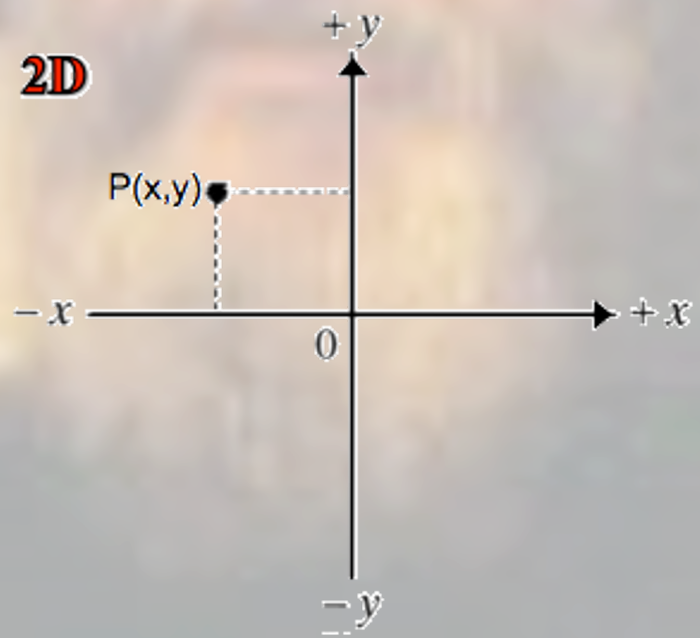
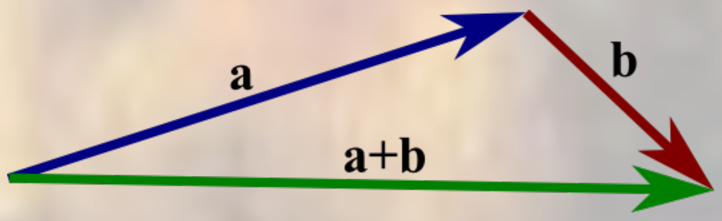
VERSO LA CINEMATICA in 2D…



I Vettori



Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

dopodiché avremo che le componenti V_x e V_y del **vettore risultante**, incognito, saranno uguali – rispettivamente – alla somma (**algebrica**, trattandosi di scalari – anche negativi) delle componenti x e y dei due vettori originari:

Rappresentazione cartesiana del vettore risultante

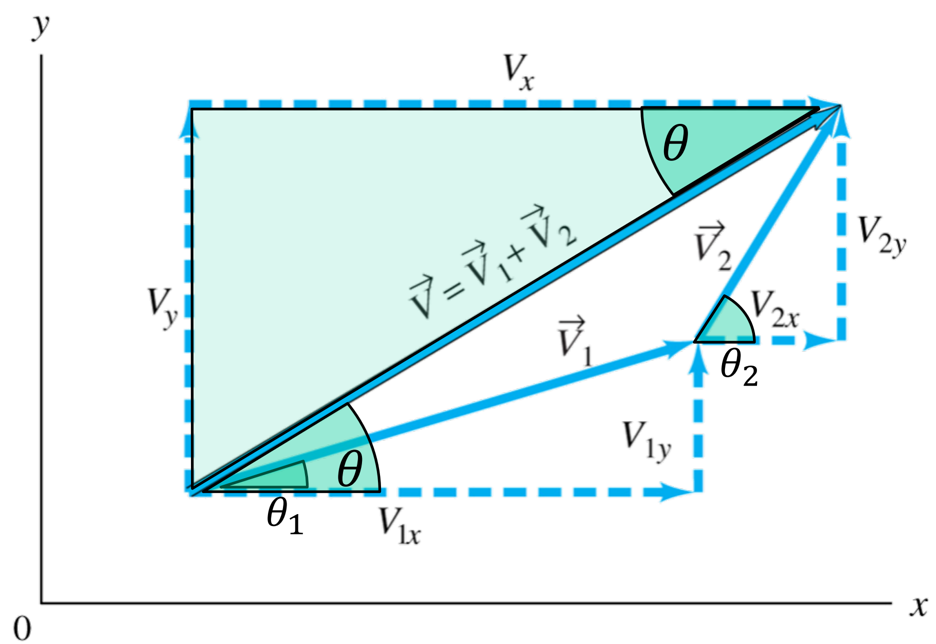
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$

da cui si possono poi ottenere modulo e direzione del **vettore risultante** per mezzo delle seguenti trasformazioni:

Rappresentazione polare del vettore risultante

$$V = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2}}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$

