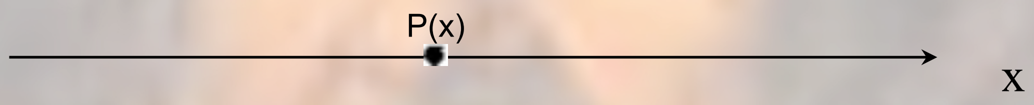
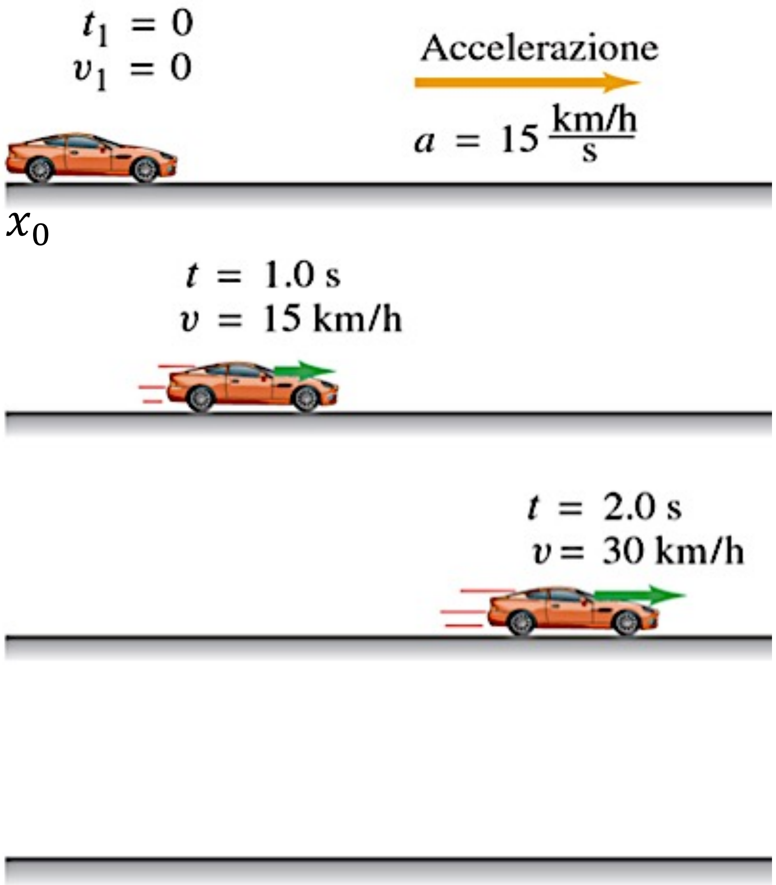
Cinematica in una dimensione

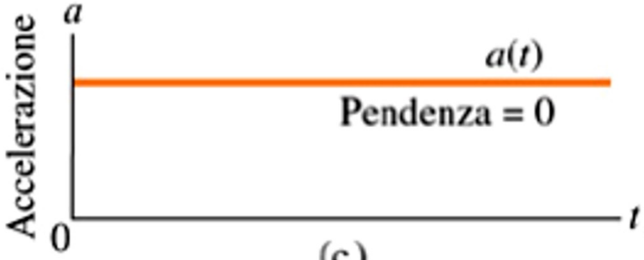
1D



Equazioni del moto uniformemente accelerato in 1D

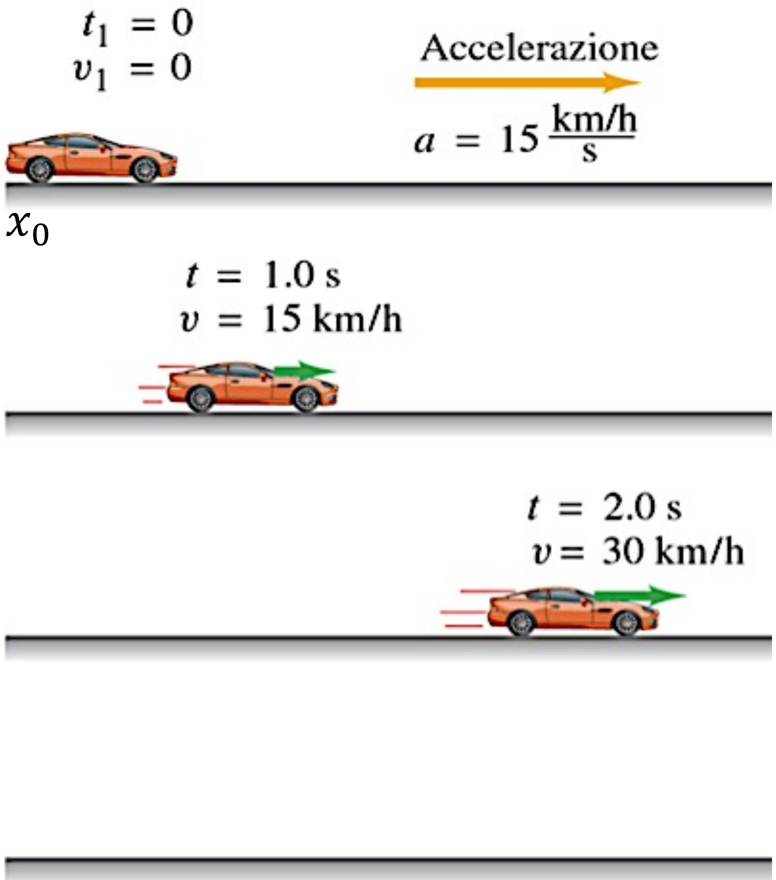


$a =$ costante



(c)

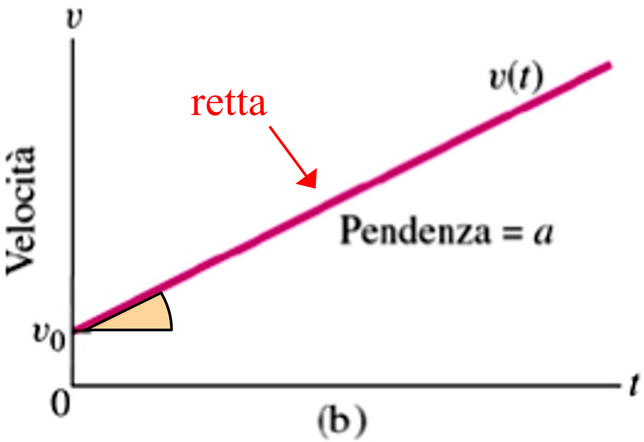
Equazioni del moto uniformemente accelerato in 1D

