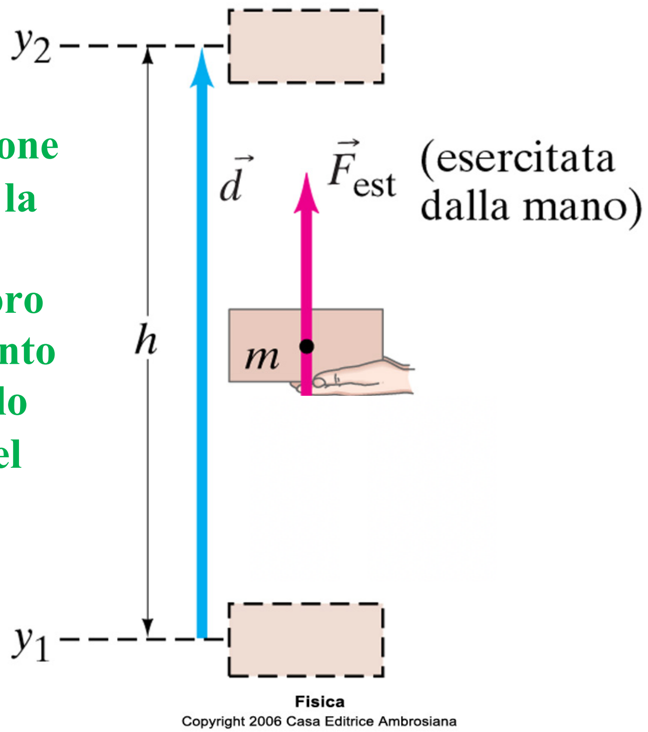
L’energia potenziale

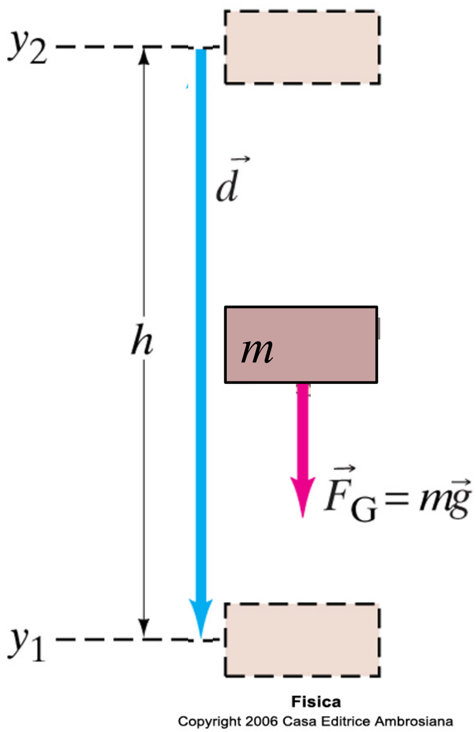
Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

Nell'esempio di sollevamento del mattone, se consideriamo il **processo complessivo di sollevamento e caduta dell'oggetto**, notiamo una particolarità: mentre la **forza esterna** compie un lavoro complessivamente positivo (visto che non è responsabile del processo di caduta ma solo di quello di salita), **la forza di gravità compie un lavoro complessivamente nullo**, in quanto è negativo durante la salita (e pari a *mgh*) e positivo durante la discesa (e pari a – *mgh*).

$$W_{ext} > 0 \qquad W_{ext} = 0 \qquad W_{TOT} > 0$$

Mentre il mattone viene sollevato la forza esterna compie un lavoro positivo in quanto è lei a causare lo spostamento del corpo





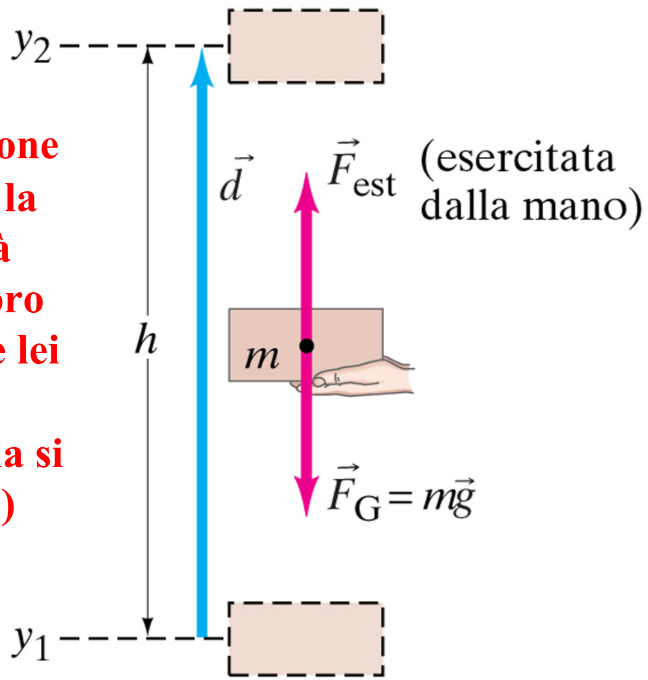
Quando il mattone ricade a terra, la forza esterna compie un lavoro nullo in quanto è la forza peso a produrre lo spostamento del corpo

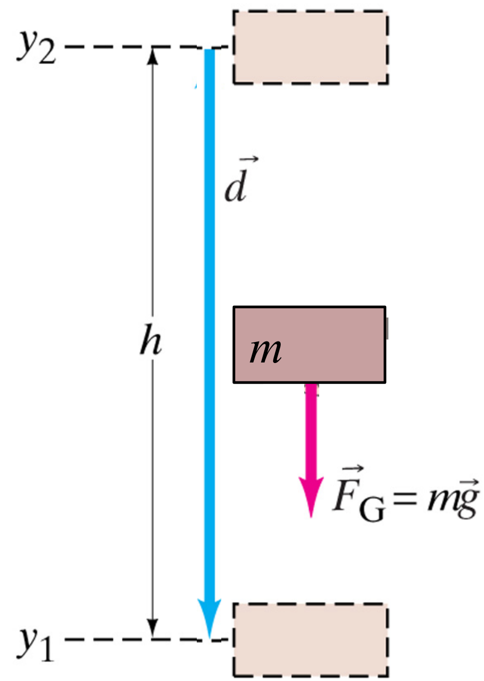
Lavoro ed Energia Potenziale Gravitazionale

Nell'esempio di sollevamento del mattone, se consideriamo il **processo complessivo di sollevamento e caduta dell'oggetto**, notiamo una particolarità: mentre la **forza esterna** compie un lavoro complessivamente positivo (visto che non è responsabile del processo di caduta ma solo di quello di salita), **la forza di gravità compie un lavoro complessivamente nullo**, in quanto è negativo durante la salita (e pari a *mgh*) e positivo durante la discesa (e pari a – *mgh*).