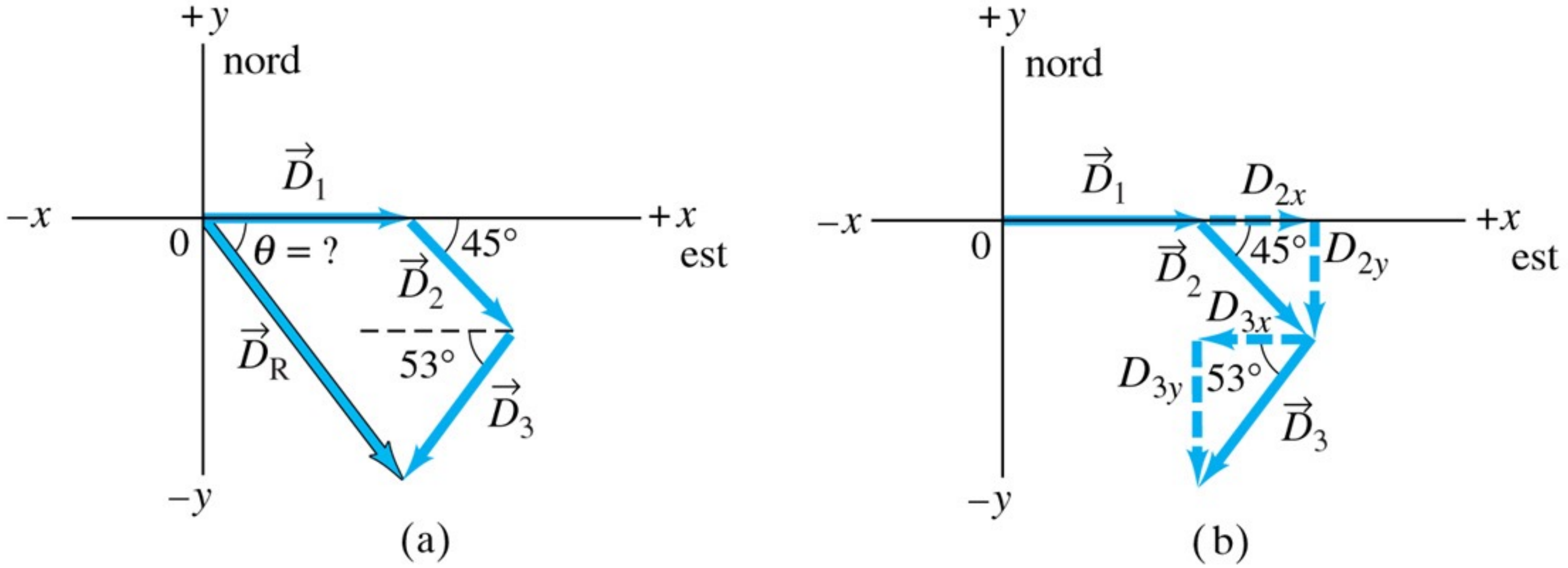


Esercizio

Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

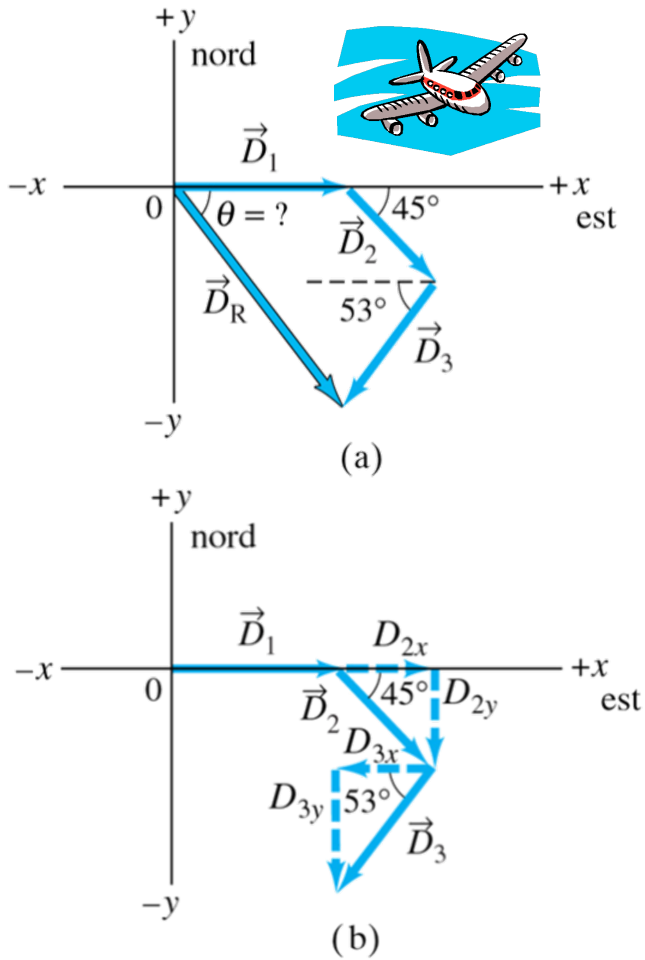
Avvertenza

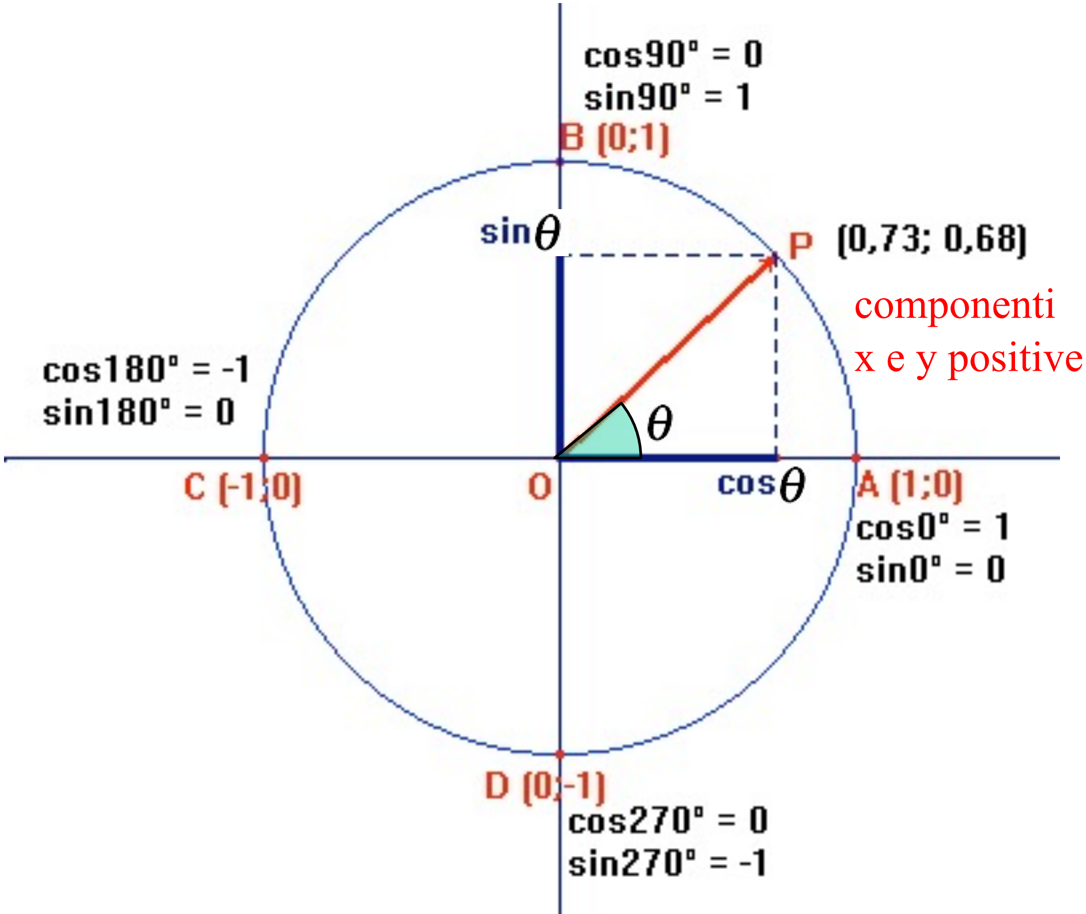
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

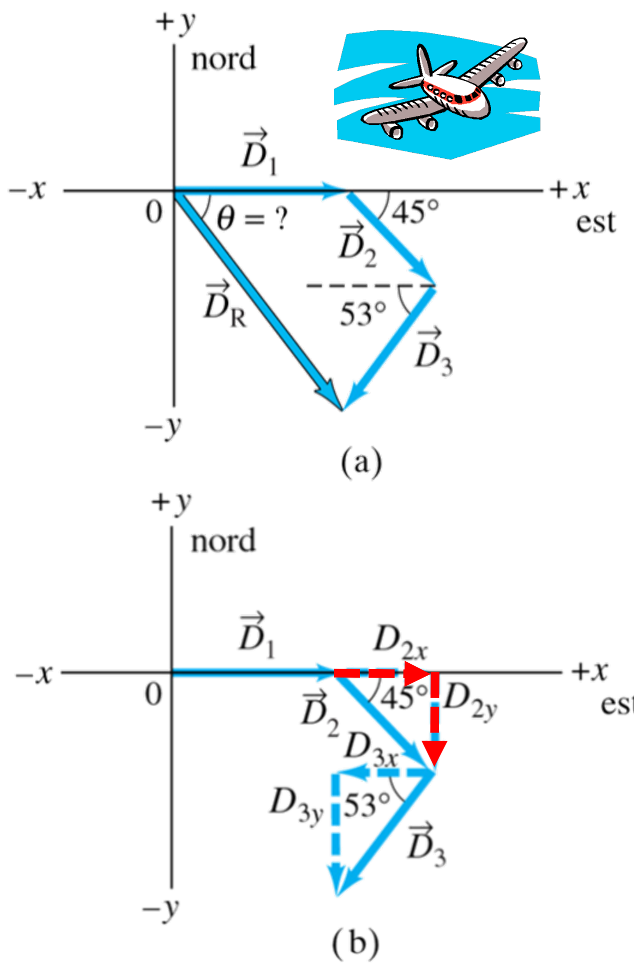
Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

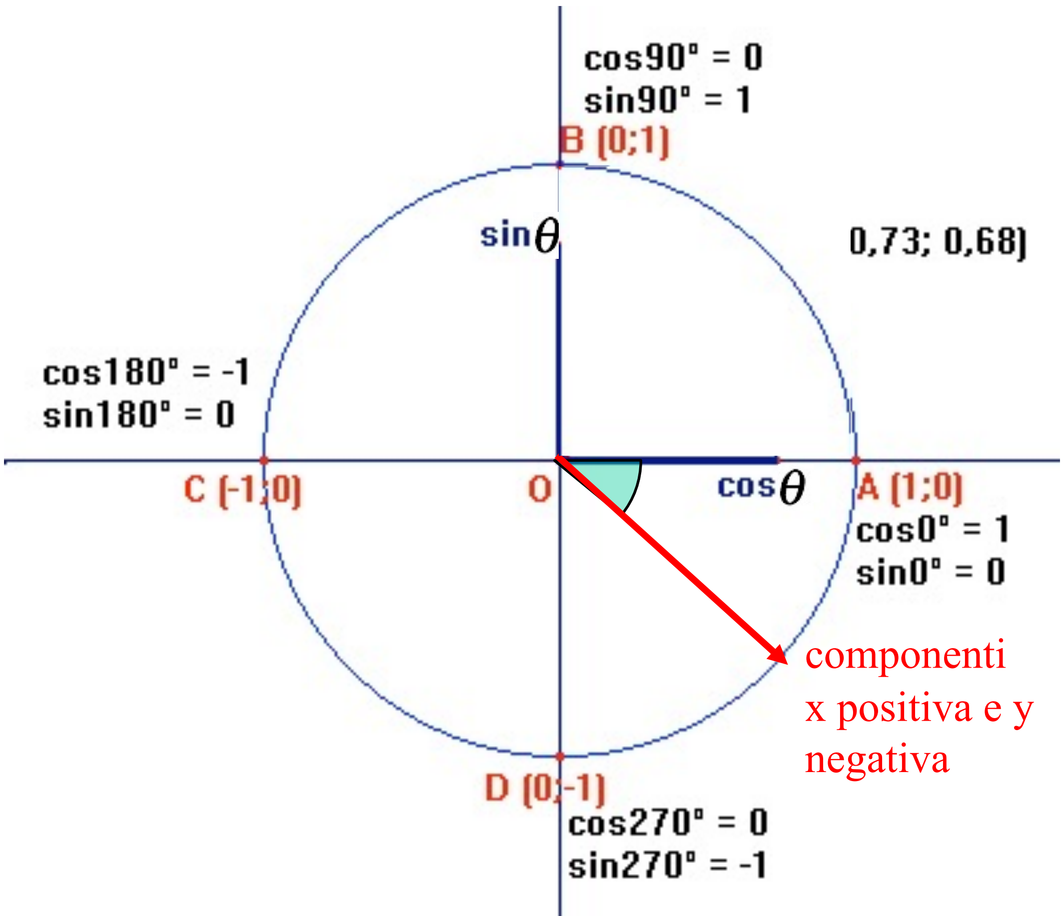




Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

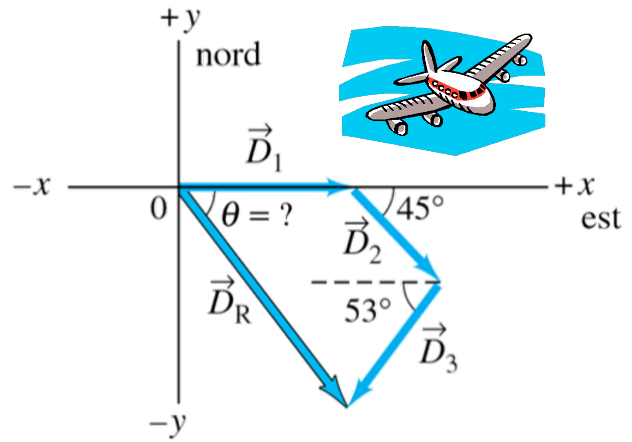
Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