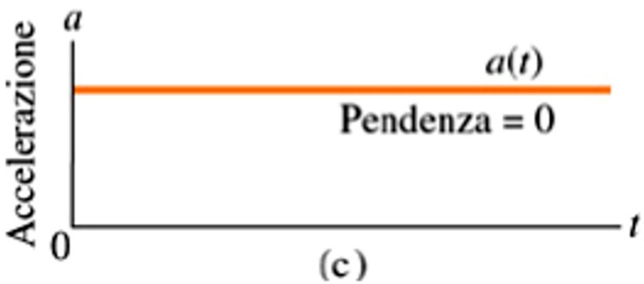


I

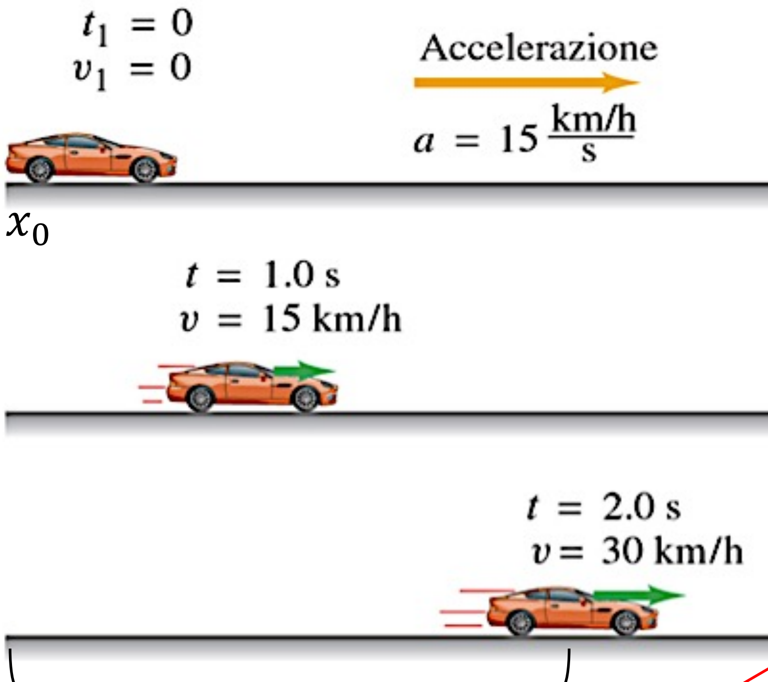
$$v = v_0 + at$$

$$a = \text{costante}$$





Equazioni del moto uniformemente accelerato in 1D



II

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

I

$$v = v_0 + at$$

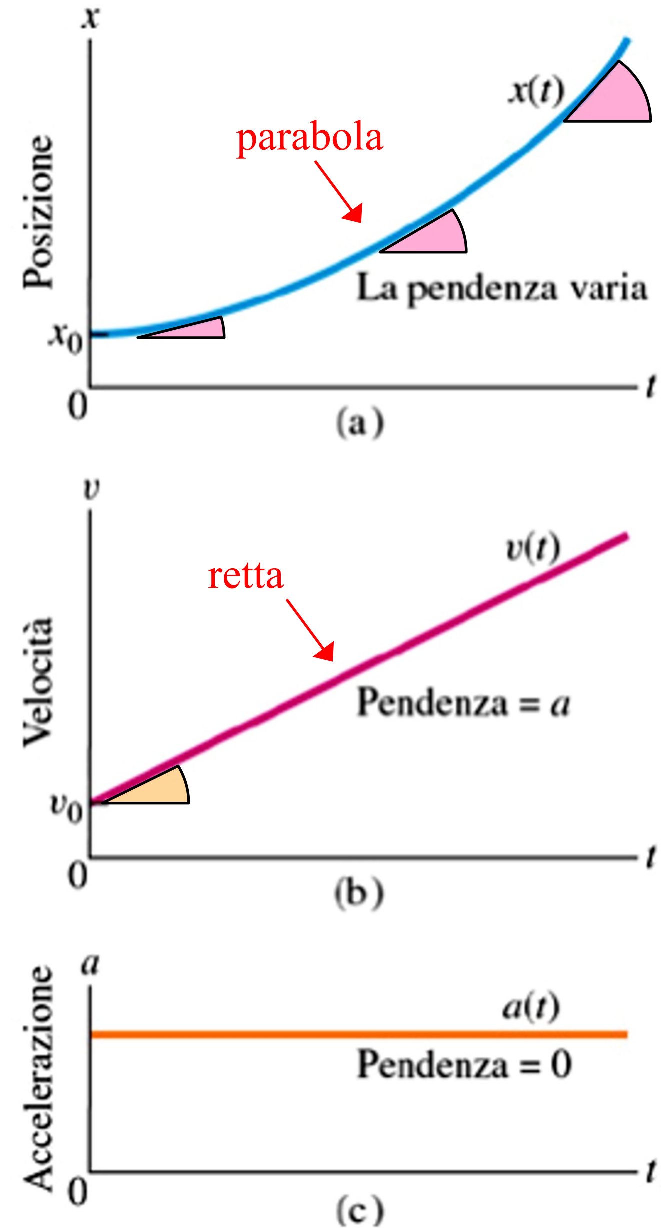
Si ricava t e si sostituisce…

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^{\ 2} + 2a(x - x_0)$$

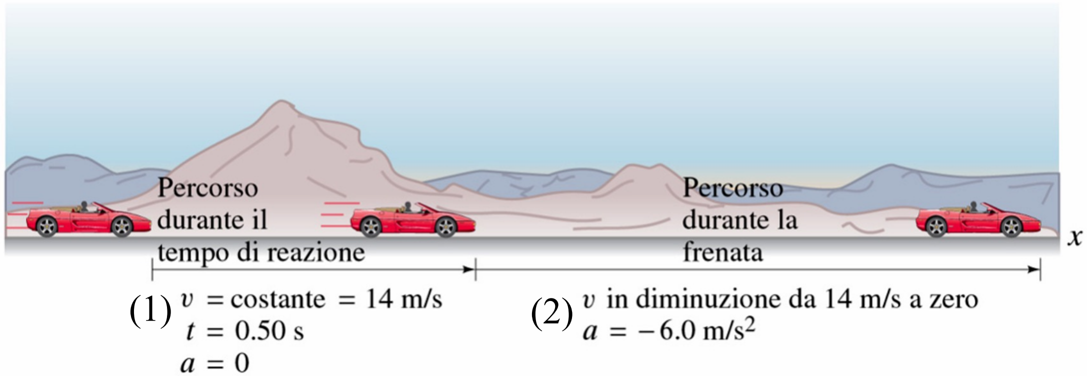
III

$$a = \text{costante}$$

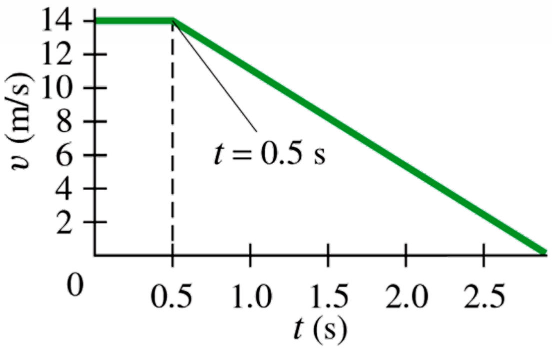


Esercizio di esempio

Determiniamo la minima distanza di frenata di un'automobile che viaggia ad una velocità costante v = 14m/s.



Distinguiamo **2 intervalli** di tempo:



(1) **Tempo di reazione**: comincia quando il guidatore decide di premere il pedale del freno e finisce quando il piede tocca il pedale. In questo intervallo, che assumiamo sia 0.50s, l'accelerazione è nulla.

(2) **Tempo di frenata**: comincia quando l'auto inizia a frenare e termina quando l'auto è completamente ferma. Assumiamo che l'accelerazione in questo intervallo sia costante e pari ad a= – 6 m/s^2.

Quale equazione scegliere per determinare lo spazio percorso durante il tempo di reazione? (il moto qui è uniforme)

(1) Dati:

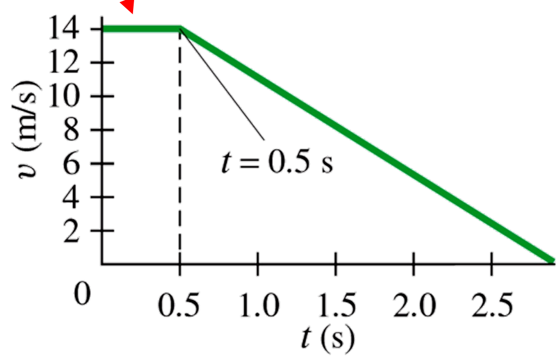
t = 0.50 s

v_0 = 14 m/s

v = 14 m/s

$a = 0$

$x_0 = 0$



- **incognita**: x
- **accelerazione nulla**: a

Equazioni del moto uniformemente accelerato (a=cost)