$$W_g < 0 \qquad W_g > 0 \qquad W_{TOT} = 0$$

Mentre il mattone viene sollevato la forza di gravità compie un lavoro negativo (non è lei a causare lo spostamento ma si oppone ad esso)



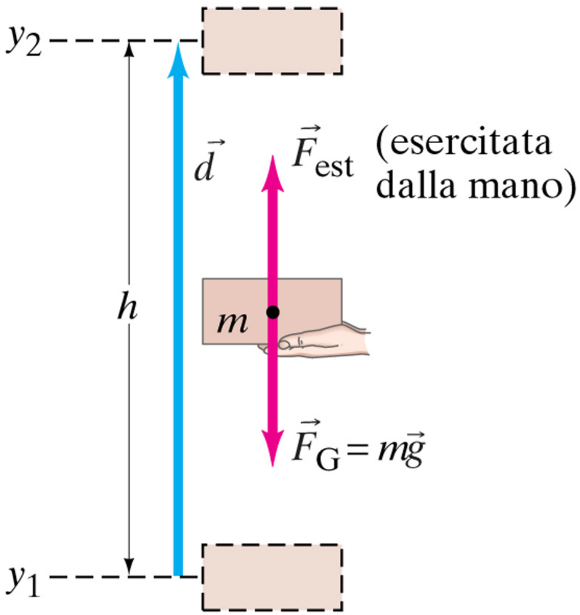


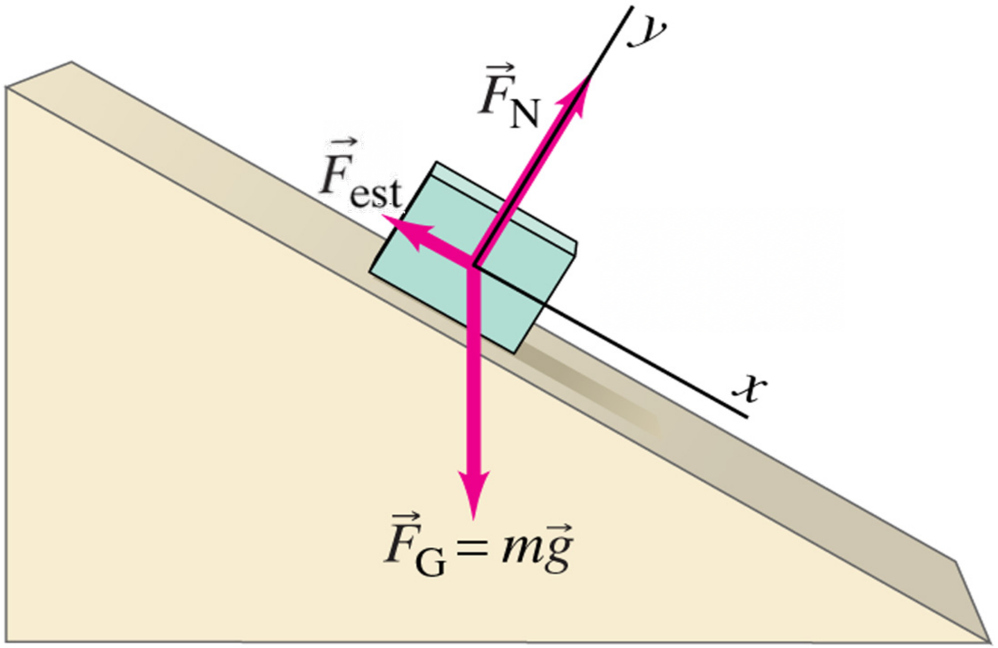
Quando il mattone ricade a terra, la forza di gravità compie lo stesso lavoro di prima, ma positivo (è lei che causa lo spostamento). In totale, quindi, il lavoro compiuto dalla forza di gravità è nullo!

Lavoro delle Forze Conservative

Questa particolarità ci spiega perché sia possibile introdurre il concetto di **energia potenziale** solo in riferimento a certi particolari tipi di forze, come ad esempio quella gravitazionale: il motivo è che queste forze devono essere "**conservative**". In generale, si definiscono conservative quelle forze per cui **il lavoro compiuto non dipende dal particolare cammino percorso, ma solo dalle posizioni finale e iniziale**, posizioni che del resto – come abbiamo visto – sono le uniche che servono per calcolare la differenza di energia potenziale ΔU.

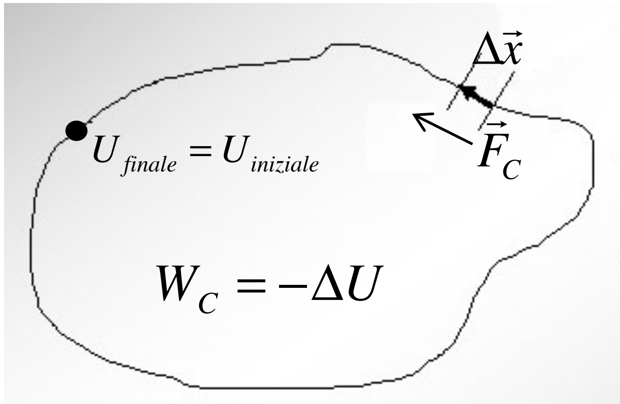
Es: Per sollevare un oggetto di massa *m* verticalmente ad una certa altezza *h* occorre lo stesso lavoro (=mgh) che occorre per spostarlo verso l'alto lungo un percorso inclinato con lo stesso dislivello!





Lavoro delle Forze Conservative

Questa particolarità ci spiega perché sia possibile introdurre il concetto di **energia potenziale** solo in riferimento a certi particolari tipi di forze, come ad esempio quella gravitazionale: il motivo è che queste forze devono essere "**conservative**". In generale, si definiscono conservative quelle forze per cui **il lavoro compiuto non dipende dal particolare cammino percorso, ma solo dalle posizioni finale e iniziale**, posizioni che del resto – come abbiamo visto – sono le uniche che servono per calcolare la differenza di energia potenziale ΔU.