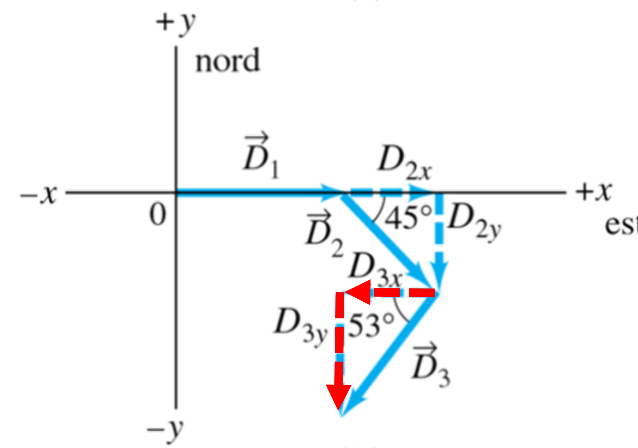


Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

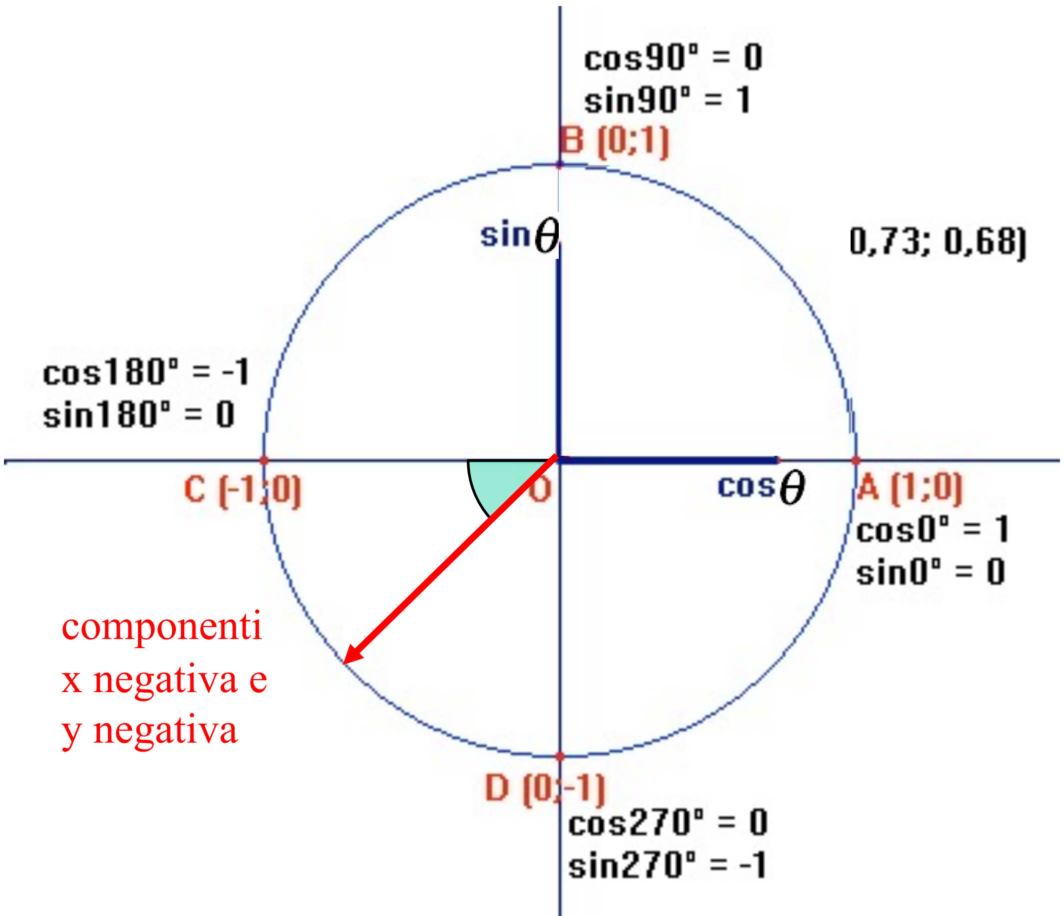
Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)

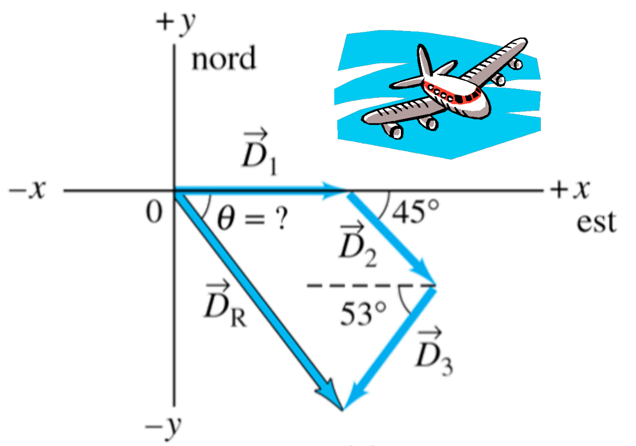


(b)



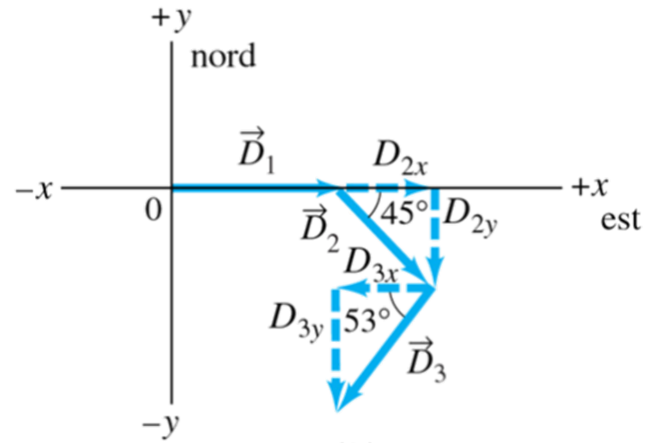
componenti
x negativa e
y negativa

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

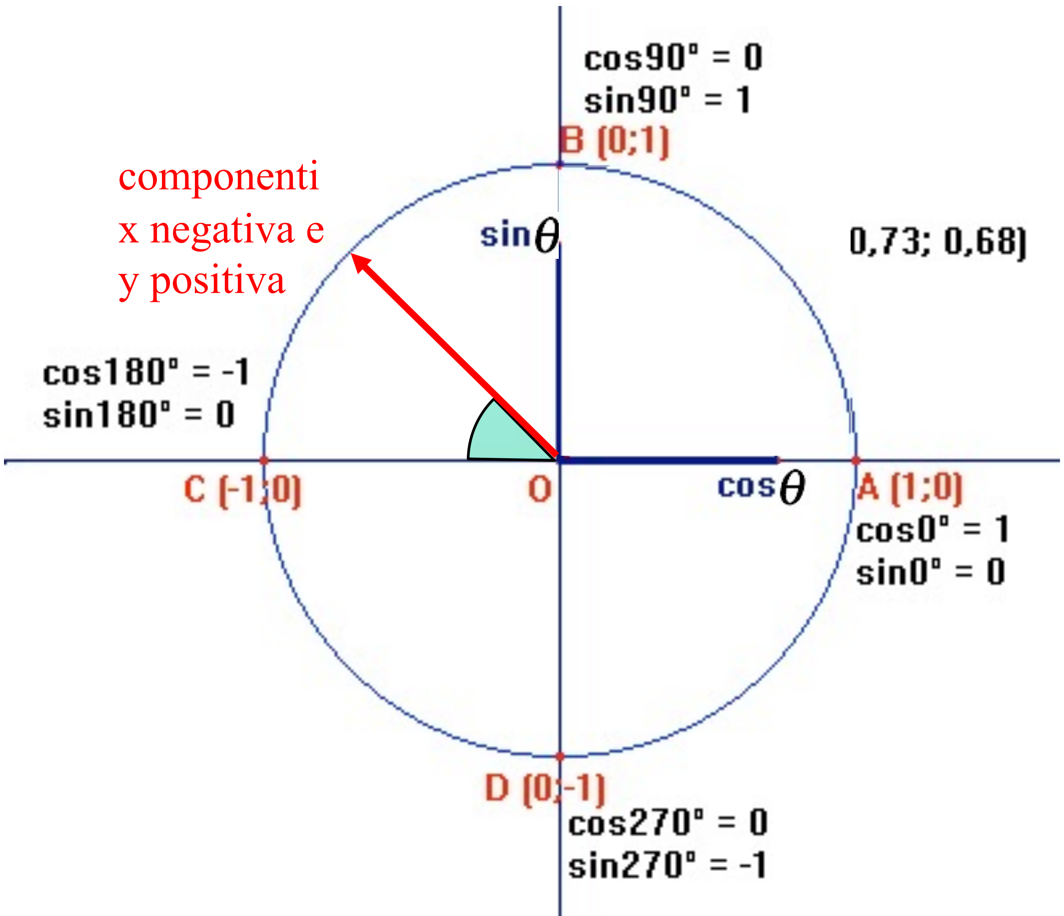


(a)

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



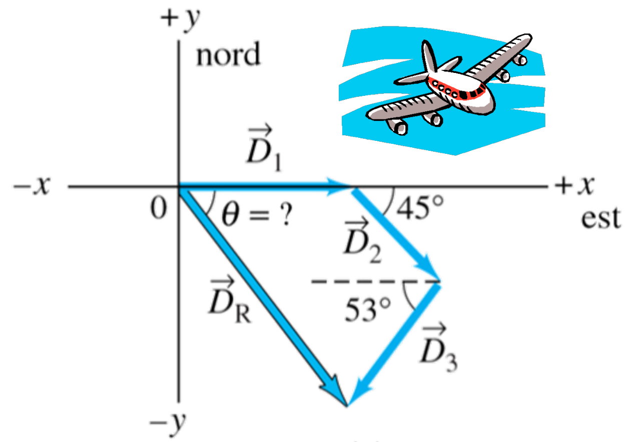
(b)



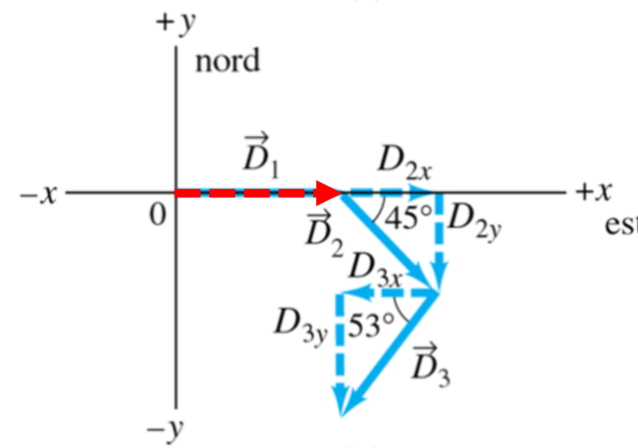
Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$



(a)



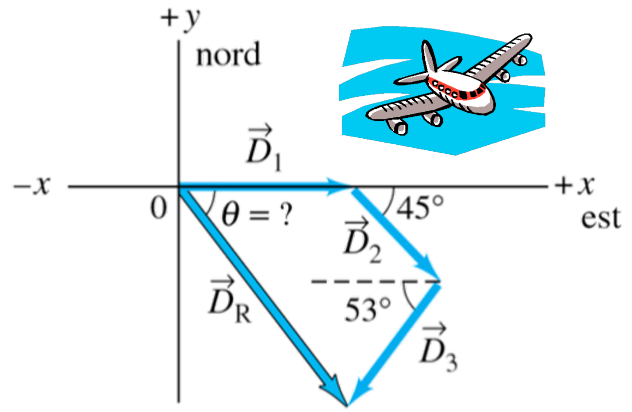
(b)

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

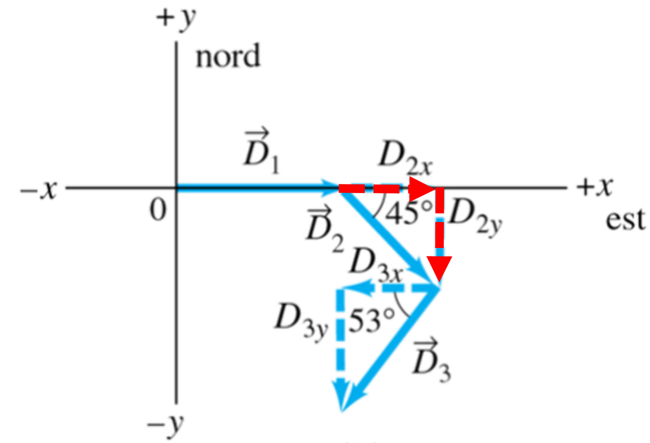
Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440 km)(0.707) = 311 km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440 km)(0.707) = -311 km \end{cases}$$



(a)



(b)

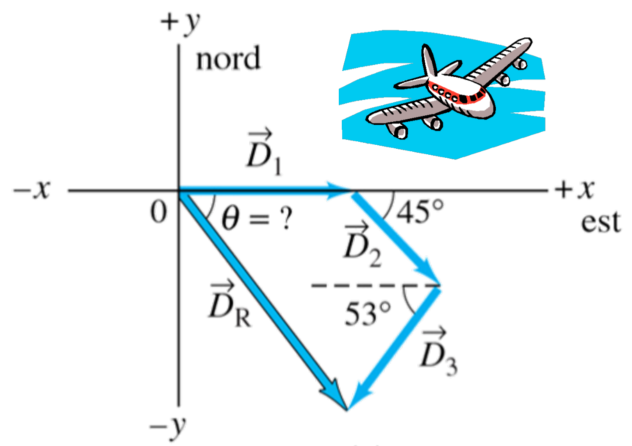
Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

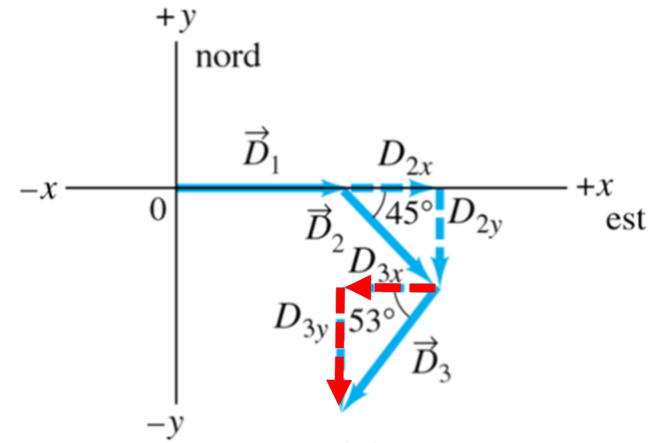
$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440 km)(0.707) = 311 km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440 km)(0.707) = -311 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_3 \begin{cases} D_{3x} = -D_3 \cos 53° = -(550 km)(0.602) = -331 km \\ D_{3y} = -D_3 sen 53° = -(550 km)(0.799) = -439 km \end{cases}$$



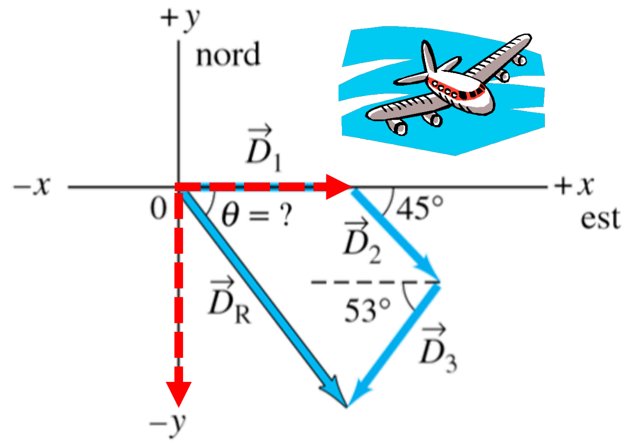
(a)



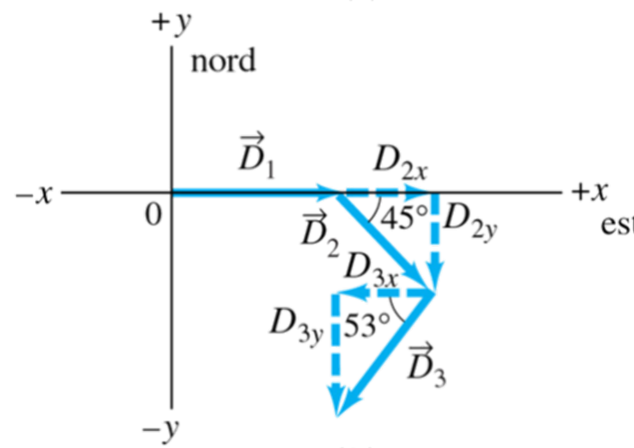
(b)

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)



(b)

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440km)(0.707) = 311km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440km)(0.707) = -311km \end{cases}$$

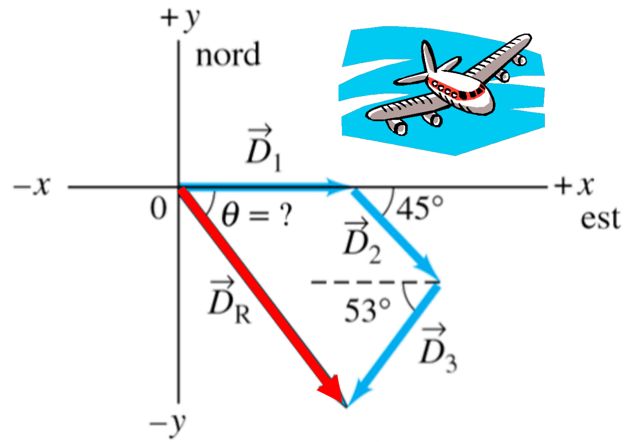
$$\vec{D}_3 \begin{cases} D_{3x} = -D_3 \cos 53° = -(550km)(0.602) = -331km \\ D_{3y} = -D_3 sen 53° = -(550km)(0.799) = -439km \end{cases}$$

Rappresentazione Cartesiana del vettore risultante

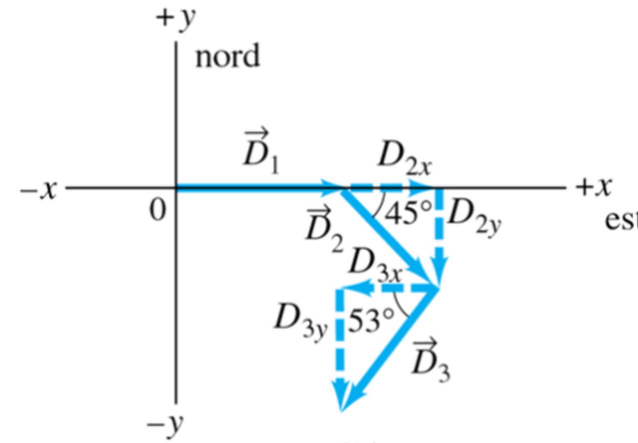
$$\rightarrow \vec{D}_R \begin{cases} D_{Rx} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 620km + 311km - 331km = 600km \\ D_{Ry} = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 0km - 311km - 439km = -750km \end{cases}$$

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta verso est per 620 km; la seconda tratta è diretta verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km; la terza a 53° sud rispetto ad ovest per 550 km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)



(b)

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440km)(0.707) = 311km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440km)(0.707) = -311km \end{cases}$$

$$\vec{D}_3 \begin{cases} D_{3x} = -D_3 \cos 53° = -(550km)(0.602) = -331km \\ D_{3y} = -D_3 sen 53° = -(550km)(0.799) = -439km \end{cases}$$

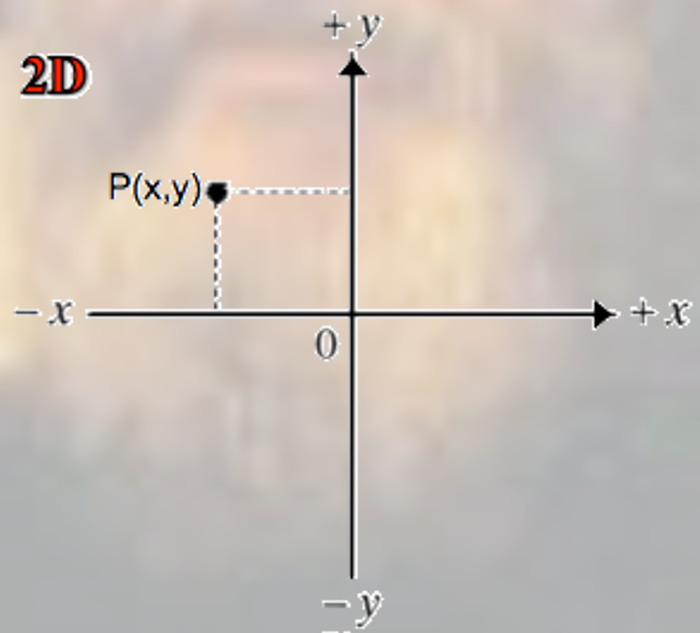
Rappresentazione Cartesiana del vettore risultante $\rightarrow \vec{D}_R$

$$\begin{cases} D_{Rx} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 620km + 311km - 331km = 600km \\ D_{Ry} = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 0km - 311km - 439km = -750km \end{cases}$$

Rappresentazione Polare del vettore risultante $\rightarrow \vec{D}_R$

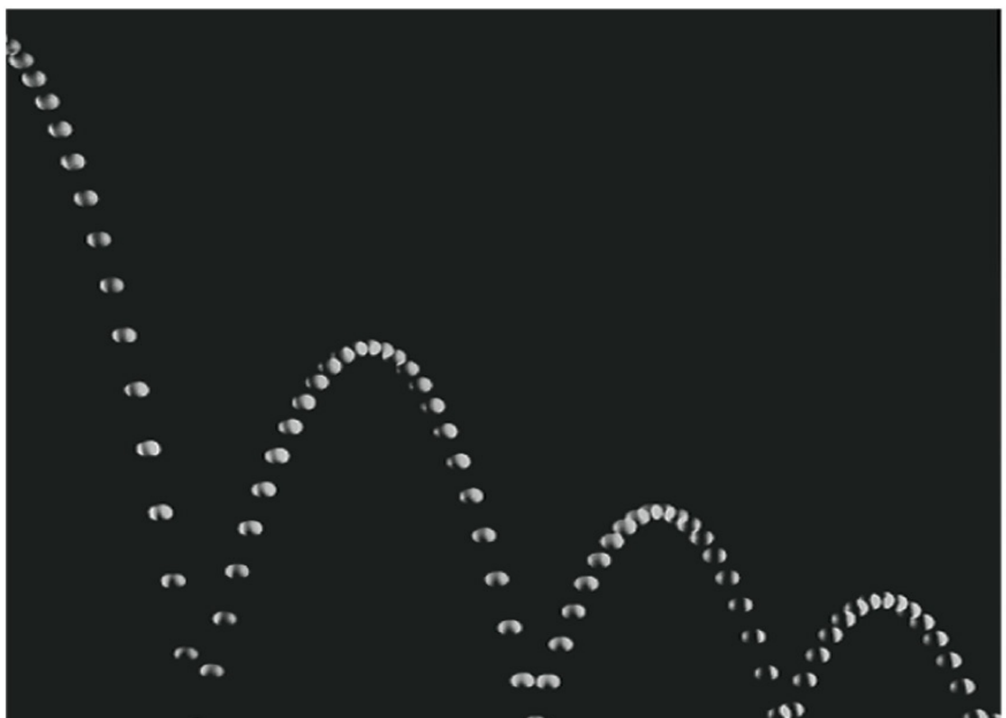
$$\begin{cases} D_R = \sqrt{D_{Rx}^2 + D_{Ry}^2} = \sqrt{(600)^2 + (-750)^2}\,km = 960km \\ tg\theta = \dfrac{D_{Ry}}{D_{Rx}} = \dfrac{-750km}{600km} = -1.25 \rightarrow \theta = arctg(-1.25) = -51° \end{cases}$$

LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI



Moto di un proiettile in due dimensioni

Generalizzando i risultati trovati per il moto unidimensionale uniformemente accelerato, esaminiamo adesso il moto di oggetti (palloni calciati, palline da golf, palle da baseball, pallottole, etc...) che si muovono in *due dimensioni* in prossimità della superficie terrestre: si tratta di esempi che possono essere tutti ricondotti al cosiddetto «**moto di un proiettile» in due dimensioni**. Trascureremo la resistenza dell'aria e considereremo il moto degli oggetti solo **dopo** che sono stati lanciati, cioè mentre si muovono sotto il solo effetto dell'**accelerazione di gravità** che, come sappiamo è sempre diretta verso il basso e ha modulo pari a $g=9.80\ m/s^2$.

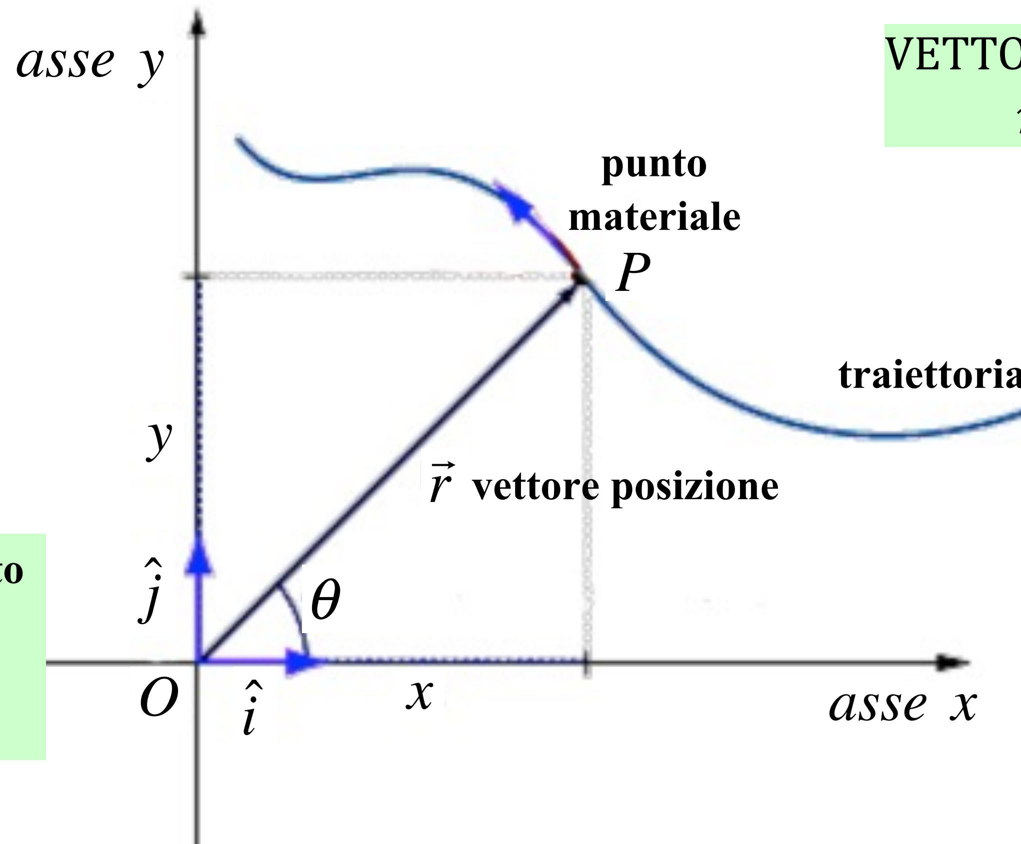


Il vettore Posizione in due dimensioni

In due dimensioni diventa importante il «**vettore posizione**», la cui coda è situata sempre nell'origine del sistema di riferimento considerato mentre la punta indica, appunto, la posizione del punto materiale in movimento lungo la traiettoria. I moduli delle **componenti** del vettore posizione saranno quindi le **coordinate *x* e *y* del punto materiale** nel sistema di riferimento scelto.

VETTORE POSIZIONE

$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$



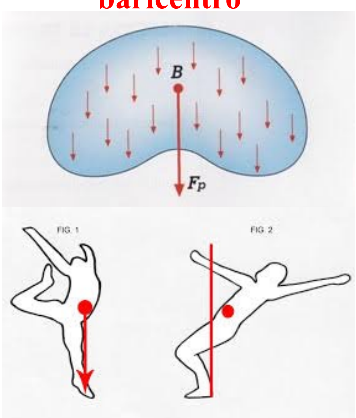
Sistema di Riferimento bidimensionale

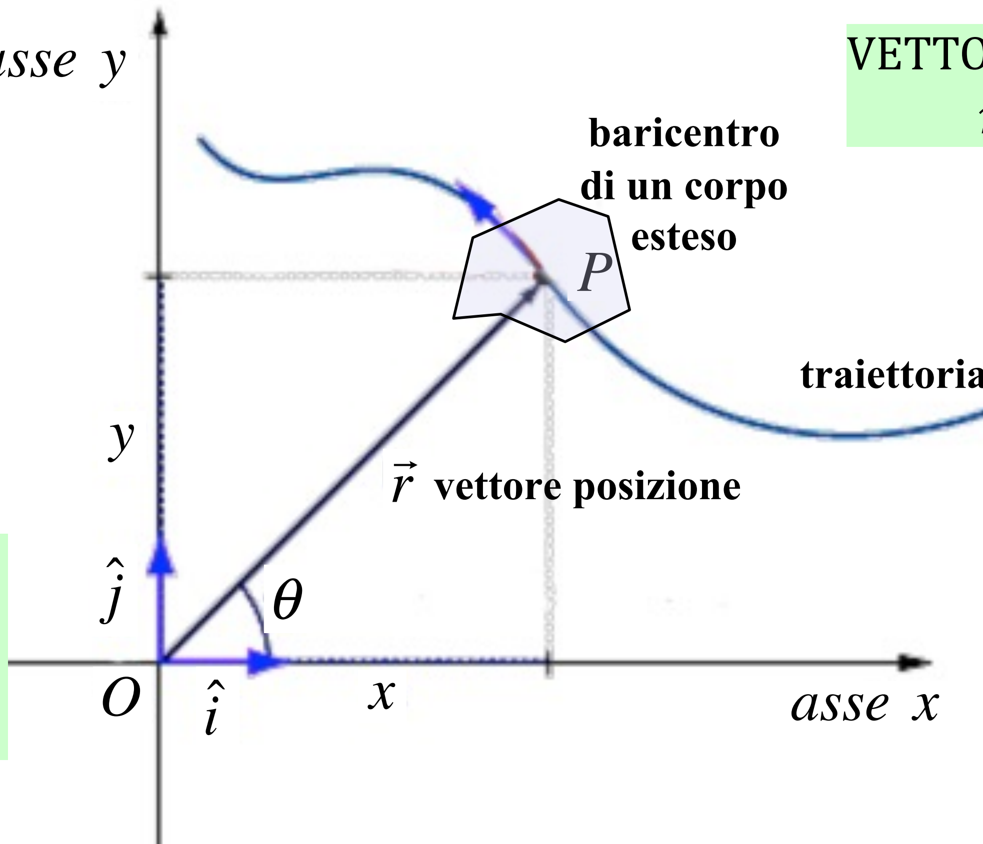
$\{xOy\}$

Il vettore Posizione in due dimensioni

Nel caso in cui, invece che un punto materiale, si debba studiare la traiettoria di un **corpo esteso**, il vettore posizione punterà al ***centro di massa***, o ***baricentro***, del corpo stesso. Per baricentro si intende quel punto (appartenente o no al corpo) che ha la proprietà di muoversi ***come se in esso fosse concentrata tutta la massa del corpo*** (il baricentro, ad esempio, è fondamentale nel determinare le condizioni di equilibrio di un corpo). Negli esempi il baricentro verrà fatto tipicamente coincidere, in prima approssimazione, con il **centro geometrico** del corpo che si sta considerando.

baricentro





VETTORE POSIZIONE

$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$

Sistema di Riferimento bidimensionale

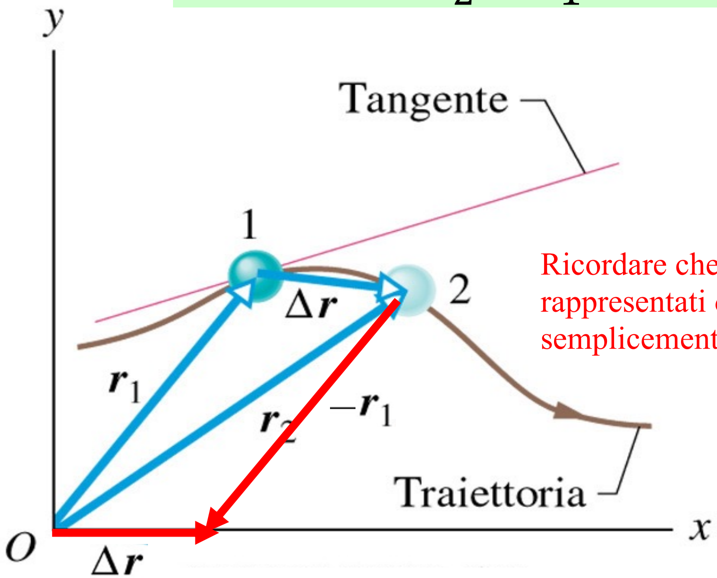
$\{xOy\}$

Spostamento e Velocità in due dimensioni

Sappiamo che la velocità media di un corpo è pari al rapporto tra il suo spostamento e il tempo impiegato a spostarsi. In due dimensioni lo **spostamento** sarà rappresentato come un *vettore ottenuto dalla differenza tra due vettori posizione ad istanti di tempo successivi…*

VETTORE SPOSTAMENTO

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$



Ricordare che i nomi dei vettori possono essere rappresentati da lettere con sopra la freccia o semplicemente da lettere in grassetto…

Spostamento e Velocità in due dimensioni

Sappiamo che la velocità media di un corpo è pari al rapporto tra il suo spostamento e il tempo impiegato a spostarsi. In due dimensioni lo **spostamento** sarà rappresentato come un *vettore ottenuto dalla differenza tra due vettori posizione ad istanti di tempo successivi*, e la **velocità vettoriale media** sarà data quindi dal rapporto tra il vettore spostamento così ottenuto e l'intervallo di tempo considerato.

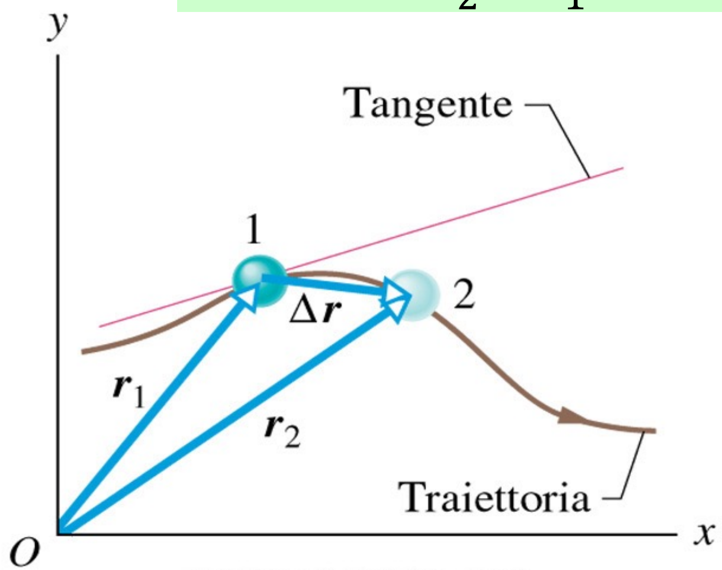
VETTORE SPOSTAMENTO

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$

Velocità vettoriale media

$$\vec{v}_{media} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore spostamento

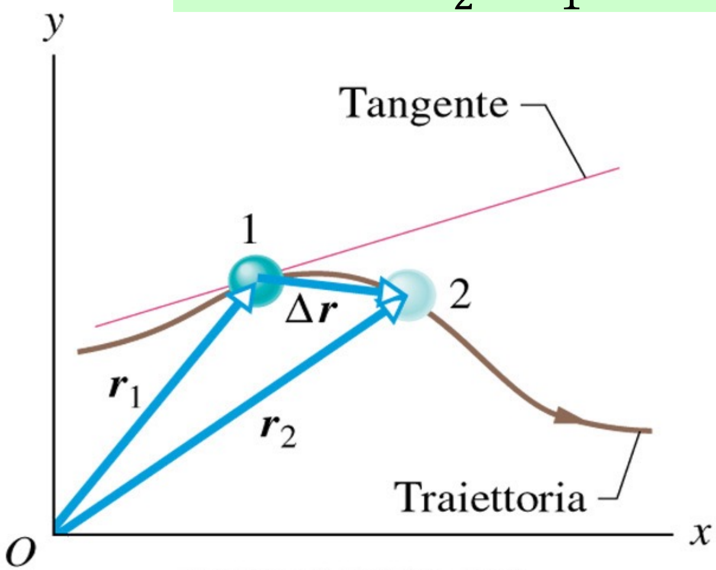


Spostamento e Velocità in due dimensioni

Sappiamo che la velocità media di un corpo è pari al rapporto tra il suo spostamento e il tempo impiegato a spostarsi. In due dimensioni lo **spostamento** sarà rappresentato come un *vettore ottenuto dalla differenza tra due vettori posizione ad istanti di tempo successivi*, e la **velocità vettoriale media** sarà data quindi dal rapporto tra il vettore spostamento così ottenuto e l'intervallo di tempo considerato. Facendo **tendere a zero** l'intervallo di tempo considerato, la direzione del vettore velocità media si avvicina a quella della **retta tangente alla traiettoria** nella posizione $\overrightarrow{r_1}$. Si ottiene così la **velocità vettoriale istantanea** $\vec{v}$ nel punto 1 (cioè la derivata prima del vettore posizione in quel punto), che potrà a sua volta essere scomposta nelle sue **componenti** lungo i due assi, $\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$.

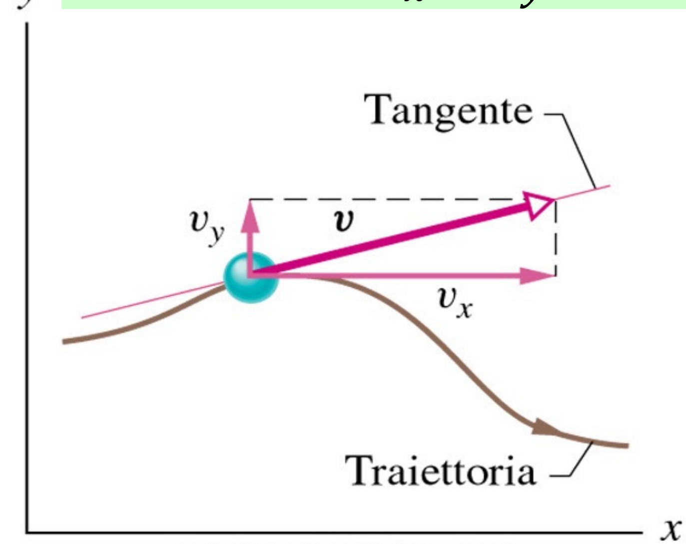
VETTORE SPOSTAMENTO

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$



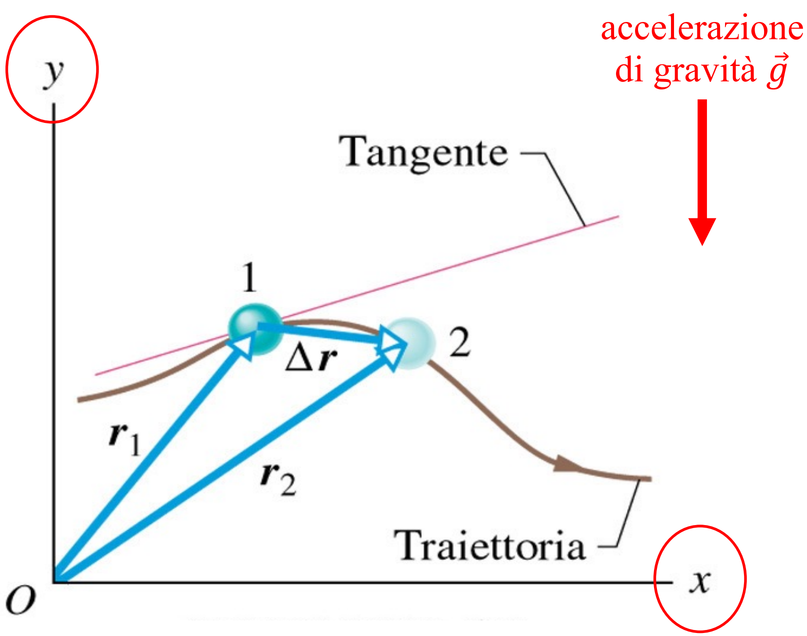
VETTORE VELOCITA' ISTANTANEA

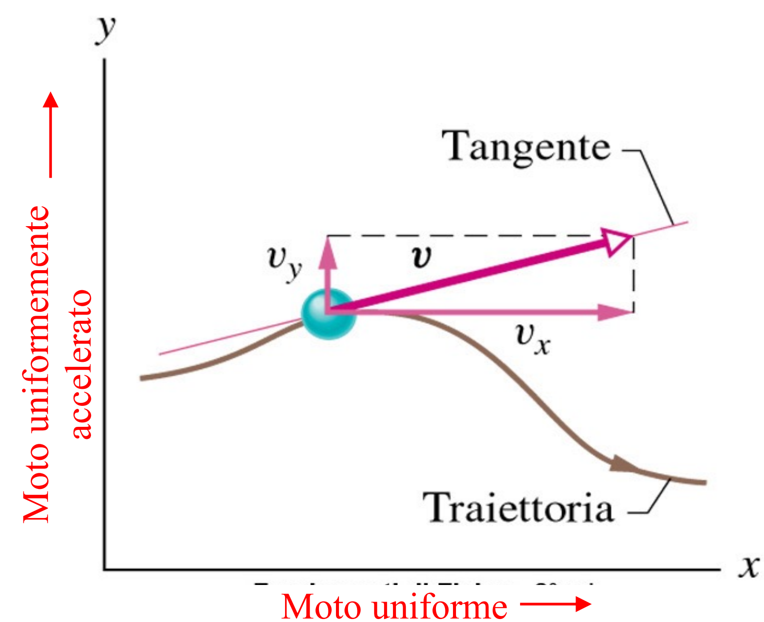
$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$$



Moto di un proiettile in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché *l'accelerazione di gravità è diretta solo e costantemente verso il basso* (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:** $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$

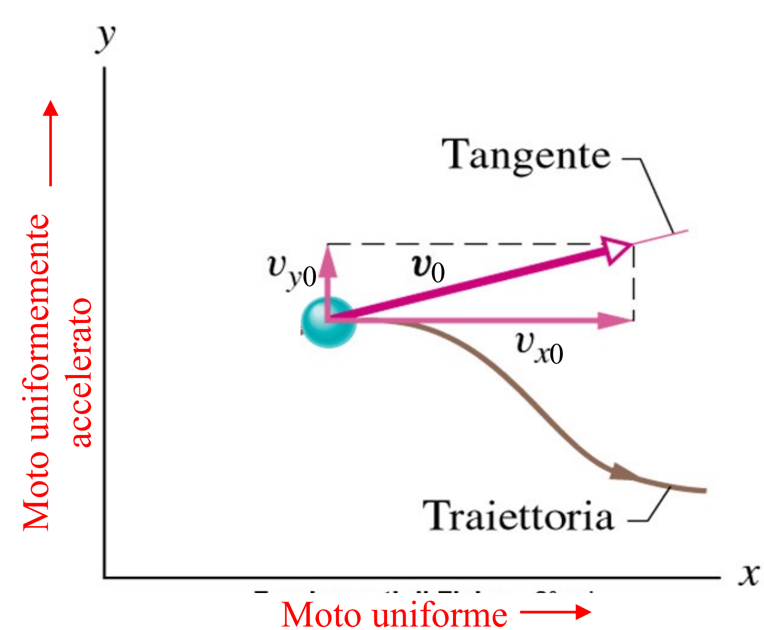




Moto di un proiettile in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché *l'accelerazione di gravità è diretta solo e costantemente verso il basso* (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:** $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$

accelerazione di gravità $\vec{g}$



Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Moto di un proiettile in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché *l'accelerazione di gravità è diretta solo e costantemente verso il basso* (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:** $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$

Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = -g = \text{cost}$)

moto orizzontale (uniforme $a_x=0$, $v_x=\text{cost.}$)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

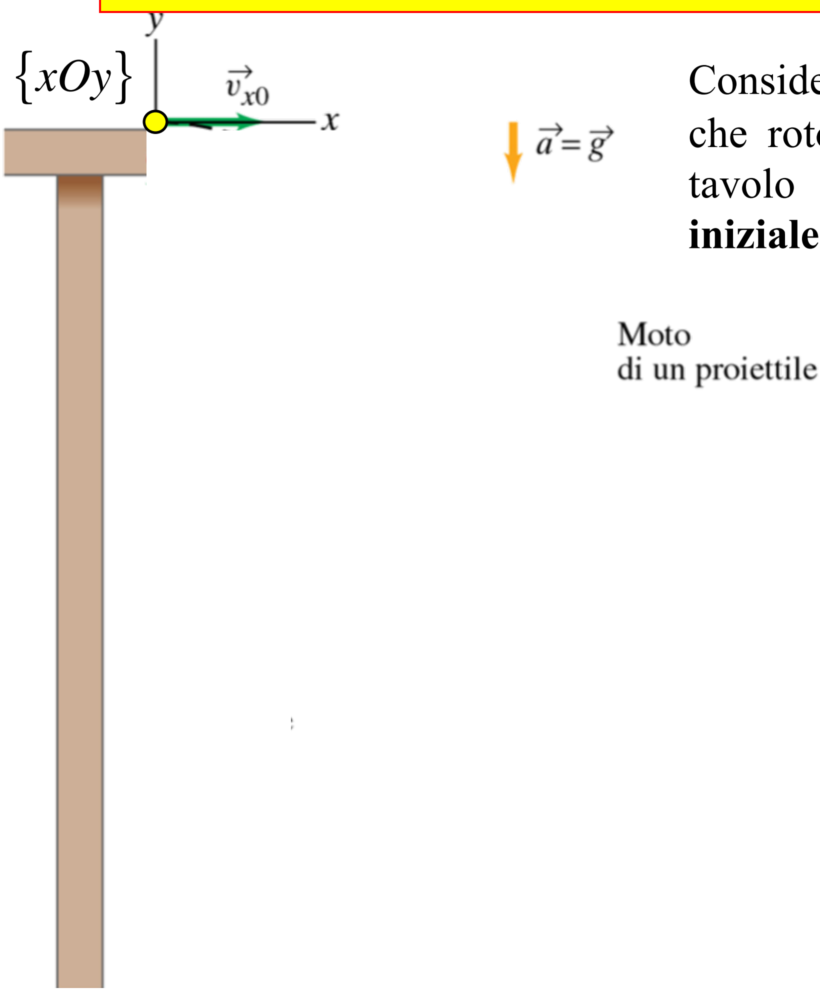
moto verticale (unif.accel. $a_y = -g$)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$

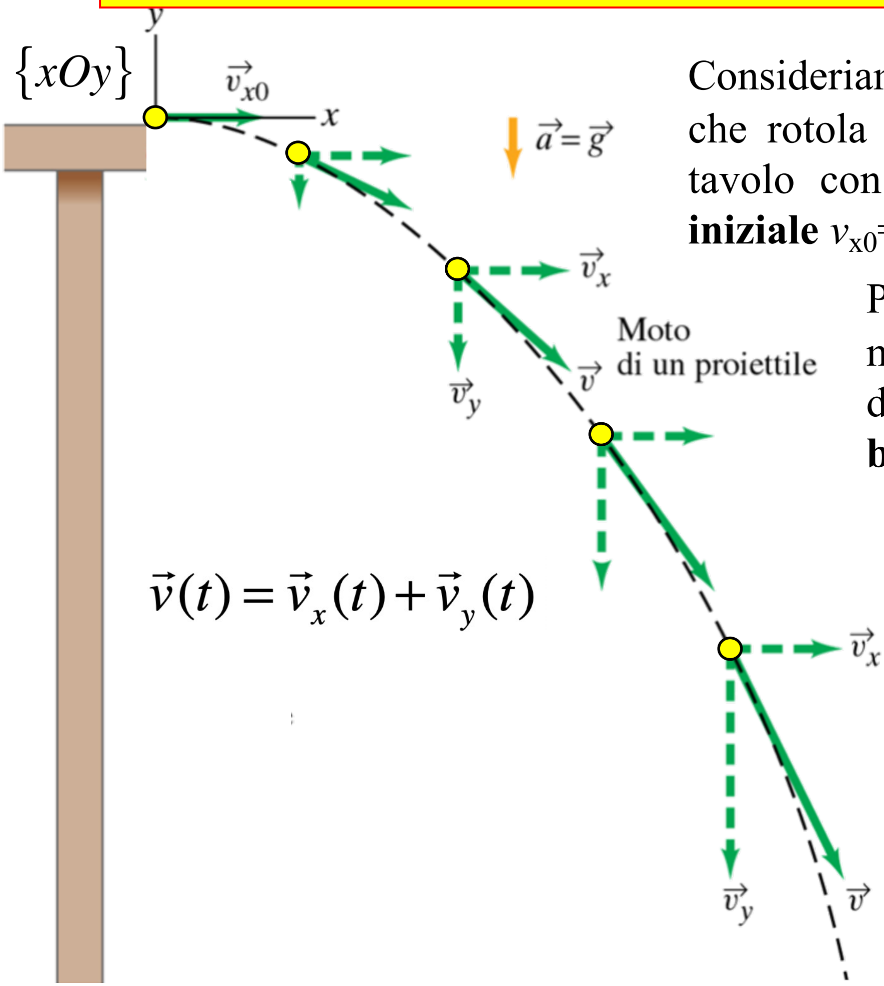
Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. $\rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. $\rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

In accordo con **Galileo**, le equazioni cinematiche del moto per i corpi in caduta libera si applicano **separatamente** alle componenti *x* (moto uniforme) e *y* (moto uniformemente accelerato) del vettore velocità istantanea:

Equazioni del moto per le due componenti indipendenti

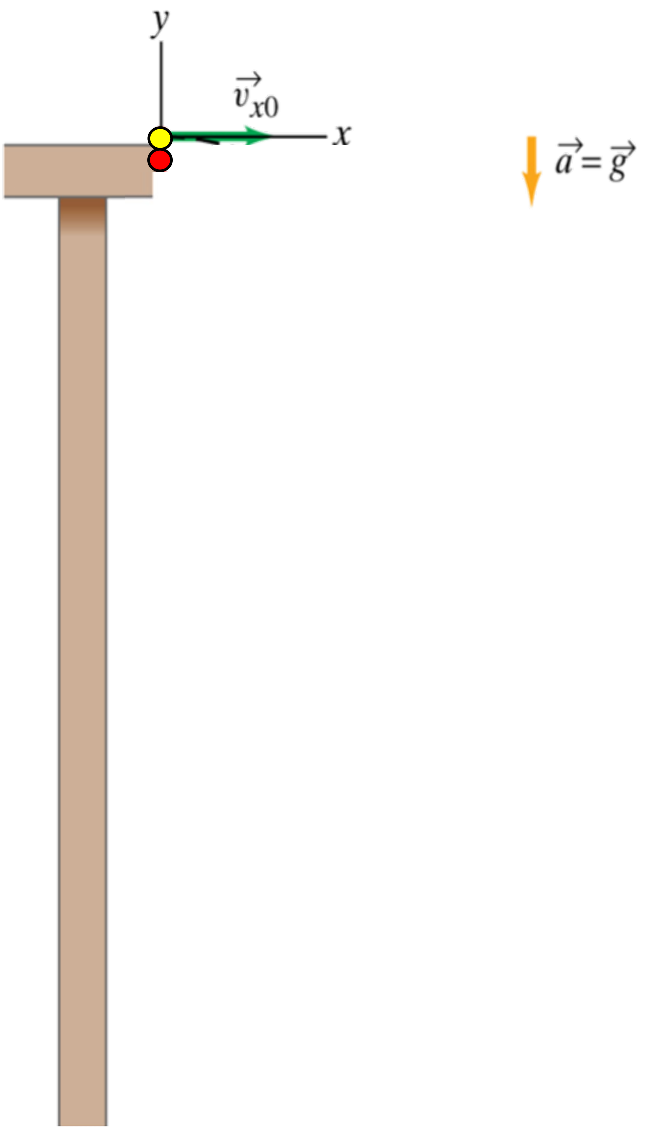
$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} = \cos t \quad ; \quad x(t) = v_{x0} t \\ v_y(t) = -gt \quad ; \quad y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Combinando i moti lungo i due assi si ottiene una traiettoria parabolica (in questo caso un arco di parabola)

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

Quesito

Se contemporaneamente alla pallina gialla dell'esempio precedente **un'altra pallina rossa** viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?



Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

Quesito

Se contemporaneamente alla pallina gialla dell'esempio precedente **un'altra pallina rossa** viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta

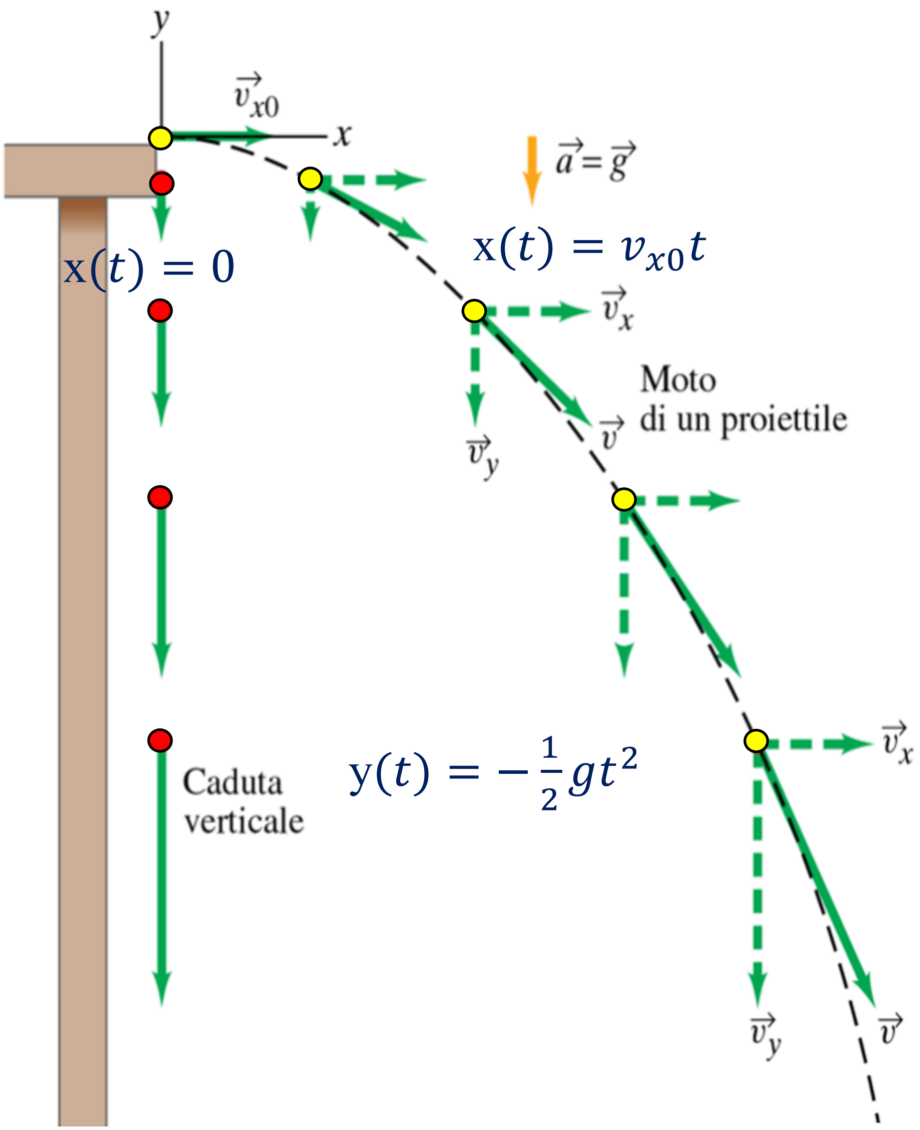
Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (unif.accelerato) lungo la direzione verticale è il **medesimo** (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente orizzontale (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .

pallina gialla

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

pallina rossa

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$



Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

Quesito

Se contemporaneamente alla pallina gialla dell'esempio precedente **un'altra pallina rossa** viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta

Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (unif.accelerato) lungo la direzione verticale è il **medesimo** (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente orizzontale (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .

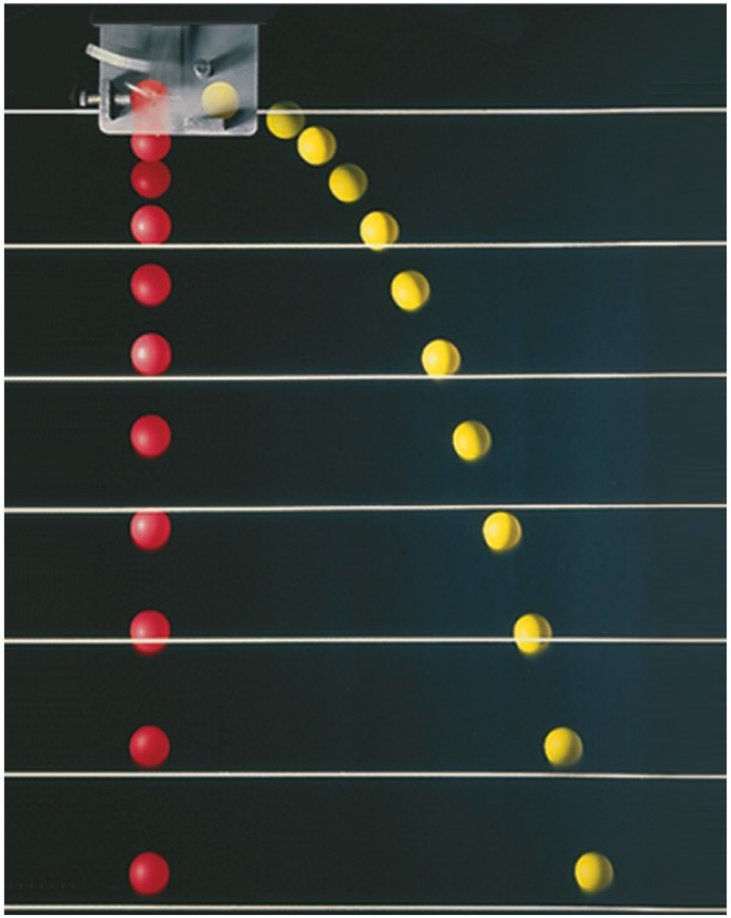
pallina gialla

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

pallina rossa

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

Conferma sperimentale!



YouTube IT https://www.youtube.com/watch?v=9lTOZQ5DvBM

Il moto dei proiettili