Grandezza mancante

(I) $v = v_0 + at$ $\longrightarrow$ $x - x_0$

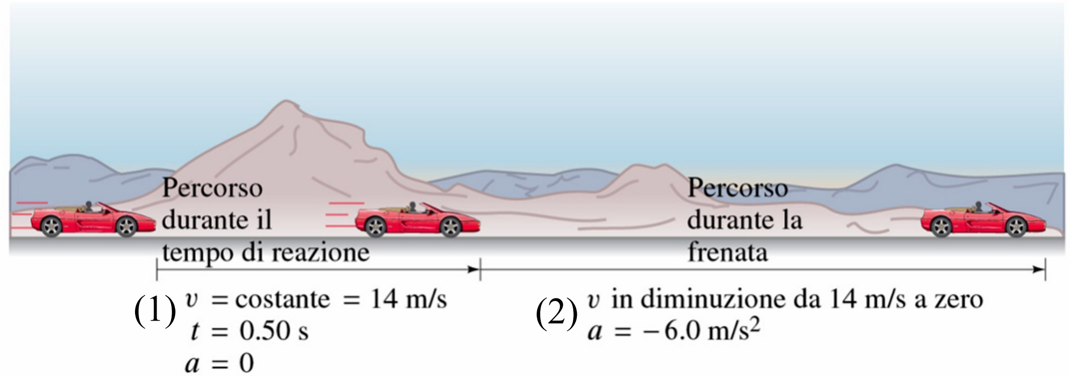
Equazione del moto uniforme

(II) $\boxed{x = x_0 + v_0 t} + \frac{1}{2}\cancel{a}t^2$ $\longrightarrow$ v

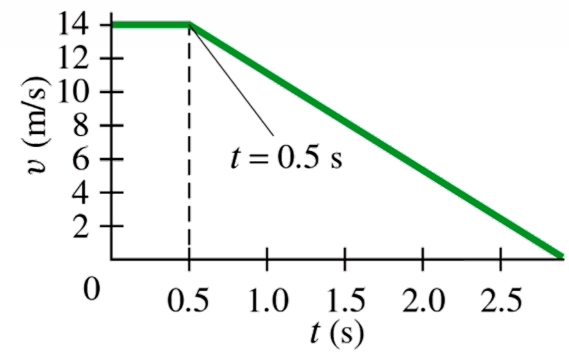
(III) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ $\longrightarrow$ t

Esercizio di esempio

Determiniamo la minima distanza di frenata di un'automobile che viaggia ad una velocità costante v = 14m/s.



Distinguiamo **2 intervalli** di tempo:



(1) **Tempo di reazione**: comincia quando il guidatore decide di premere il pedale del freno e finisce quando il piede tocca il pedale. In questo intervallo, che assumiamo sia 0.50s, l'accelerazione è nulla.

(2) **Tempo di frenata**: comincia quando l'auto inizia a frenare e termina quando l'auto è completamente ferma. Assumiamo che l'accelerazione in questo intervallo sia costante e pari ad $a = -6$ m/s^2.

Soluzione

(1) **Spazio percorso durante il tempo di reazione**: occorre utilizzare l'equazione II del moto uniformemente accelerato (con a=0 in questo caso): $x = 0 + v_0 t = (14m/s)(0.50s) = 7.0m$

(2) **Spazio totale percorso**:

(1) Dati:
t = 0.50 s
v_0 = 14 m/s
v = 14 m/s
a = 0
x_0 = 0

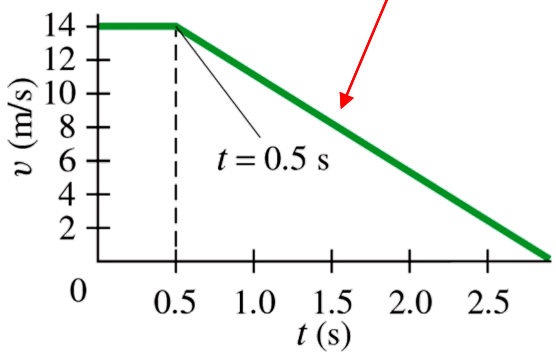
(2) Dati:
x_0 = 7.0 m
v_0 = 14 m/s
v = 0
$a = -6$ m/s^2

Incognita:
x

Quale equazione scegliere per determinare lo spazio percorso durante la decelerazione?

(2) Dati:

$x_0 = 7.0$ m
$v_0 = 14$ m/s
$v = 0$
$a = -6$ m/s^2

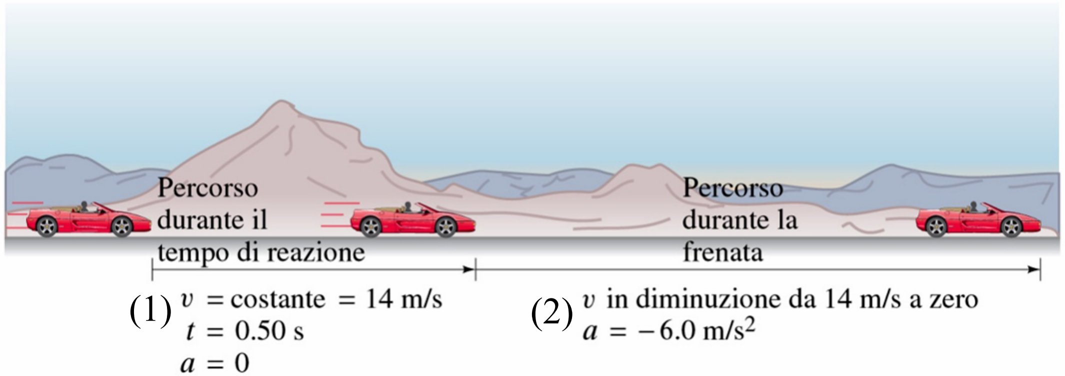


- **incognita**: x
- **grandezza mancante**: t

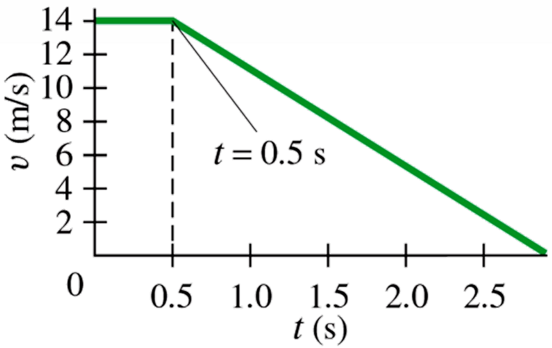
Equazioni del moto uniformemente accelerato (a=cost)		Grandezza mancante
(I) $v = v_0 + at$	$\longrightarrow$	$x - x_0$
(II) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\longrightarrow$	v
(III) $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$	$\longrightarrow$	t

Esercizio di esempio

Determiniamo la minima distanza di frenata di un'automobile che viaggia ad una velocità costante v = 14m/s.



Distinguiamo **2 intervalli** di tempo:



(1) **Tempo di reazione**: comincia quando il guidatore decide di premere il pedale del freno e finisce quando il piede tocca il pedale. In questo intervallo, che assumiamo sia 0.50s, l'accelerazione è nulla.

(2) **Tempo di frenata**: comincia quando l'auto inizia a frenare e termina quando l'auto è completamente ferma. Assumiamo che l'accelerazione in questo intervallo sia costante e pari ad a= – 6 m/s^2.

Soluzione

(1) **Spazio percorso durante il tempo di reazione**: occorre utilizzare l'equazione II del moto uniformemente accelerato (con a=0 in questo caso): $x = 0 + v_0 t = (14m/s)(0.50s) = 7.0m$

(2) **Spazio totale percorso**: dal calcolo precedente abbiamo ricavato x_0 = 7.0 m, e stavolta utilizziamo l'equazione III del moto uniformemente accelerato, risolta però rispetto ad x:

(1) **Dati:**
t = 0.50 s
v_0= 14 m/s
v = 14 m/s
a = 0
x_0 = 0

(2) **Dati:**
x_0 = 7.0 m
v_0= 14 m/s
v = 0
a = – 6 m/s^2

Incognita:
x

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = 7.0m + \frac{0-(14m/s)^2}{2(-6.0m/s^2)} = 7.0m + \frac{-196m^2/s^2}{-12m/s^2} = 7.0m + 16m = 23m$$

Dall'equazione III del moto uniformemente accelerato notiamo che la **distanza di frenata**, cioè lo spazio totale ($x - x_0$) percorso dall'auto dal momento in cui si preme il freno fino all'arresto completo del'auto, aumenta proporzionalmente al **quadrato** della velocità iniziale, ossia in maniera **non lineare**: andando a velocità doppia occorrerà quindi una distanza di frenata quattro volte maggiore, e così via...