Questa importante proprietà implica che **le forze conservative non compiono alcun lavoro quando spostano un oggetto lungo un percorso chiuso**, in quanto in tal caso la differenza di energia potenziale sarebbe nulla. Se infatti consideriamo una forza conservativa $\vec{F}_C$, anche variabile lungo il percorso, e dividiamo quest'ultimo in piccoli trattini $\Delta\vec{x}$ nei quali essa è pressoché costante, avremo che il lavoro totale compiuto dalla forza, che è uguale alla sommatoria dei lavori parziali, sarà:

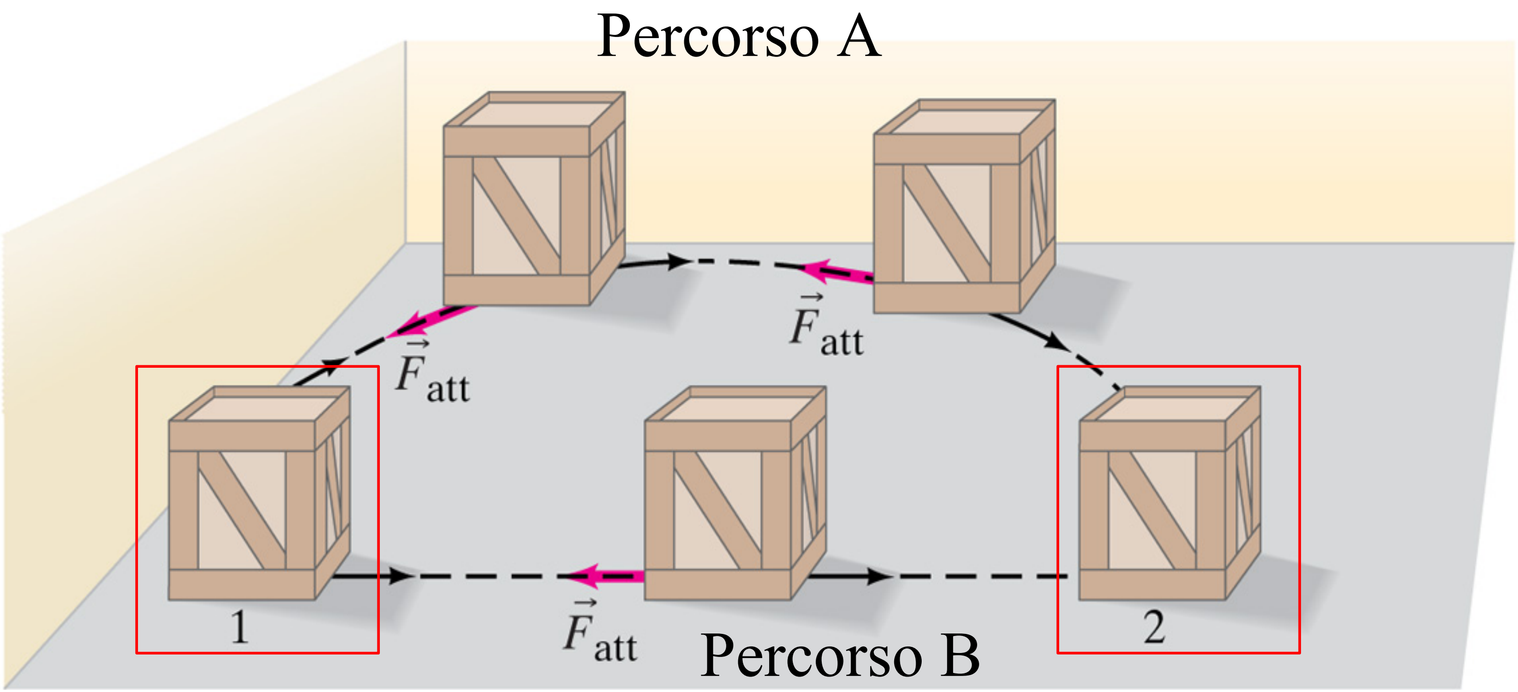
$$W_C = \sum \vec{F}_C \cdot \Delta\vec{x} = -\Delta U = 0 \quad essendo \;\; U_{finale} = U_{iniziale}$$

Se poi facciamo tendere gli spostamenti Δx a zero, la sommatoria si trasformerà nel cosiddetto **integrale di linea** calcolato lungo il percorso chiuso che, per **forze conservative**, è dunque nullo:

$$W_C = \sum \vec{F}_C \cdot \Delta\vec{x} = 0 \xrightarrow{\Delta\vec{x}\to 0} W_C = \oint \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = 0$$

Lavoro delle Forze NON Conservative

Invece, forze come la forza di **attrito** (ma anche la resistenza dell'aria, la propulsione di un motore, la tensione di una corda o una persona che spinge un oggetto), sono **non conservative**, perchè **il lavoro che esse compiono dipende dal percorso e non solo dalla posizione iniziale e finale**. Se ad esempio una cassa viene spinta sul pavimento dalla posizione 1 alla posizione 2 lungo due percorsi di lunghezza diversa, essendo la forza di attrito (di modulo costante) sempre ***opposta*** alla direzione del moto, il lavoro da essa compiuto $W_{att} = -F_{att}\, d$ sarà proporzionale alla lunghezza d del percorso e dunque sarà diverso nei due casi. E anche nel caso di un percorso chiuso W_{att} sarà ancora una volta proporzionale a d e dunque diverso da zero.



Conservazione dell'Energia Meccanica Totale

Supponiamo adesso che su un oggetto in moto traslazionale agiscano diverse forze, alcune **conservative** e altre **non conservative**. Il lavoro totale W_{tot} si potrà dunque scrivere come somma del lavoro compiuto dalle forze conservative, W_C, e di quello compiuto dalle forze non conservative, W_{NC}:

$$W_{tot} = W_C + W_{NC}$$

Per il **teorema dell'energia cinetica** sappiamo che $W_{tot} = \Delta K$ e quindi anche $W_C + W_{NC} = \Delta K$, cioè:

$$W_{NC} = \Delta K - W_C$$

Ma il lavoro delle forze conservative può essere scritto come **differenza di energia potenziale** cambiata di segno $W_C = -\Delta U$ e quindi:

$$W_{NC} = \Delta K + \Delta U$$

cioè *il lavoro delle forze non conservative agenti su un oggetto è uguale alla variazione totale di energia cinetica e potenziale dell'oggetto stesso*.