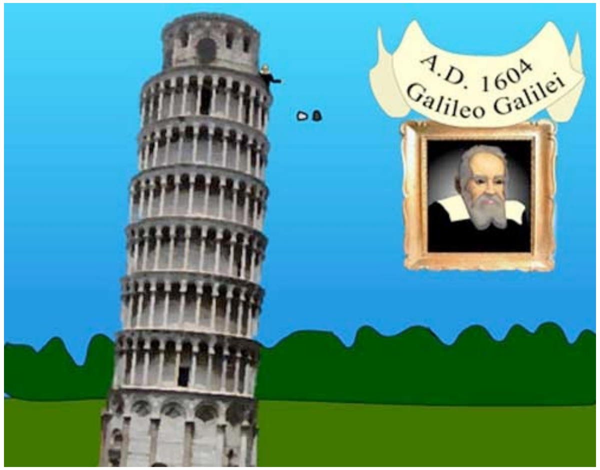
$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a(x - x_0) \longrightarrow x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^{\,2}}{2a} \xrightarrow{v=0} x - x_0 = \frac{-v_0^{\,2}}{2a}$$

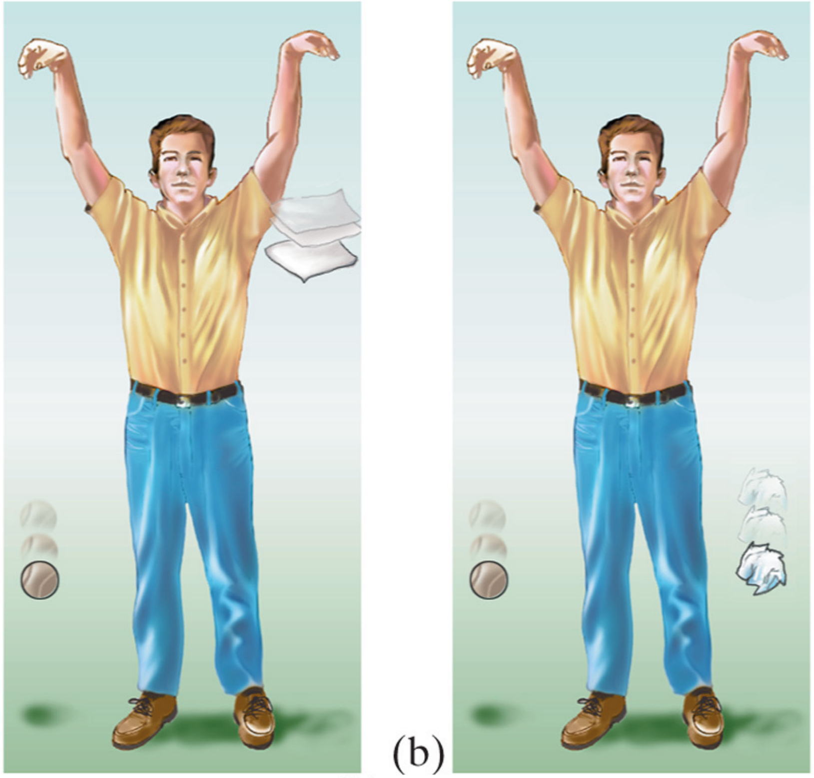
E' dunque consigliabile, per chi guida, tenerne conto per la valutazione della corretta distanza di sicurezza da tenere rispetto al veicolo che ci precede, al fine di evitare **spiacevoli "inconvenienti"**...

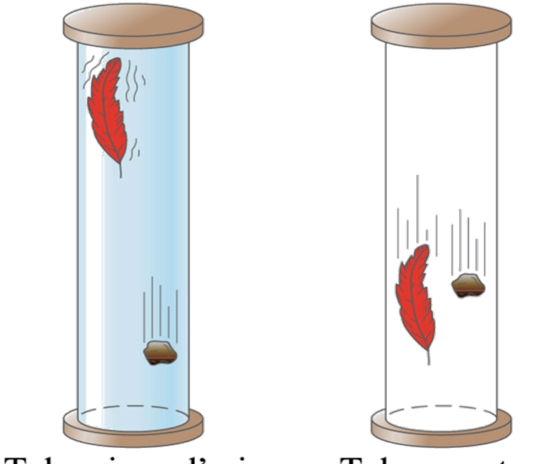
Accelerazione nel moto di caduta libera

Uno degli esempi più comuni di moto uniformemente accelerato unidimensionale è quello di un **oggetto lasciato libero di cadere in prossimità della superficie terrestre**.

Galileo fu il primo a rendersi conto che **non è vero** che gli oggetti più pesanti cadono più velocemente di quelli più leggeri e ad ipotizzare che, **in assenza di aria o di altre resistenze, tutti gli oggetti cadrebbero con la stessa accelerazione costante.**




(a) (b)

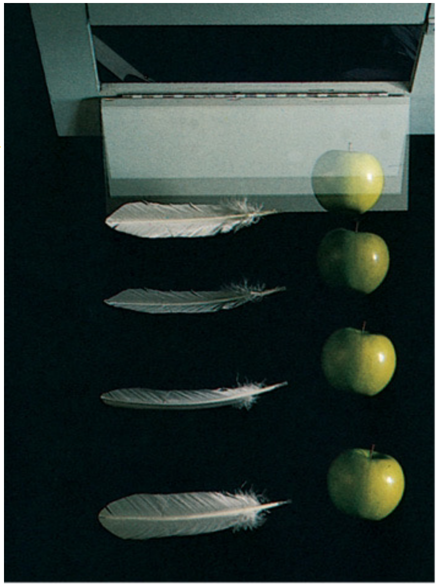


Accelerazione nel moto di caduta libera

https://www.youtube.com/watch?v=4GJg-6AHSt8

Accelerazione di Gravità g

$\vec{g}$



Da Newton in poi sappiamo che l'accelerazione costante in gioco nel moto di caduta libera è **l'accelerazione di gravità g**, che – in assenza di resistenza – è effettivamente indipendente dalle caratteristiche dell'oggetto che cade (massa, densità, forma, etc.). Al livello del mare **g = 9.8 m/s²**.

Per gli oggetti in **caduta libera** possiamo dunque utilizzare le **equazioni del moto uniformemente accelerato** tenendo conto che:

1) la direzione del moto è collocata stavolta lungo l'asse verticale y

2) l'accelerazione in caduta libera risulta *negativa* (a causa del suo verso non del suo modulo, che è ovviamente positivo) cosicchè possiamo riscrivere le equazioni I, II e III del moto uniformemente accelerato nella seguente forma:

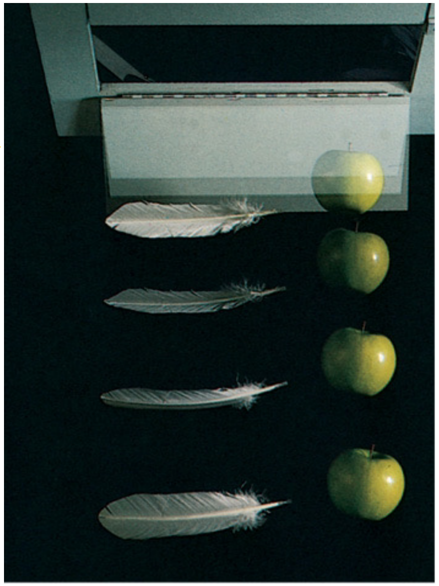
asse y

Equazioni del moto di oggetti in caduta libera (*a* = – *g* = cost)

$$I)\ \ v = v_0 - gt \qquad II)\ \ y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad III)\ \ v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

Accelerazione di Gravità g

$\vec{g}$



Da Newton in poi sappiamo che l'accelerazione costante in gioco nel moto di caduta libera è **l'accelerazione di gravità g**, che – in assenza di resistenza – è effettivamente indipendente dalle caratteristiche dell'oggetto che cade (massa, densità, forma, etc.). Al livello del mare **g = 9.8 m/s^2**.

Per gli oggetti in **caduta libera** possiamo dunque utilizzare le **equazioni del moto uniformemente accelerato** tenendo conto che:

1) la direzione del moto è collocata stavolta lungo l'asse verticale y

2) l'accelerazione in caduta libera risulta *negativa* (a causa del suo verso non del suo modulo, che è ovviamente positivo) cosicchè possiamo riscrivere le equazioni I, II e III del moto uniformemente accelerato nella seguente forma:

asse y

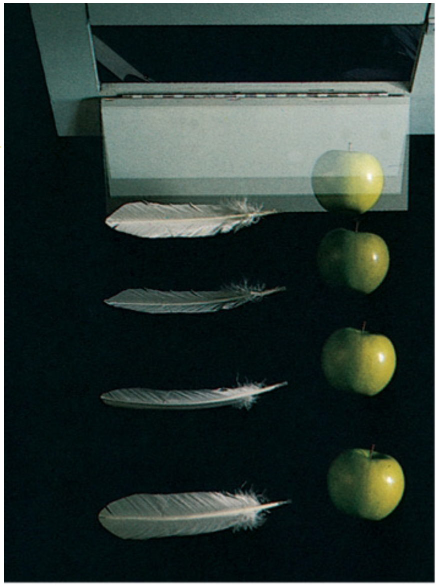
Equazioni del moto di oggetti in caduta libera (*a* = + *g* = cost)

$$I)\ \ v = v_0 + gt \qquad II)\ \ y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad III)\ \ v^2 = {v_0}^2 + 2g(y - y_0)$$

Se invece **invertiamo** il verso positivo dell'asse y in modo che quest'ultimo punti verso il basso, l'accelerazione di gravità diventa *positiva* e il segno **meno** nelle equazioni diventa nuovamente un segno **più**… negli esercizi si può ovviamente scegliere il verso che ci viene più comodo al fine di risolvere il problema che ci viene posto…

Accelerazione di Gravità g

$\vec{g}$



Da Newton in poi sappiamo che l'accelerazione costante in gioco nel moto di caduta libera è **l'accelerazione di gravità g**, che – in assenza di resistenza – è effettivamente indipendente dalle caratteristiche dell'oggetto che cade (massa, densità, forma, etc.). Al livello del mare **g = 9.8 m/s²**.

Per gli oggetti in **caduta libera** possiamo dunque utilizzare le **equazioni del moto uniformemente accelerato** tenendo conto che:

1) la direzione del moto è collocata stavolta lungo l'asse verticale y

2) l'accelerazione in caduta libera risulta *negativa* (a causa del suo verso non del suo modulo, che è ovviamente positivo) cosicchè possiamo riscrivere le equazioni I, II e III del moto uniformemente accelerato nella seguente forma:

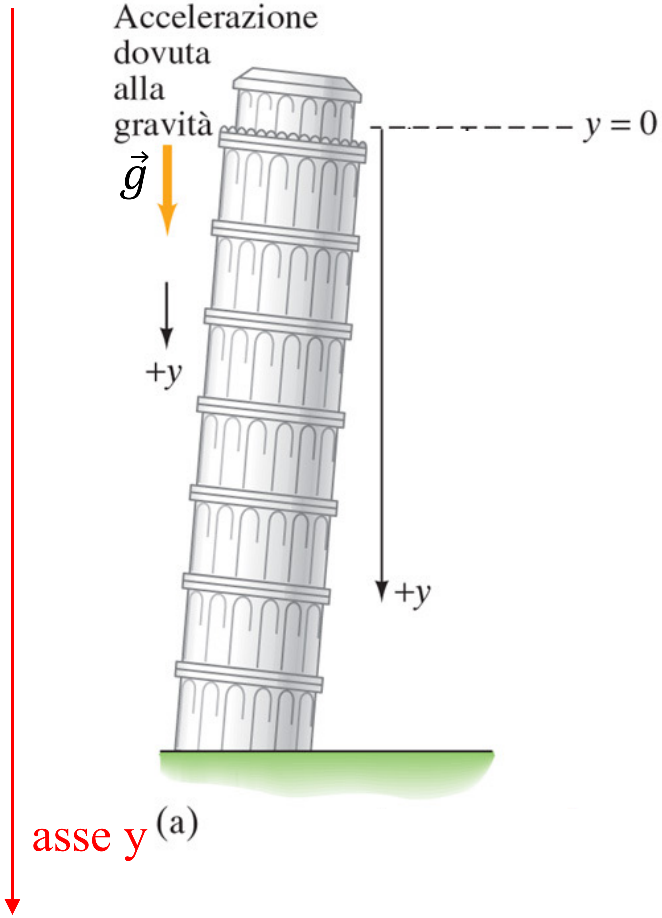
asse y

Equazioni del moto di oggetti in caduta libera (*a* = + *g* = cost)

$$I)\quad v = v_0 + gt \qquad \boxed{II)\quad y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2} \qquad III)\quad v^2 = v_0^2 + 2g(y - y_0)$$

Dalla seconda equazione si vede subito quello che già ai suoi tempi aveva dimostrato anche Galileo, utilizzando per primo lo strumento matematico, e cioè che **la distanza percorsa da un oggetto che cade ($y - y_0$) risulta** ***proporzionale al quadrato del tempo trascorso***.

Vediamone un esempio...



Esempio 1: **Caduta da una torre**

Supponiamo che una palla sia lasciata cadere (v_0=0) da una torre alta 70.0 m. Di quanto sarà caduta dopo 1.00, 2.00 e 3.00 secondi?

Assumiamo come verso positivo dell'asse y quello rivolto verso il basso (così a = g = +9.80 m/s^2). Poniamo v_0=0 e y_0=0 e utilizziamo l'**equazione II** del moto in caduta libera:

$$y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} g t^2$$

Avremo dunque, nei tre casi richiesti:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^{\,2} = \frac{1}{2}(9.80 m/s^2)(1.00 s)^2 = 4.90 m$$

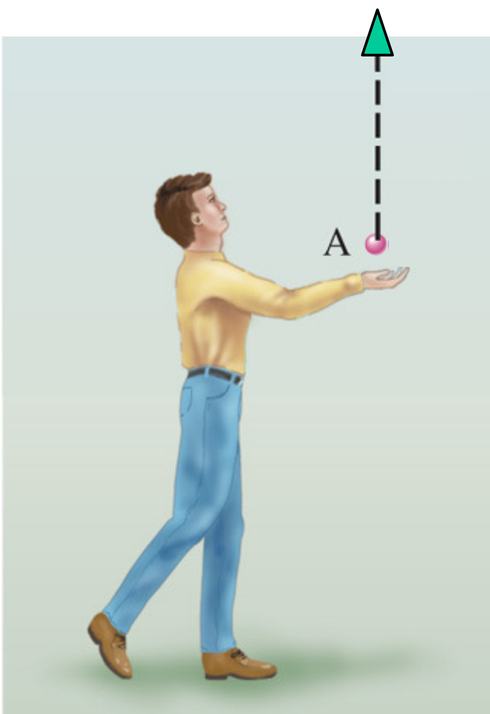
$$y_2 = \frac{1}{2} g t_2^{\,2} = \frac{1}{2}(9.80 m/s^2)(2.00 s)^2 = 19.6 m$$