Se, infine, sul sistema agiscono **solo forze conservative**, $W_{NC}=0$, e quindi:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \;\rightarrow\; (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0 \;\rightarrow\; K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

e se definiamo la quantità **E = K + U** come '**energia meccanica totale**' del sistema, otterremo un risultato di fondamentale importanza, e cioè:

$$E_2 = E_1 = \text{costante!}$$

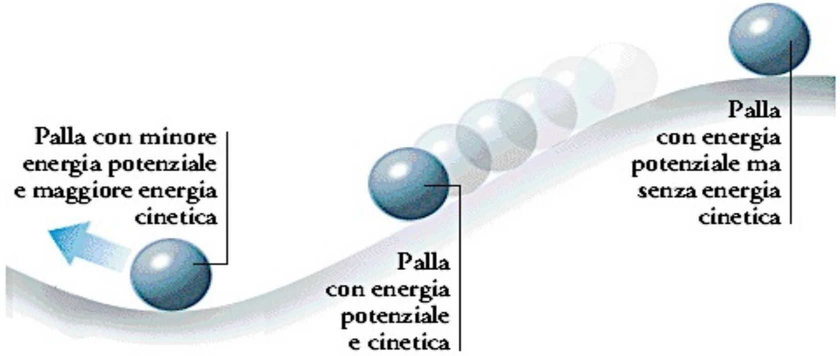
Principio di Conservazione dell’Energia Meccanica Totale

Il risultato appena trovato è chiamato “**Principio di conservazione dell’energia meccanica totale**” e può essere enunciato più precisamente nel seguente modo:

Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l’energia cinetica e l’energia potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, cioè l’energia meccanica totale del sistema, non cambia ma si mantiene costante nel tempo:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad E = \text{costante}$$

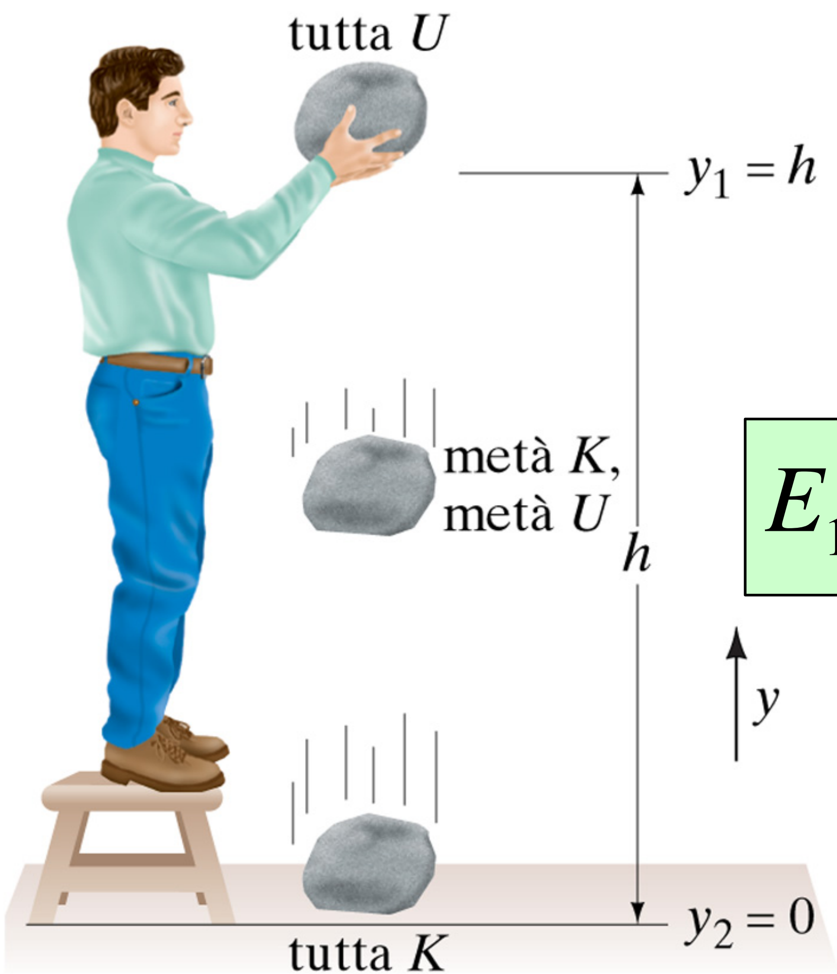
Poichè dunque per forze conservative l’energia meccanica totale E si conserva, ed essa è la somma di energia cinetica e potenziale, ne segue che, **se in un sistema isolato l’energia cinetica aumenta, quella potenziale deve diminuire, e viceversa,** in modo che K+U sia costante.



Il principio di conservazione dell’energia è molto **utile** in quanto permette di risolvere facilmente problemi che sarebbe molto più difficile risolvere usando solo le leggi di Newton. Infatti, quando l’energia meccanica totale si conserva, il fatto di poter mettere in relazione il totale dell’energia cinetica e dell’energia potenziale calcolato in un istante con quello calcolato in un altro istante, **elimina la necessità di dover considerare tutti gli stati intermedi e di conoscere il lavoro compiuto da tutte le forze coinvolte.**

Pietre che cadono

Un semplice esempio di conservazione dell'energia meccanica è dato da una pietra che viene lasciata cadere da un'altezza h sotto l'azione della gravità:



$$\rightarrow E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m v_1^{\,2} + m g y_1 = 0 + m g y_1$$

$$\boxed{E_1 = E_2 = E = \frac{1}{2} m v^2 + m g y}$$

$$\rightarrow E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2} m v_2^{\,2} + m g y_2 = \frac{1}{2} m v_2^{\,2} + 0$$

Pietre che cadono

Se l'altezza da cui cade la pietra è y_1=h=3.0 m, il **principio di conservazione dell'energia** permette di calcolare facilmente la sua velocità quando arriva ad un'altezza di 1.0 m dal suolo, *senza bisogno di conoscere le equazioni della cinematica*.

Al momento del rilascio la pietra è ferma nella posizione y_1=h=3.0 m, quindi $v_1=0$. Per trovare la velocità v_2 che la pietra ha quando si trova nella posizione y_2=1.0 m, basta imporre l'uguaglianza dell'energia totale nelle due posizioni:

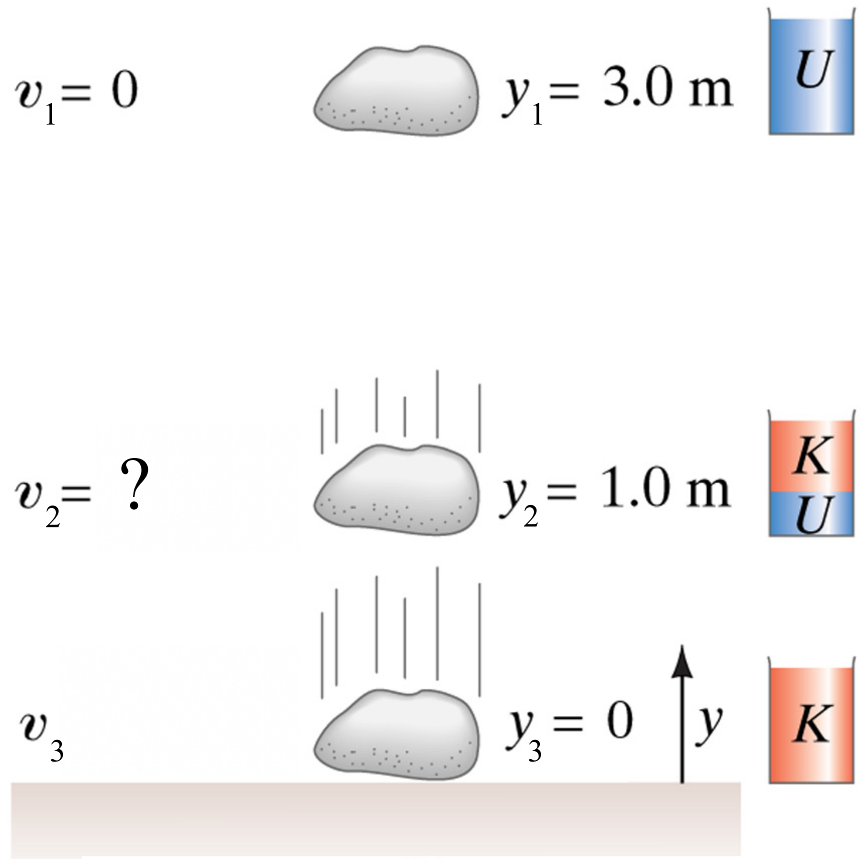
$$\frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + mgy_2$$

da cui, considerando che la massa *m* si semplifica e che $v_1=0$, avremo immediatamente, risolvendo rispetto a v_2:

$$v_2^{\ 2} = 2g(y_1 - y_2) =$$

$$= 2(9.8m/s^2)[(3.0m)-(1.0m)] = 39.2m^2/s^2$$

$$\rightarrow \quad v_2 = \sqrt{39.2m^2/s^2} = 6.3m/s$$



Fisica

Bambini che scivolano

A volte l'utilizzo del principio di conservazione dell'energia non è solo una via alternativa ma è l'unica possibile. Consideriamo ad esempio una **bambina** di massa *m* che, partendo da ferma (v_1=0), si lanci lungo uno **scivolo a spirale** da un'altezza y_1=h=8.5m sopra il livello della piscina, e chiediamoci con quale velocità v_2 arriverà in acqua. Supponiamo che lo scivolo, su cui scorre continuamente dell'acqua, sia **privo di attrito**.

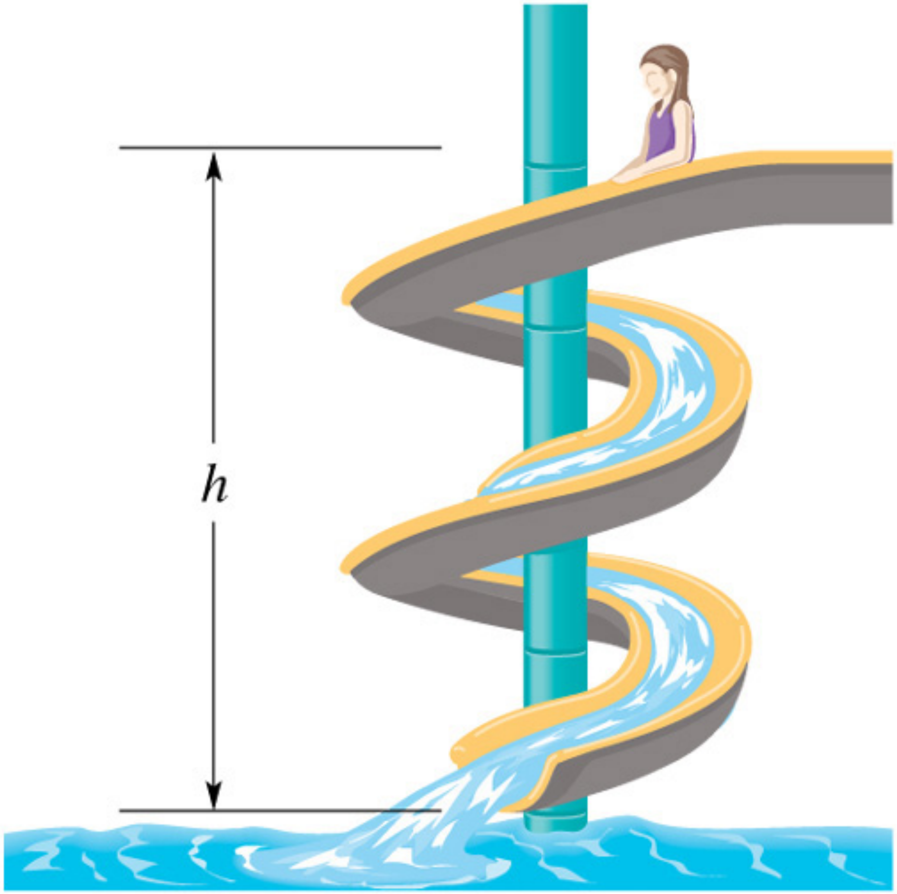
Non conoscendo la **pendenza** dello scivolo non possiamo usare le equazioni della cinematica e comunque il problema è tridimensionale e abbastanza complicato dalla forma dello scivolo.

Dato però che la **forza normale**, essendo sempre perpendicolare allo spostamento, non compie lavoro, l'unica forza che compie lavoro sulla bambina è quella **gravitazionale**, che è conservativa, dunque possiamo usare il principio di conservazione dell'energia come nell'esempio della pietra che cade, con y_2=0:

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2} + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} + mgy_2$$

$$\rightarrow v_2^{\,2} = 2g(y_1 - y_2) = 2gy_1 \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$\rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2(9.8m/s^2)(8.5m)} = 13m/s$$