$$y_3 = \frac{1}{2} g t_3^{\,2} = \frac{1}{2}(9.80 m/s^2)(3.00 s)^2 = 44.1 m$$

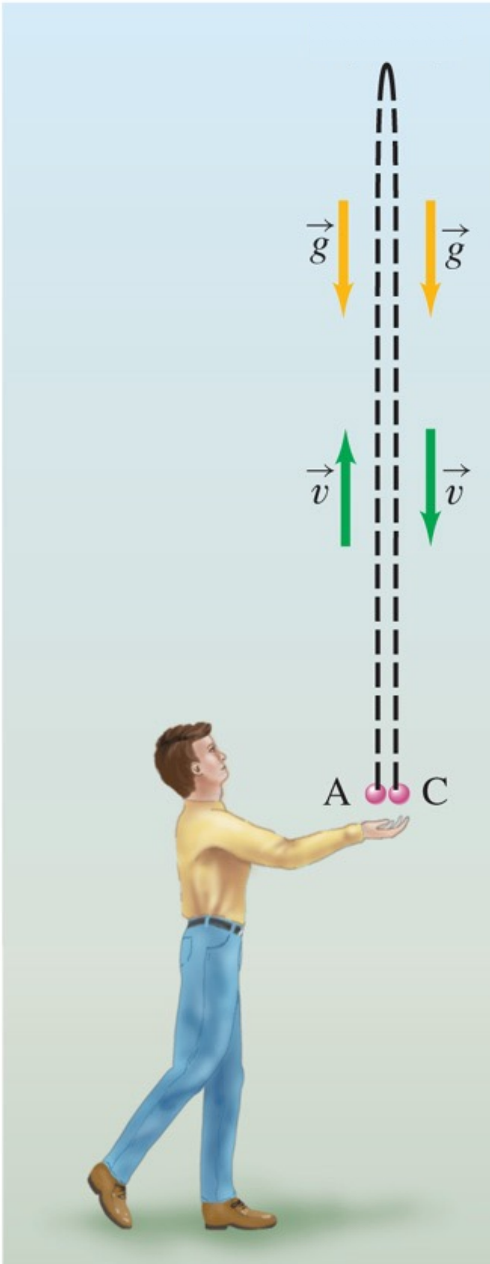
Quesito. Che valori di y avremmo trovato se invece di essere lasciata cadere (v_0=0) la palla fosse stata lanciata verso il basso con una **velocità iniziale** di v_0=3.0 m/s ? E quali sarebbero stati i **valori finali** della velocità nei tre casi richiesti? Provateci da soli….

<u>Esempio 2</u>:
Immaginiamo adesso di **lanciare un oggetto verso l'alto** e di attendere che ci ricada in mano…

<u>Sfatiamo due diffusi preconcetti</u>
(1) E' vero che l'accelerazione e la velocità hanno sempre lo stesso verso? (2) E' vero che l'oggetto lanciato verso l'alto ha accelerazione zero nel punto più elevato della sua traiettoria verticale?



Fisica

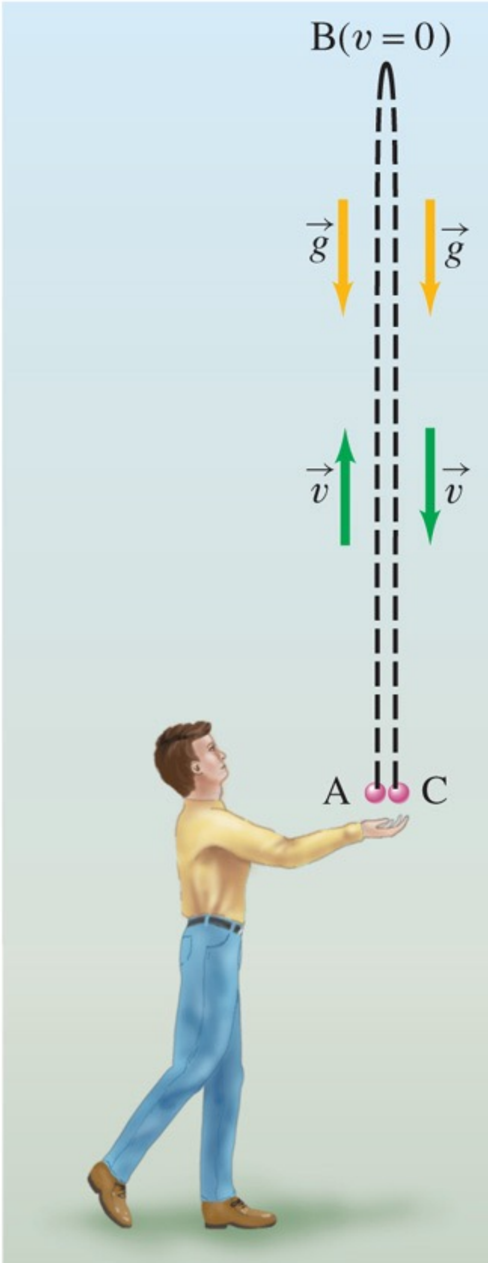


Fisica

Esempio 2:
Immaginiamo adesso di **lanciare un oggetto verso l'alto** e di attendere che ci ricada in mano…

Sfatiamo due diffusi preconcetti
(1) E' vero che l'accelerazione e la velocità hanno sempre lo stesso verso? (2) E' vero che l'oggetto lanciato verso l'alto ha accelerazione zero nel punto più elevato della sua traiettoria verticale?

(1) **Sappiamo già che non è vero** dagli esempi precedenti sulle auto che decelerano. In questo caso la situazione è quella mostrata in figura. **Ricordiamoci sempre che l'accelerazione non è l'effetto della variazione di velocità bensì la sua causa** (in quanto sempre espressione di una forza, in questo caso quella gravitazionale).



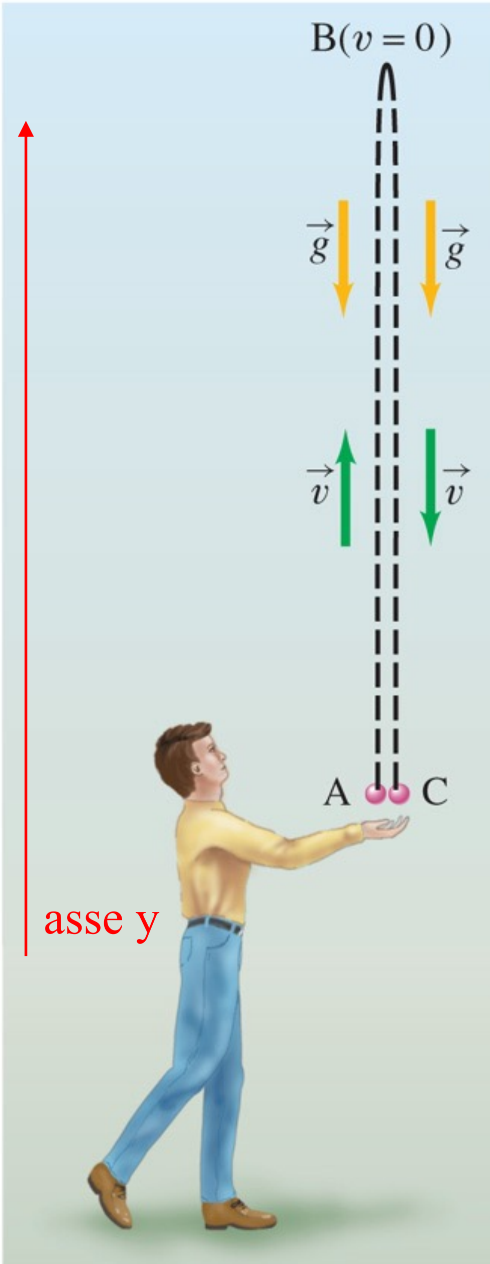
Fisica

Esempio 2:
Immaginiamo adesso di **lanciare un oggetto verso l'alto** e di attendere che ci ricada in mano…

Sfatiamo due diffusi preconcetti
(1) E' vero che l'accelerazione e la velocità hanno sempre lo stesso verso? (2) E' vero che l'oggetto lanciato verso l'alto ha accelerazione zero nel punto più elevato della sua traiettoria verticale?

(1) **Sappiamo già che non è vero** dagli esempi precedenti sulle auto che decelerano. In questo caso la situazione è quella mostrata in figura. **Ricordiamoci sempre che l'accelerazione non è l'effetto della variazione di velocità bensì la sua causa** (in quanto sempre espressione di una forza, in questo caso quella gravitazionale).

(2) **Non è vero neanche questo**: è la velocità che diventa nulla nel punto più elevato (il punto B in figura). **L'accelerazione mantiene invece sempre lo stesso modulo** pari a g, oltre che lo stesso verso. Del resto se nel punto B si avesse $a = 0$ ciò implicherebbe che l'oggetto lanciato **rimarrebbe sospeso in aria** in quel punto, non potendosi più modificare la velocità – che in quel punto, come già detto, è nulla.



Fisica

Esempio 3:
Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: **(1) quanto in alto arriva la palla;** (2) quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C).

(1) Scegliamo stavolta come verso positivo dell'asse y quello verso l'alto: l'accelerazione sarà quindi pari ad $a = - g = - 9.80$ m/s^2. Conviene adesso utilizzare l'**equazione III** del moto uniformemente accelerato di un oggetto sottoposto alla sola accelerazione di gravità:

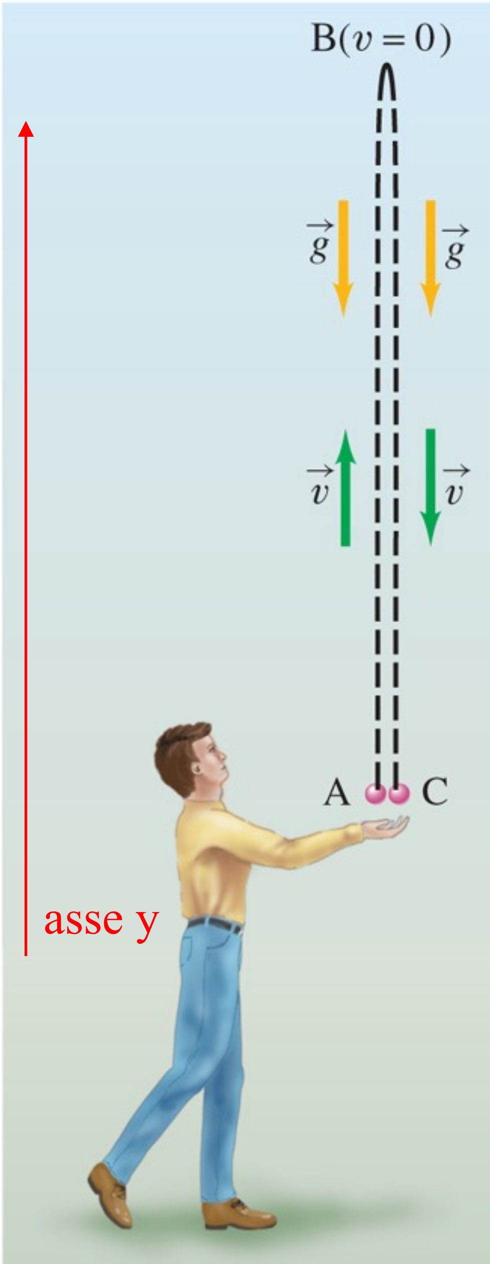
$$v^2 = v_0^{\ 2} - 2g(y - y_0)$$

dove sappiamo che $y_0 = 0$, $v_0 = 15.0$m/s e $v = 0$ (nel punto B), mentre l'incognita è y.

Risolviamo dunque l'equazione rispetto ad y e sostituiamo:

$$y = \frac{v^2 - v_0^{\ 2}}{-2g} = \frac{0 - (15m/s)^2}{-2(9.8m/s^2)} = 11.5m$$

Quindi nel punto B la palla raggiunge un'altezza di 11.5m al di sopra della mano.



Fisica

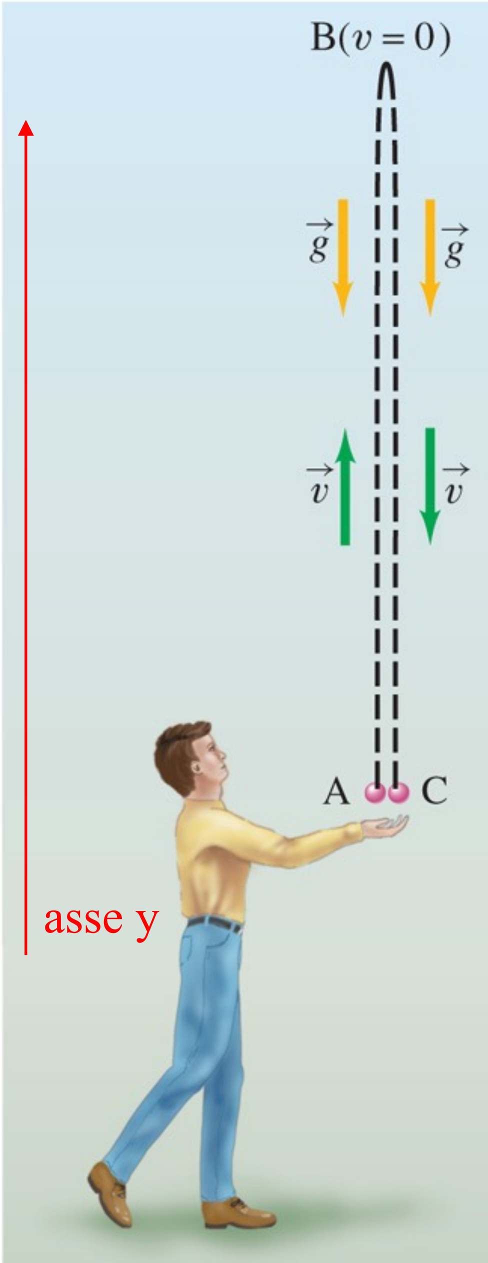
Esempio 3:
Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: (1) quanto in alto arriva la palla; (2) **quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C)**.

(2) Al secondo punto si può rispondere seguendo **due procedimenti diversi**. Potremmo ad esempio iniziare calcolando l'intervallo di tempo tra il momento del lancio (t = 0, v_0 = 15m/s) e il momento in cui la palla raggiunge il punto B (y_B = 11.5m e v = 0). La nostra incognita è in questo caso il tempo t , che possiamo agevolmente ricavare dall'**equazione I** del moto di oggetti in caduta libera:

$$v = v_0 - gt \quad \rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{-g} = \frac{0 - 15m/s}{-9.80m/s^2} = 1.53s$$

...da cui, moltiplicando per due, si ricava il tempo totale in cui resta in aria la palla prima di ritornare in mano al lanciatore:

$$t = 1.53s \cdot 2 = 3.06s$$



Fisica

Esempio 3:
Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: (1) quanto in alto arriva la palla; (2) **quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C)**.