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

https://www.youtube.com/watch?v=Gc1DMktv4VU

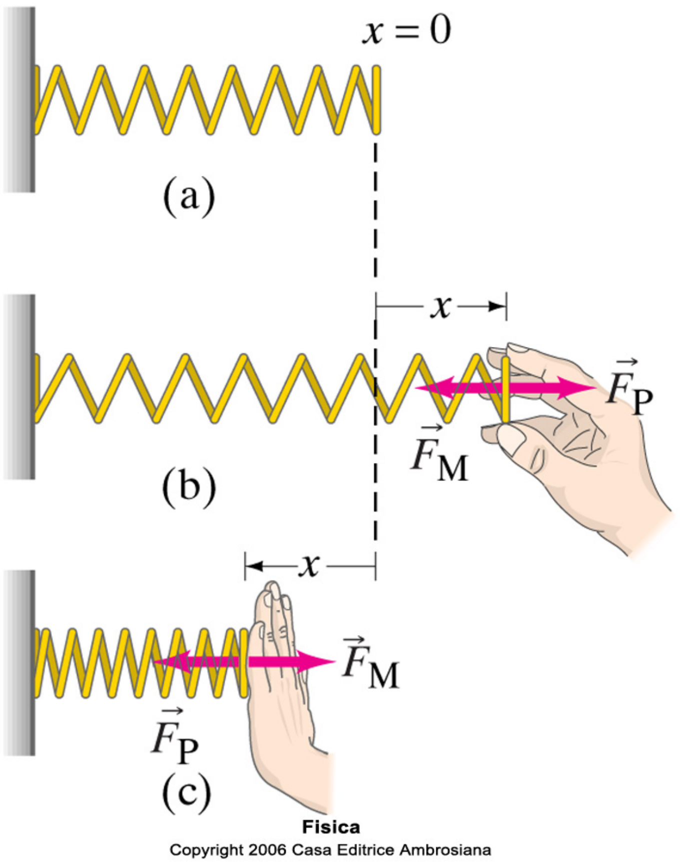
Forze elastiche: la Legge di Hooke

Un altro tipo molto comune di **energia potenziale** è quella associata a **forze di tipo elastico**, che sono anch'esse **conservative** e riguardano moltissime applicazioni pratiche.

Consideriamo una normale **molla a spirale metallica** nella sua posizione di riposo o **equilibrio** (a). Abbiamo già detto che una molla possiede energia potenziale quando è allungata (b) o compressa (c) perchè è in grado di compiere lavoro su altri corpi.

Si può verificare **sperimentalmente** che se vogliamo comprimere o estendere la molla di un tratto x rispetto alla sua posizione di equilibrio (x=0) occorre applicare una forza esterna $F_P=kx$, cioè una **forza direttamente proporzionale allo spostamento** x (e con il suo stesso verso), dove k è la costante elastica della molla e ne misura la rigidità. Al contrario della forza peso, che è sempre costante, **la forza elastica varia quindi con x!**

A questo punto la **molla** compressa o allungata eserciterà una forza $F_M= -kx$, uguale ed opposta a quella esterna e anch'essa proporzionale ad x, che viene detta '**forza di richiamo**' e tende a riportare la molla nella sua posizione di equilibrio (x=0).



L'equazione $F_M= -kx$ ci dice che anche la forza di richiamo esercitata dalla molla **aumenta linearmente con lo spostamento**, come si può verificare sperimentalmente. Questa è nota come la "**Legge di Hooke**".

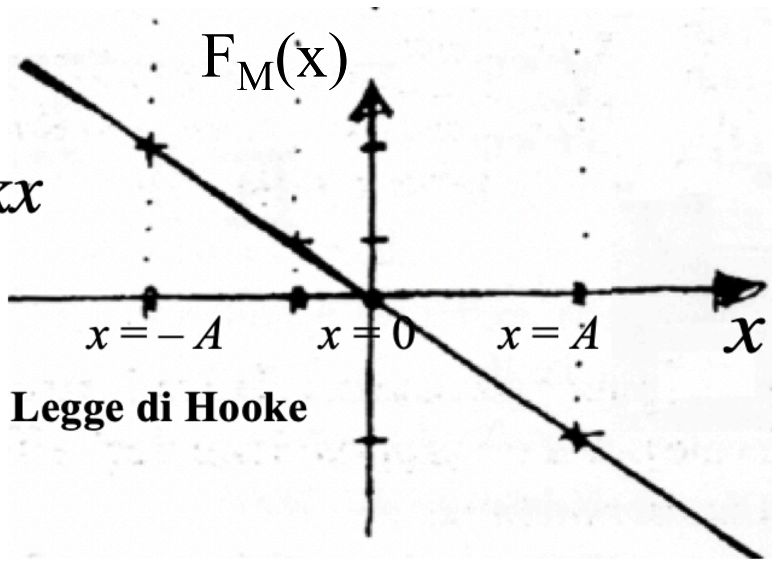
Robert Hooke (1635 -1703)

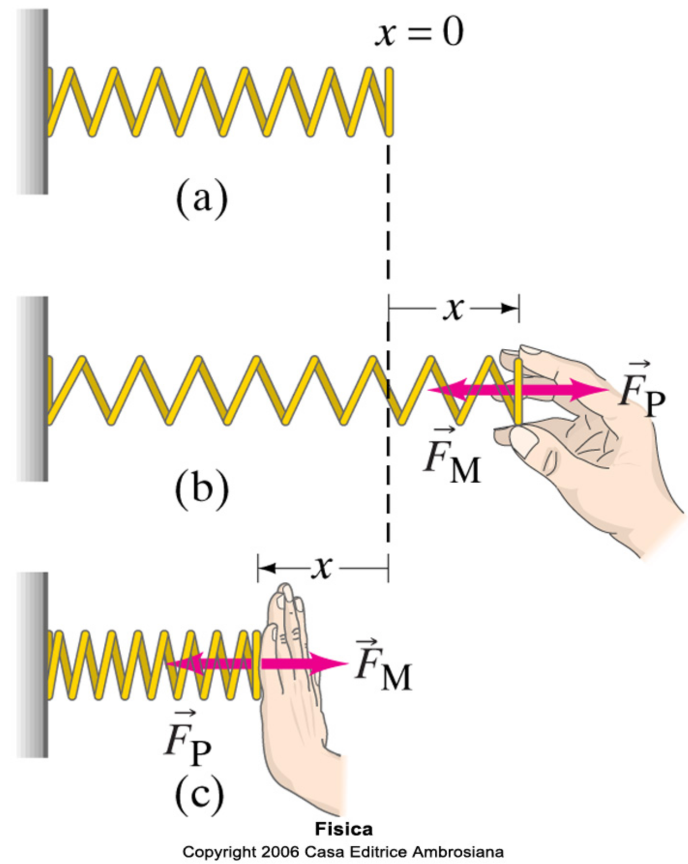
Forze elastiche: la Legge di Hooke

Un altro tipo molto comune di **energia potenziale** è quella associata a **forze di tipo elastico**, che sono anch'esse **conservative** e riguardano moltissime applicazioni pratiche.

Consideriamo una normale **molla a spirale metallica** nella sua posizione di riposo o **equilibrio** (a). Abbiamo già detto che una molla possiede energia potenziale quando è allungata (b) o compressa (c) perchè è in grado di compiere lavoro su altri corpi.

$$F_M = -kx$$



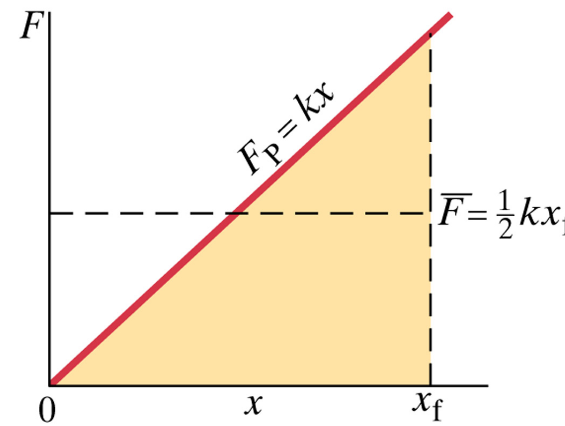


L'equazione $F_M = -kx$ ci dice che anche la forza di richiamo esercitata dalla molla **aumenta linearmente con lo spostamento**, come si può verificare sperimentalmente. Questa è nota come la "**Legge di Hooke**".

Robert Hooke (1635 -1703)

Lavoro ed Energia Potenziale Elastica di una Molla

Dunque, a differenza della forza di gravità che sappiamo essere pressoché costante sulla superficie terrestre, la **forza esterna** F_P necessaria per comprimere o allungare una molla non è affatto costante ma **cresce linearmente con lo spostamento x** della molla dalla sua posizione di equilibrio.



Per calcolare il **lavoro** necessario per allungarla (o comprimerla) di una quantità x potremmo essere tentati di usare l'equazione $W=F_Px$, ma quest'ultima vale solo per forze costanti mentre la forza elastica non lo è. Poichè però durante l'allungamento F_P varia **linearmente** da 0 a kx, essendo x l'allungamento finale, è possibile calcolare la **forza media** come:

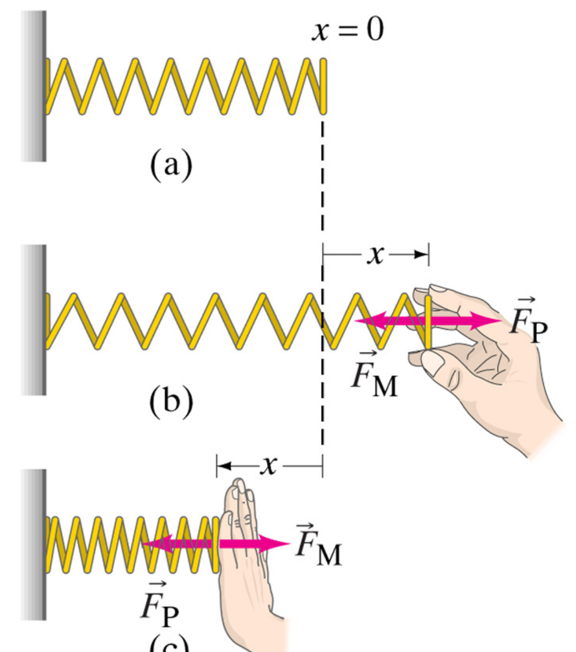
$$\overline{F} = \frac{1}{2}[0 + kx] = \frac{1}{2}kx$$

Essendo la forza media, per definizione, costante, ed essendo essa parallela allo spostamento, possiamo finalmente ricavare il **lavoro**:

$$W_{est} = \overline{F}x = (\frac{1}{2}kx)(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

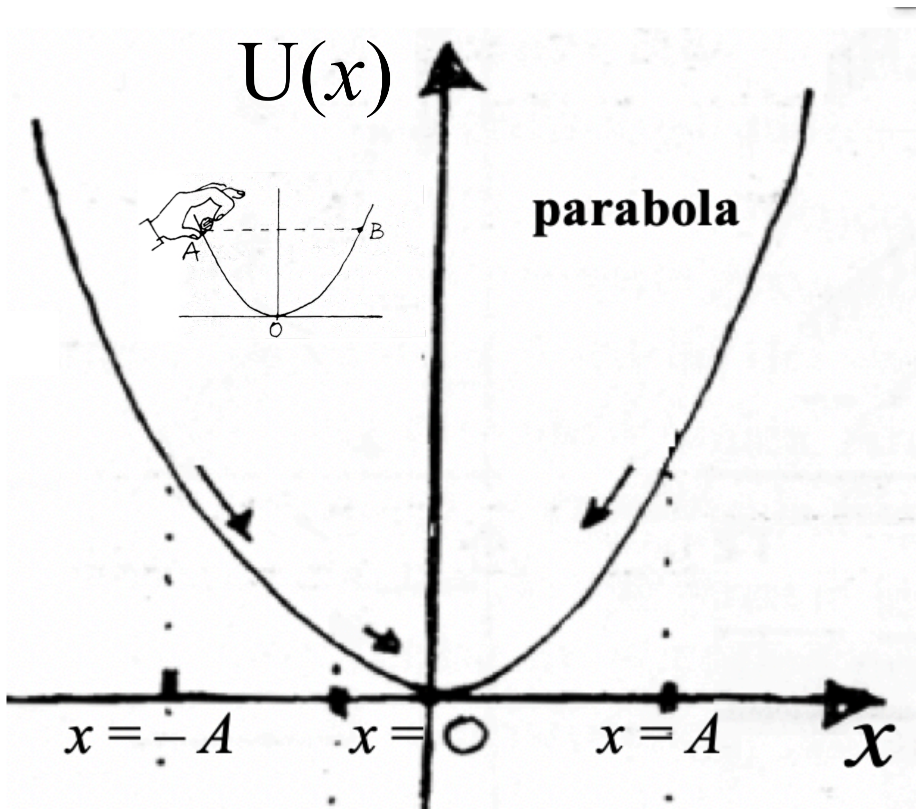
da cui, essendo (come sappiamo) il lavoro compiuto dalla forza esterna uguale alla variazione di **energia potenziale elastica** della molla, e ponendo U=0 ad x=0, avremo:

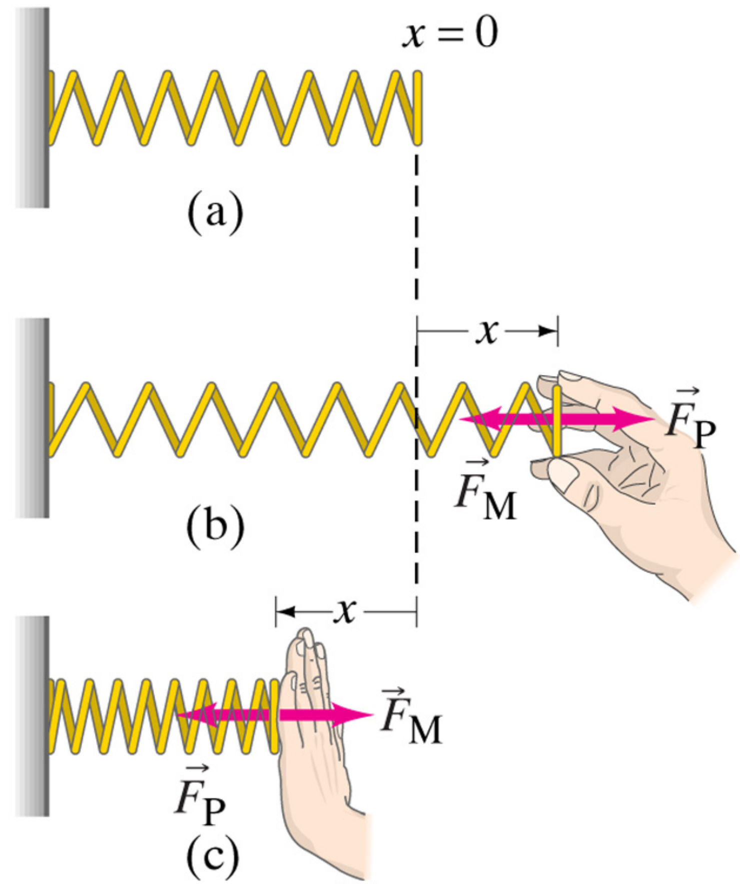
$$W_{est} = U_{el} - 0 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$



Energia Potenziale Elastica

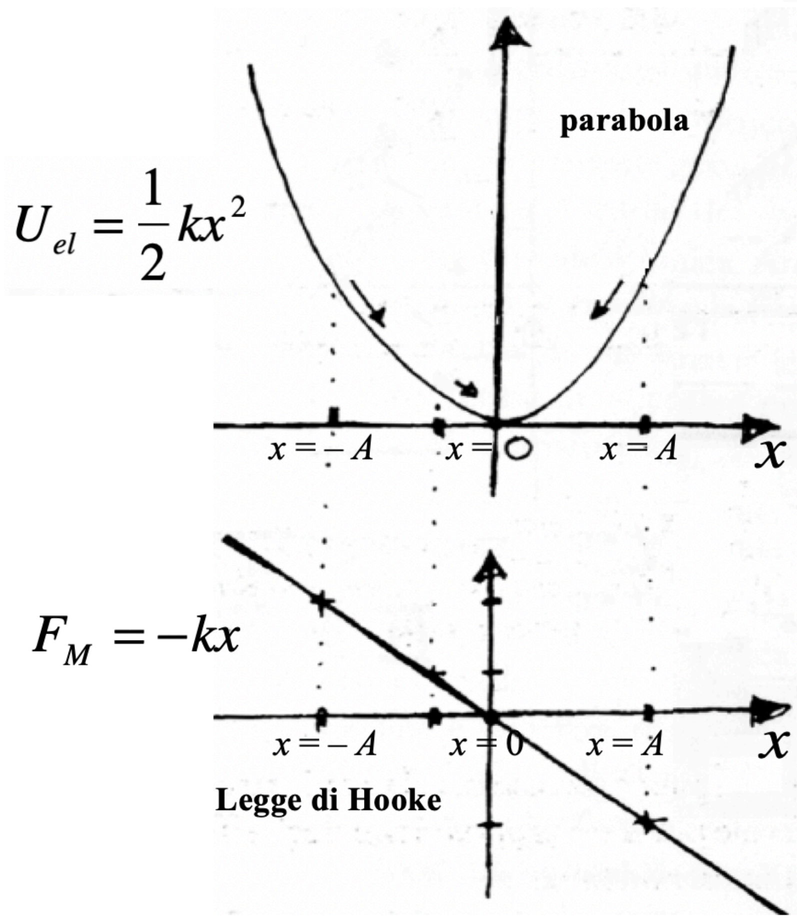
Se rappresentiamo in un grafico **l'energia potenziale elastica** U(x) in funzione dello **spostamento** x (positivo o negativo) rispetto alla posizione di equilibrio (x=0) vediamo che esso ha l'aspetto di una **parabola rovesciata**, detta anche «**buca di potenziale**», in cui una pallina immaginaria potrebbe rotolare sotto l'effetto della forza peso (vedi grafico sottostante), producendo delle oscillazioni.

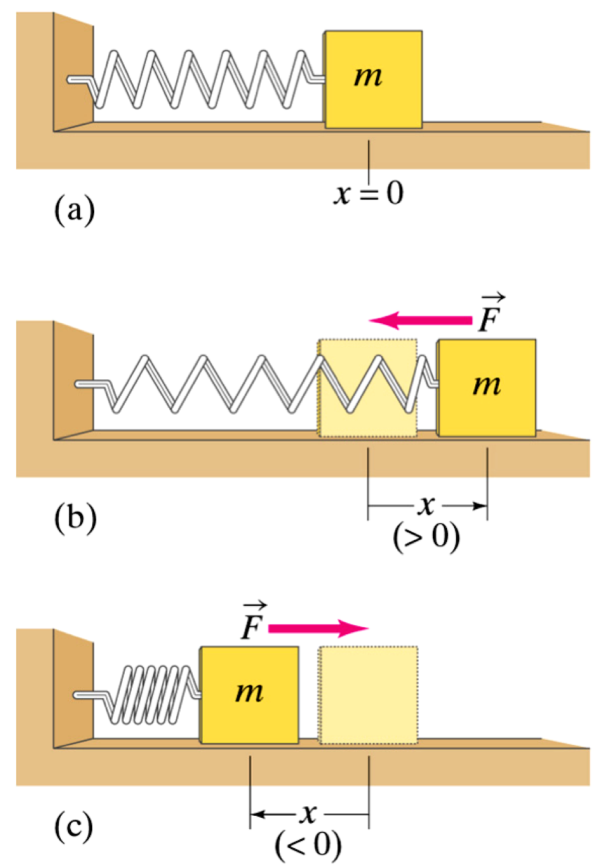




L'Oscillatore Armonico

In assenza di attriti, il principio di conservazione dell'energia si applica anche ad una **massa** m fissata all'estremità di una **molla a spirale,** sistema che viene anche detto **'oscillatore armonico'**. Infatti, sappiamo che la massa è soggetta alla **forza di richiamo** esercitata dalla molla quando quest'ultima viene compressa o allungata di una quantità x (spostamento) rispetto alla sua posizione di equilibrio. Tale forza segue la **Legge di Hooke**, F = – kx, cioè è proporzionale allo spostamento, e questo provoca un'oscillazione della massa ad essa fissata:





Energia totale di un Oscillatore Armonico

Ad ogni istante di tempo, l'energia totale dell'**oscillatore armonico** è costante e può scriversi come somma dell'energia cinetica K(t) e di quella potenziale U(t):

$$E_{TOT} = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$