(2) **In alternativa**, potremmo invece considerare l'intervallo di tempo per l'intero moto da A a B e poi di nuovo a C in un unico passaggio usando **l'equazione II** del moto di oggetti in caduta libera, dato che y rappresenta la posizione della palla e non la distanza da essa percorsa. Essendo nei punti A e C y = 0, avremo allora:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 0 = 0 + (15 m/s)t - \frac{1}{2}(9.80 m/s^2)t^2$$

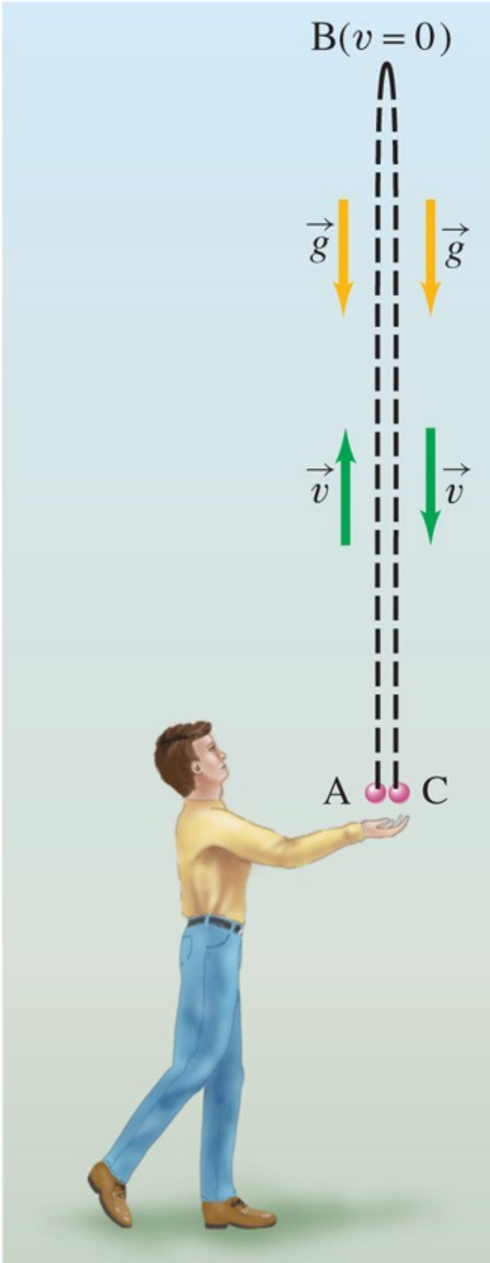
...che è un'equazione di secondo grado (incompleta 'spuria', del tipo bx + ax^2 = 0 → (b + ax) x = 0) e che dunque, raccogliendo t, possiamo riscrivere come:

$$\rightarrow \quad (15 m/s - 4.90 m/s^2 \cdot t)t = 0$$

Dalla legge di annullamento del prodotto si ricavano dunque le due soluzioni:

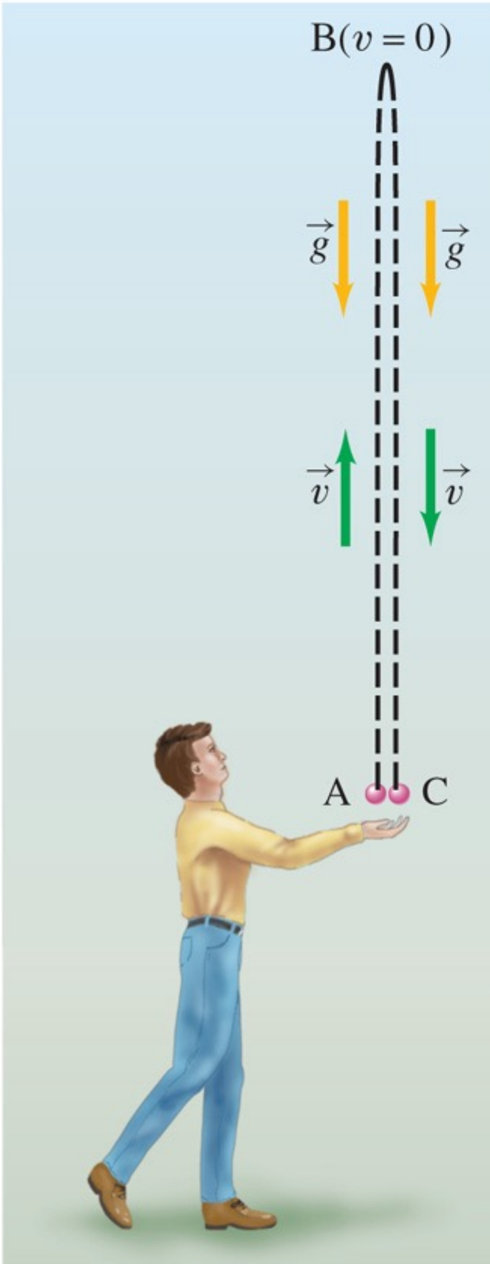
$\rightarrow \quad t_1 = 0$ che corrisponde al punto iniziale A

$\rightarrow \quad t_2 = \dfrac{15.0 m/s}{4.90 m/s^2} = 3.06 s$ che corrisponde al punto finale C e che è quindi quella cercata!

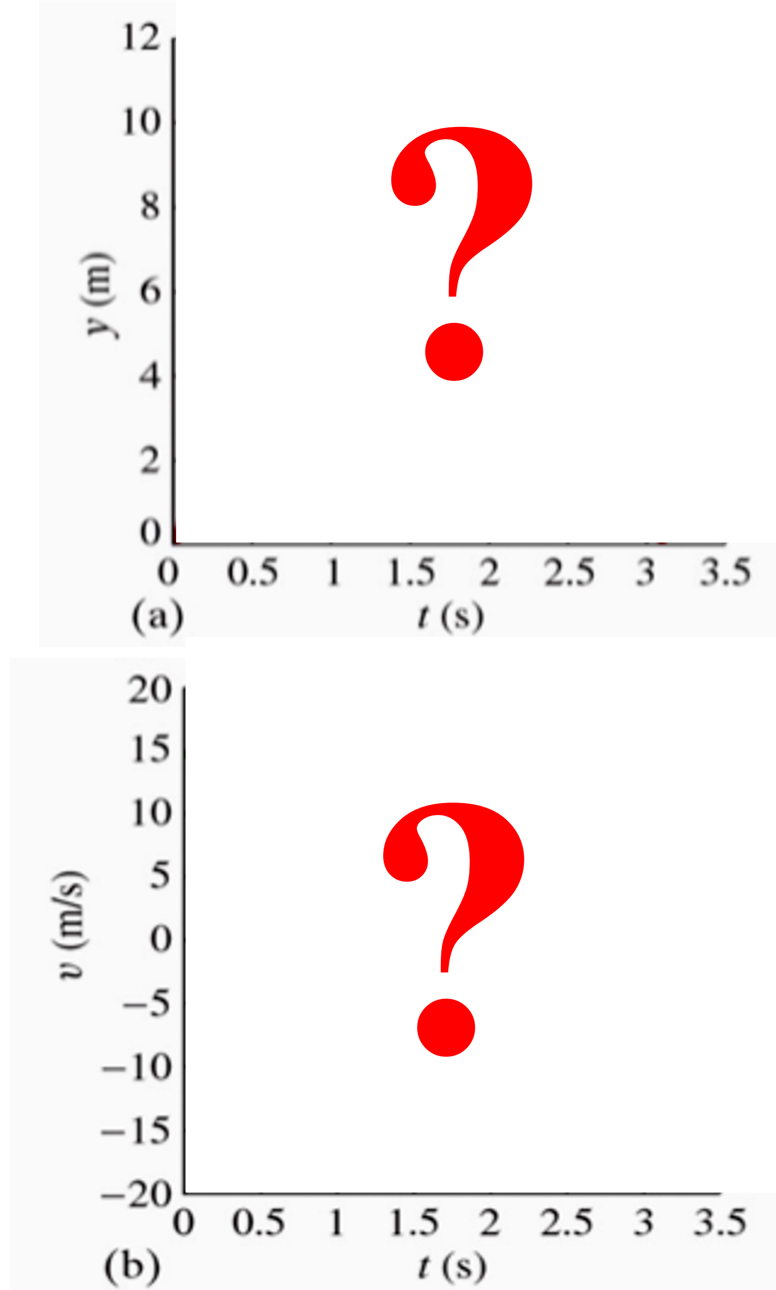


Fisica

Proviamo a disegnare il diagramma orario e il diagramma della velocità relativi all'esempio appena visto…



Fisica



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana