

# Misura delle grandezze fisiche



*“Ogni misurazione è un’operazione chiaramente definita che dà un determinato risultato numerico e che, se immediatamente ripetuta, darà lo stesso risultato”.*  
E.Schrödinger

Come abbiamo visto, alla base di ogni teoria fisica c’è un processo di misura, ossia di confronto tra un oggetto da misurare, ad es. una **grandezza fisica  $B$** , e un opportuno oggetto ad esso omogeneo assunto come **unità di misura  $[b]$** . Il **risultato** della misura sarà dunque un **numero  $b$**  che esprime il rapporto tra la grandezza fisica e la sua unità di misura, ossia ci dice quante volte l’unità di misura è contenuta nella grandezza misurata:

$$b = \frac{B}{[b]} \rightarrow B = b[b]$$

Ad esempio, se  $B$  è una lunghezza, allora  $[b]$  sarà il metro (m) e un ipotetico risultato di misura sarà del tipo:  $B = 2.5$  m.



# Incertezza nella misura delle grandezze fisiche

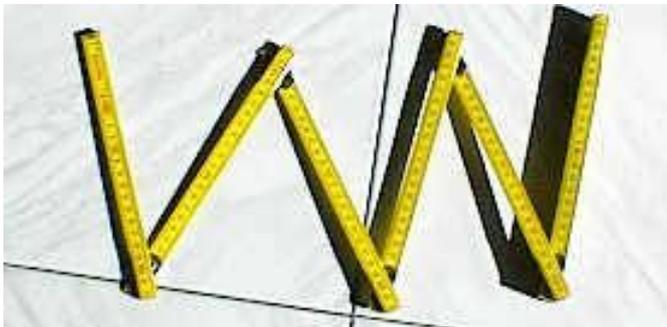
In realtà l'espressione generale  $B = b [b]$  è incompleta poiché **nessuna misura di una grandezza fisica è precisa in assoluto** (la fisica non è matematica pura!). Ogni risultato numerico ottenuto tramite un processo di misura è infatti affetto da un **errore**, il quale **non è un difetto eliminabile** bensì un elemento intrinsecamente connesso alla misura stessa e che in qualche modo ne definisce la qualità. Avremo quindi:

$$B = b \pm \Delta b [b]$$

dove  $\Delta b$  è l'errore.

$$\text{Ad es. } B = 2.5 \pm 0.2 \text{ m}$$

Gli errori, in fisica, sono dovuti a diversi **fattori di incertezza**, tra cui – escludendo gli errori grossolani – dobbiamo annoverare la **limitata accuratezza di tutti gli strumenti di misura** (ossia la loro limitata capacità di restituire una misura vicina al valore vero) e **la nostra incapacità** di leggere uno strumento al di là di alcune frazioni della più piccola divisione riportata.



# Caratteristiche di uno strumento di misura

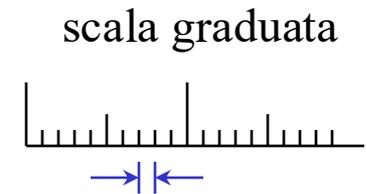
Le principali **caratteristiche di uno strumento di misura** sono:

- **L'intervallo d'uso**: è l'insieme dei valori compresi tra la *soglia* e la *portata*, che sono rispettivamente il minimo e il massimo valore della grandezza misurata che lo strumento può apprezzare in un singolo atto di misura;

- **La prontezza**: è il tempo necessario affinché lo strumento risponda ad una variazione di sollecitazione;

- **La precisione**: è legata all'errore  $\Delta b$  che si commette ripetendo molte volte la misura di una determinata grandezza fisica (maggiore è la precisione, minore è l'errore);

- **La sensibilità**: è la più piccola variazione della grandezza misurata che può essere apprezzata dallo strumento; si assume corrispondente alla più piccola suddivisione della scala dello strumento utilizzato.



**E' opportuno che la sensibilità non superi mai la precisione!**

## Caratteristiche di uno strumento di misura

Ad esempio, non avrebbe senso utilizzare un **cronometro** con una sensibilità del **millesimo di secondo** per stabilire, *manualmente*, quando una macchina di Formula 1 attraversa il traguardo, visto che i **tempi di reazione** degli esseri umani sono dell'ordine del **decimo di secondo**, e dunque di questo ordine di grandezza sarebbe l'errore che commetteremmo nella misura (scarsa precisione).



E' opportuno che la sensibilità non superi mai la precisione!

# Errori sistematici e accidentali

Abbiamo detto che, in ogni procedimento di misura, misure ripetute nelle stesse condizioni sperimentali (macroscopiche) danno sempre **risultati leggermente diversi** ed imprevedibili a causa di diverse fonti di errore.

E' utile suddividere queste **fonti di errore** in due categorie fondamentali:

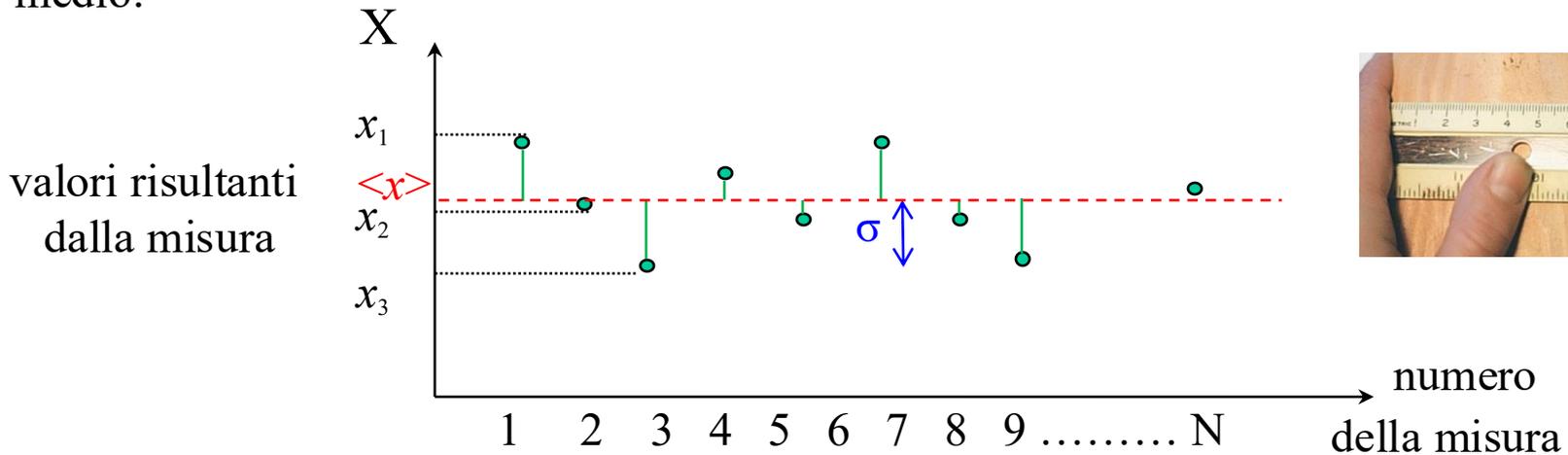
•**Gli errori sistematici:** sono errori che derivano tipicamente da imperfezioni e/o limiti degli **strumenti di misura**, includendo in essi anche i nostri organi di senso. Sono di solito errori che influenzano il risultato di una misura *sempre nella stessa direzione*, nel senso che tendono a farci trovare dei valori sempre maggiori o sempre minori del cosiddetto “*valore vero*”, incognito, della grandezza fisica in questione (vedi cronometro o bilancia non tarati);

•**Gli errori accidentali (o casuali):** sono errori che nascono da una moltitudine di **contributi elementari**, che si combinano in tutti i modi possibili, e che quindi influenzano il risultato di una misura in maniera fluttuante. Questi errori (legati essenzialmente alla **precisione** dello strumento di misura) risultano gestibili solo ricorrendo al linguaggio della probabilità e della statistica. E' a causa loro che il risultato di una misura diventa una **variabile casuale**, del tipo  $X = x \pm \Delta x$ , distribuita secondo una funzione caratteristica  $f(x)$  (**distribuzione di probabilità**) intorno al “*valore vero*” della grandezza fisica considerata.

# Statistica degli errori accidentali

Ma come si ottiene, in pratica, questa distribuzione di probabilità  $f(x)$ ?

Innanzitutto i risultati di  $N$  misure ripetute di una grandezza fisica  $X$  possono essere riportati in un “ideogramma” e di essi è utile calcolare media e scarto quadratico medio:



**Media aritmetica:**  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$

**Scarto dalla media della misura  $i$ -esima:**  $z_i = x_i - \langle x \rangle$

**Scarto quadratico medio:**  
(incertezza stimata)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N z_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N}}$$

scarto quadratico medio,  
legato all'errore  
sulla singola misura

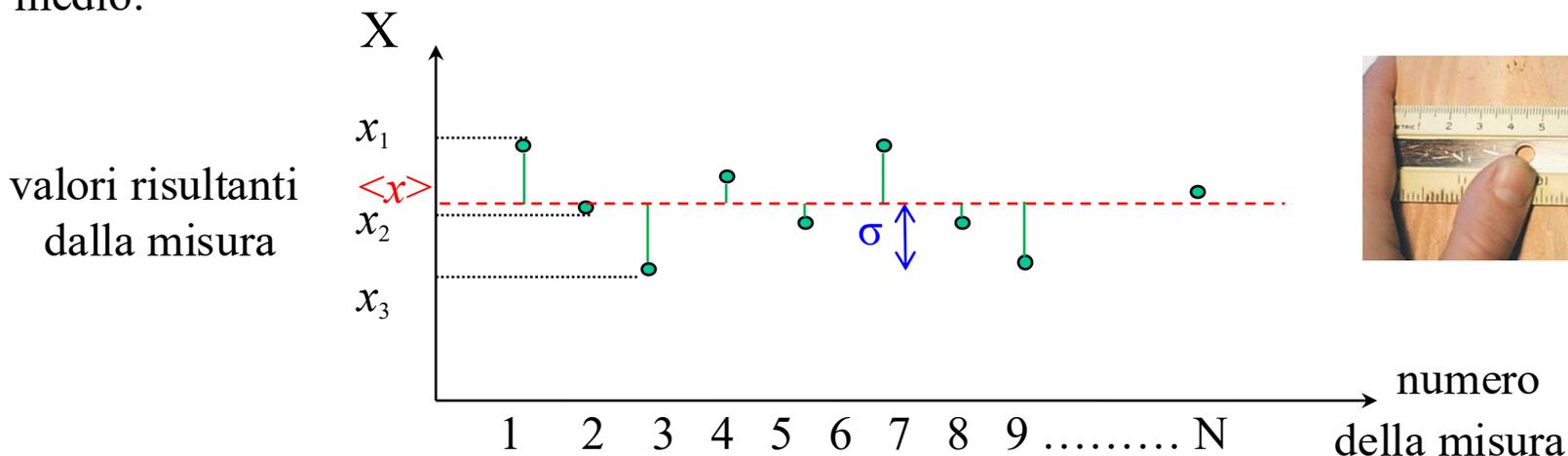
$$X = \langle x \rangle \pm \sigma$$

media, vicina al  
“valore vero”

# Statistica degli errori accidentali

Ma come si ottiene, in pratica, questa distribuzione di probabilità  $f(x)$ ?

Innanzitutto i risultati di  $N$  misure ripetute di una grandezza fisica  $X$  possono essere riportati in un "ideogramma" e di essi è utile calcolare media e scarto quadratico medio:



**Media aritmetica:**  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$

**Scarto dalla media della misura  $i$ -esima:**  $z_i = x_i - \langle x \rangle$

**Scarto quadratico medio:**  
(incertezza stimata)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N z_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N}}$$

**scarto quadratico medio,  
legato all'errore  
sulla singola misura**

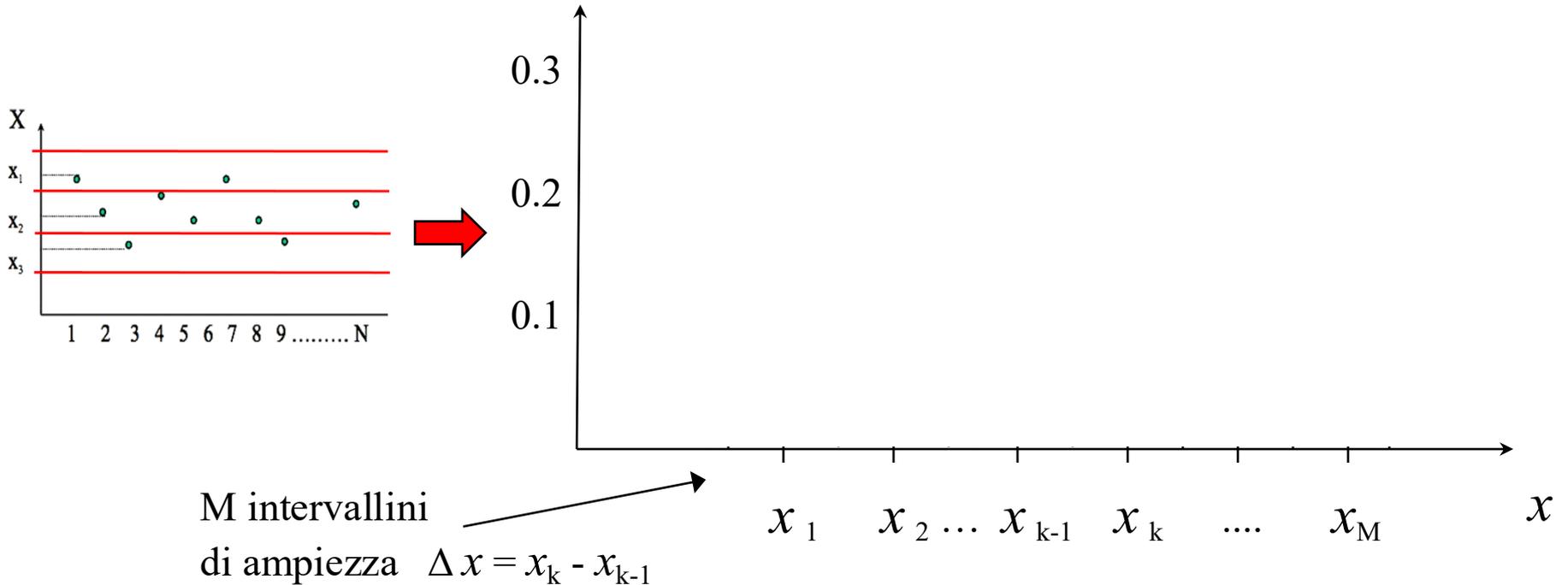
$$X = \langle x \rangle \pm \sigma$$

**quindi:**

$$B = b \pm \Delta b [b]$$

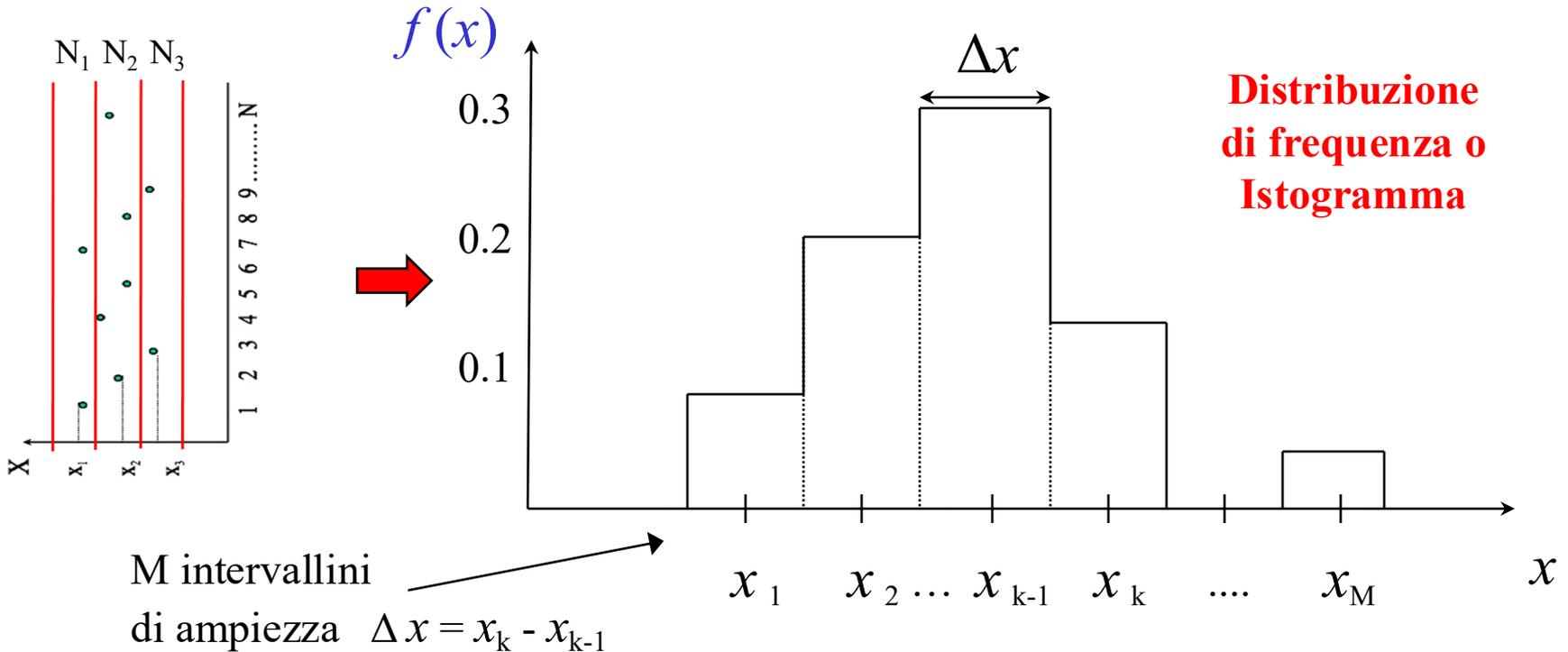
# Distribuzione di Frequenza

All'aumentare del numero  $N$  di misure di una grandezza fisica è utile passare dall'ideogramma ad un **diagramma di frequenza**, detto anche **istogramma**, dove si divide l'intervallo in cui cadono tutte le misure in piccoli intervallini di ampiezza  $\Delta x$  (detti "bins")...

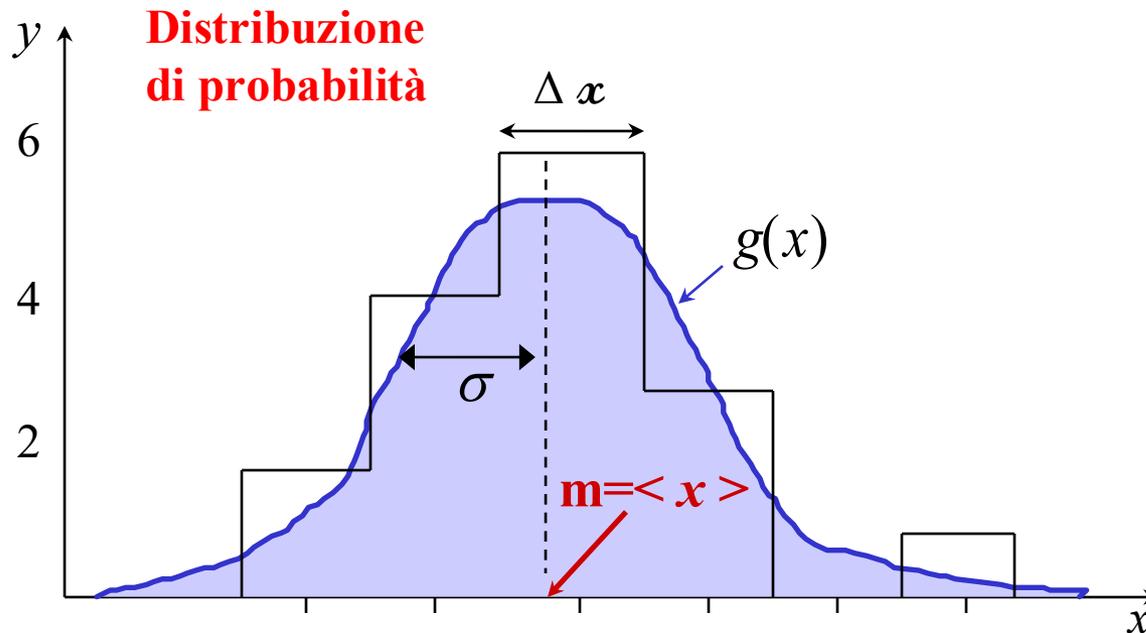


# Distribuzione di Frequenza

All'aumentare del numero  $N$  di misure di una grandezza fisica è utile passare dall'ideogramma ad un **diagramma di frequenza**, detto anche **istogramma**, dove si divide l'intervallo in cui cadono tutte le misure in piccoli intervallini di ampiezza  $\Delta x$  (detti "bins") e si riporta in asse  $y$  la **distribuzione di frequenza**  $f(x_k) = N_k/N$  delle misure ( $N_k$ ) che cadono in ogni intervallino di centro  $x_k$ :



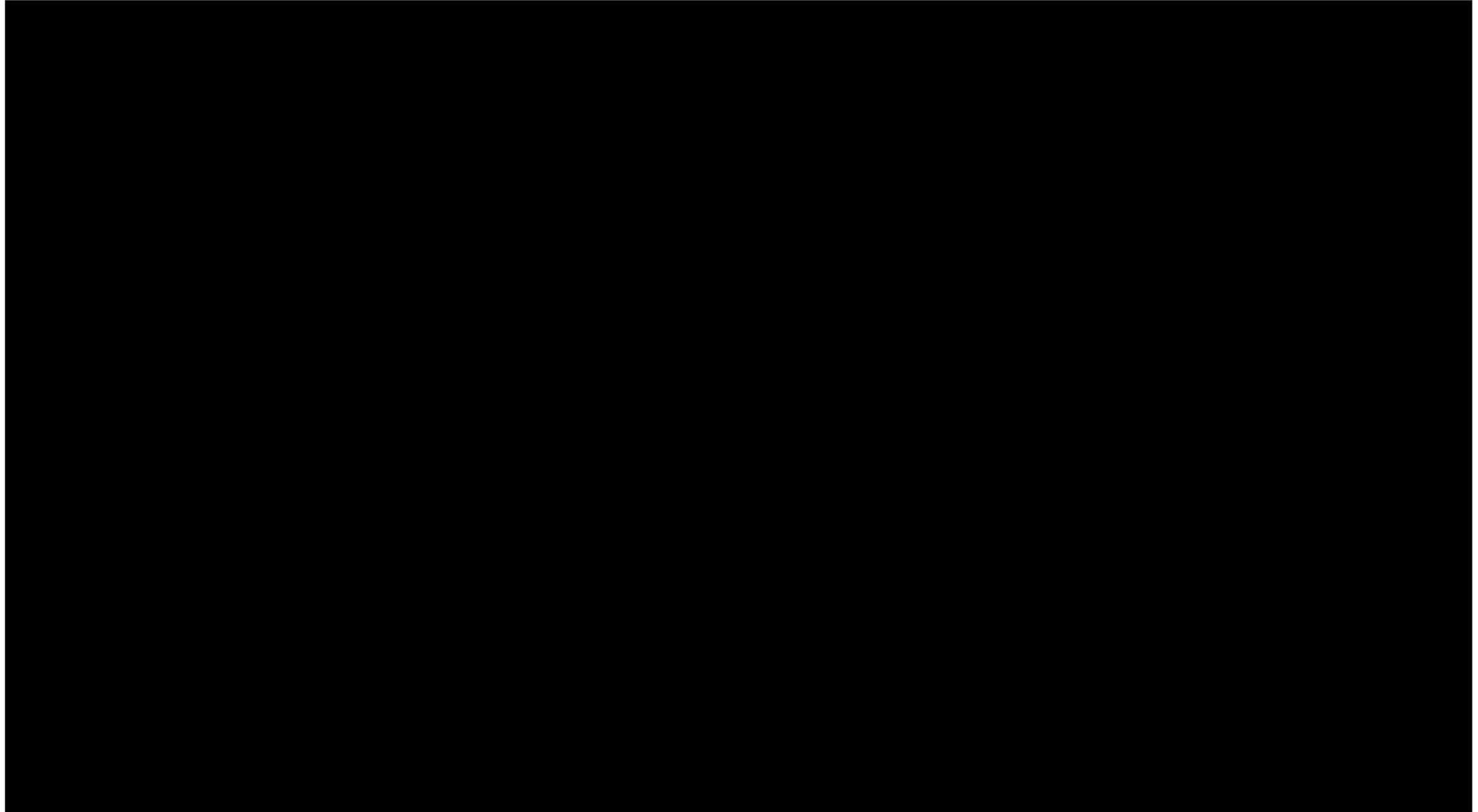
# Distribuzione di Probabilità Normale o Gaussiana



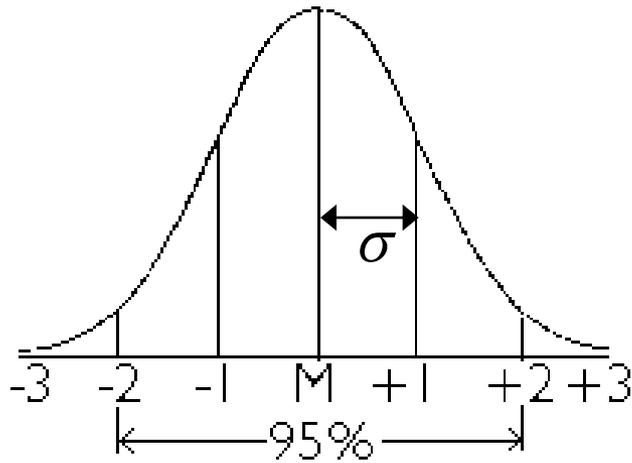
Graficamente, se il numero di misure di una grandezza fisica diventa molto grande (cioè se appunto  $N \longrightarrow \infty$ ) ecco che l'istogramma si trasforma in una *curva continua* la quale, se le misure effettuate sono indipendenti le une dalle altre (cioè se variabili che le rappresentano non sono correlate), è ben approssimata dalla cosiddetta **Distribuzione Normale**, cioè la **distribuzione di probabilità Gaussiana** a forma di campana:

$$f(x) \stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2 / 2\sigma^2}$$

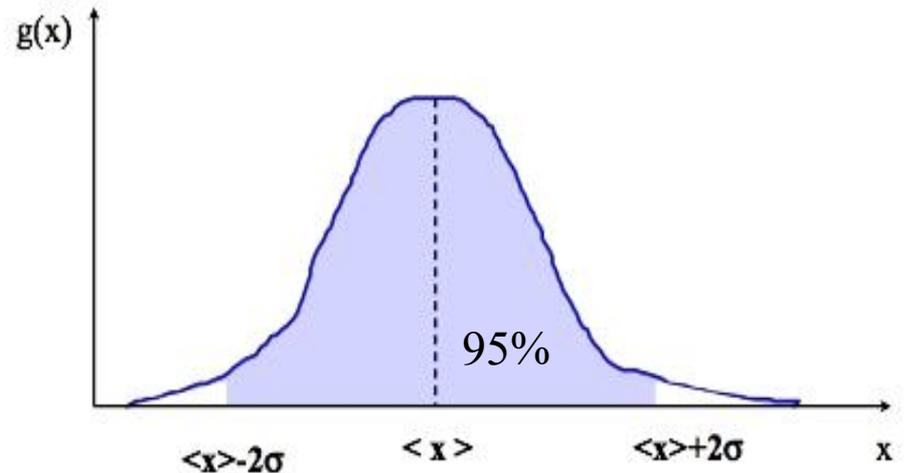
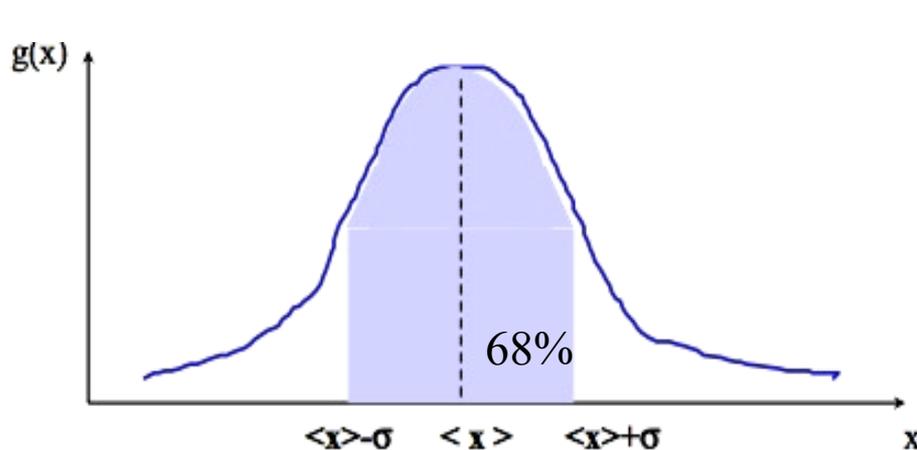
# Distribuzione di Probabilità Normale o Gaussiana



# Distribuzione di Probabilità Normale o Gaussiana



La distribuzione Gaussiana è simmetrica e ha sempre il suo massimo in corrispondenza della **media** dei valori misurati. Può essere più o meno stretta a seconda della dispersione dei valori attorno alla media, espressa dallo scarto quadratico medio, detto anche **deviazione standard dalla media**. Una delle proprietà della gaussiana è che il 68% delle misurazioni differisce dalla media meno di una deviazione standard e il 95% meno di due deviazioni standard: quindi maggiore è la deviazione standard, più la gaussiana è "aperta" e minore è la precisione delle nostre misure.



# Incertezza stimata e incertezza percentuale

Data dunque l'espressione del risultato della misura di una grandezza fisica  $B$ :

$$B = b \pm \Delta b [b]$$

abbiamo detto che l'errore  $\Delta b$  (*sperimentalmente uguale allo scarto quadratico medio  $\sigma$  – o deviazione standard – della distribuzione di valori ottenuti ripetendo più volte la stessa misura*) è equivalente alla cosiddetta **incertezza stimata**. Se ad esempio nell'espressione precedente si ha  $b=3.5$  e  $\Delta b=0.2$ , avremo che il valore della grandezza fisica  $B$  sarà un numero reale compreso (con approssimazione del 68%) fra **3.5 - 0.2** e **3.5 + 0.2** cioè **3.3 < B < 3.7**.

Innanzitutto osserviamo che è possibile esprimere questa incertezza anche in **percentuale**, semplicemente prendendo il rapporto tra l'incertezza stimata e il valore numerico misurato  $b$  (*sperimentalmente uguale alla media  $\langle x \rangle$  della distribuzione di misure*) e moltiplicandolo per 100.

Ad es., se  $b=8.8$  m e l'incertezza stimata è  $\Delta b=0.1$  m, l'**incertezza percentuale** sarà:

$$\Delta b(\%) = \frac{0.1}{8.8} \cdot 100\% \approx 0.01 \cdot 100\% \approx 1\%$$

Notiamo poi che, se l'**incertezza non è esplicitamente riportata**, si assume che essa sia pari a poche unità dell'ultima cifra specificata. Se quindi scriviamo  $b=12.6$  m, si assume che l'incertezza  $\Delta b$  sia pari a circa 0.1 m, o al massimo 0.2 m. Scrivendo invece  $b=12.60$ m, si assumerà un'incertezza dell'ordine di 0.01 m, minore della precedente. E' quindi importante che il risultato di una misura sia espresso con tutte e sole le cifre che si conoscono in modo attendibile (che indicheranno l'**accuratezza** della misura stessa).

# Cifre significative di un valore numerico

Dato un certo valore numerico  $b$ , le cifre che si conoscono in modo attendibile si chiamano **cifre significative** e la loro quantità si chiama “*numero di cifre significative*”. Maggiore è questo numero, maggiore sarà quindi l’accuratezza della misura.

Le **tre regole** per individuare le cifre significative di un numero:

- La *cifra più significativa* è sempre la prima da sinistra che sia diversa da zero (es. 0.21);
- La *cifra meno significativa*
  - in un valore intero, è la prima da destra che sia diversa da zero (es. 78340)
  - in un valore con una parte frazionaria, è l'ultima cifra a destra, anche se si tratta di uno zero (es. 67.450);
- Le **cifre significative** sono tutte quelle comprese tra la *più significativa* e la *meno significativa*, queste incluse.

Ad esempio:

- $b=5420$
- $b=23.21$
- $b=0.062$
  
- $b=0.380$

# Cifre significative di un valore numerico

Dato un certo valore numerico  $b$ , le cifre che si conoscono in modo attendibile si chiamano **cifre significative** e la loro quantità si chiama “*numero di cifre significative*”. Maggiore è questo numero, maggiore sarà quindi l’accuratezza della misura.

Le **tre regole** per individuare le cifre significative di un numero:

- La *cifra più significativa* è sempre la prima da sinistra che sia diversa da zero (es. 0.21);
- La *cifra meno significativa*
  - in un valore intero, è la prima da destra che sia diversa da zero (es. 78340)
  - in un valore con una parte frazionaria, è l'ultima cifra a destra, anche se si tratta di uno zero (es. 67.450);
- Le **cifre significative** sono tutte quelle comprese tra la *più significativa* e la *meno significativa*, queste incluse.

Ad esempio:

- $b=$ 5420 possiede *tre* cifre significative (gli zeri finali non contano per i numeri interi)
- $b=23.21$
- $b=0.062$
  
- $b=0.380$

# Cifre significative di un valore numerico

Dato un certo valore numerico  $b$ , le cifre che si conoscono in modo attendibile si chiamano **cifre significative** e la loro quantità si chiama “*numero di cifre significative*”. Maggiore è questo numero, maggiore sarà quindi l’accuratezza della misura.

Le **tre regole** per individuare le cifre significative di un numero:

- La *cifra più significativa* è sempre la prima da sinistra che sia diversa da zero (es. 0.21);
- La *cifra meno significativa*
  - in un valore intero, è la prima da destra che sia diversa da zero (es. 78340)
  - in un valore con una parte frazionaria, è l'ultima cifra a destra, anche se si tratta di uno zero (es. 67.450);
- Le **cifre significative** sono tutte quelle comprese tra la *più significativa* e la *meno significativa*, queste incluse.

Ad esempio:

- $b=$ 5420 possiede *tre* cifre significative (gli zeri finali non contano per i numeri interi)
- $b=$ 23.21 possiede *quattro* cifre significative
- $b=0.062$
- $b=0.380$

# Cifre significative di un valore numerico

Dato un certo valore numerico  $b$ , le cifre che si conoscono in modo attendibile si chiamano **cifre significative** e la loro quantità si chiama “*numero di cifre significative*”. Maggiore è questo numero, maggiore sarà quindi l’accuratezza della misura.

Le **tre regole** per individuare le cifre significative di un numero:

- La *cifra più significativa* è sempre la prima da sinistra che sia diversa da zero (es. 0.21);
- La *cifra meno significativa*
  - in un valore intero, è la prima da destra che sia diversa da zero (es. 78340)
  - in un valore con una parte frazionaria, è l'ultima cifra a destra, anche se si tratta di uno zero (es. 67.450);
- Le **cifre significative** sono tutte quelle comprese tra la *più significativa* e la *meno significativa*, queste incluse.

Ad esempio:

- $b=$ 5420 possiede *tre* cifre significative (gli zeri finali non contano per i numeri interi)
- $b=$ 23.21 possiede *quattro* cifre significative
- $b=0.0$ 62 possiede *due* cifre significative (gli zeri sono, in questo caso, solo dei segnaposto per indicare dove va collocato il punto della suddivisione decimale)
- $b=0.380$

# Cifre significative di un valore numerico

Dato un certo valore numerico  $b$ , le cifre che si conoscono in modo attendibile si chiamano **cifre significative** e la loro quantità si chiama “*numero di cifre significative*”. Maggiore è questo numero, maggiore sarà quindi l’accuratezza della misura.

Le **tre regole** per individuare le cifre significative di un numero:

- La *cifra più significativa* è sempre la prima da sinistra che sia diversa da zero (es. 0.21);
- La *cifra meno significativa*
  - in un valore intero, è la prima da destra che sia diversa da zero (es. 78340)
  - in un valore con una parte frazionaria, è l'ultima cifra a destra, anche se si tratta di uno zero (es. 67.450);
- Le **cifre significative** sono tutte quelle comprese tra la *più significativa* e la *meno significativa*, queste incluse.

Ad esempio:

- $b=$ 5420 possiede *tre* cifre significative (gli zeri finali non contano per i numeri interi)
- $b=$ 23.21 possiede *quattro* cifre significative
- $b=0.0$ 62 possiede *due* cifre significative (gli zeri sono, in questo caso, solo dei segnaposto per indicare dove va collocato il punto della suddivisione decimale)
- $b=0.$ 380 possiede *tre* cifre significative, e così via...

# Potenze di Dieci

E' prassi comune, nel linguaggio scientifico, esprimere i numeri coinvolti in un processo di misura riportando **solo le cifre significative** sotto forma di numeri decimali con una sola cifra (la più significativa) nella parte intera, e moltiplicandole per una opportuna **potenza di dieci**. E' questa la cosiddetta “**notazione scientifica**”.

Ad esempio:  $36900 = 3.69 \cdot 10^4$  oppure  $0.0021 = 2.1 \cdot 10^{-3}$

Se l'esponente è **positivo**:

la potenza di 10 è uguale al numero 1 seguito da tanti zeri quant'è il valore dell'esponente.

Esempio

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1\ 000$$

$$10^4 = 10\ 000$$

.

.

.

$$10^{10} = 10\ 000\ 000\ 000$$

Se l'esponente è **negativo**:

la potenza ha per base il reciproco della base e per esponente l'opposto dell'esponente.

Esempio

$$10^{-1} = 1/10^1 = 0,1 ; 10^{-2} = 1/10^2 = 0,01 ; 10^{-3} = 0,001$$

**Nota:** una potenza di 10 cambia il segno dell'esponente se “viene trasferita” dal numeratore al denominatore.

Esempio

$$10^{-2} = 1/10^2 = 0,01 \quad 10^{-5} = 1/10^5 = 0,00001$$

Se l'esponente è 0 la potenza vale sempre 1 con qualsiasi base, purché diversa da zero.

Esempio

$$10^0 = 1$$

# Potenze di Dieci

E' prassi comune, nel linguaggio scientifico, esprimere i numeri coinvolti in un processo di misura riportando **solo le cifre significative** sotto forma di numeri decimali con una sola cifra (la più significativa) nella parte intera, e moltiplicandole per una opportuna **potenza di dieci**. E' questa la cosiddetta “**notazione scientifica**”.

Ad esempio:  $36900 = 3.69 \cdot 10^4$  oppure  $0.0021 = 2.1 \cdot 10^{-3}$



**In pratica, per trasformare un numero intero in notazione scientifica, si aggiunge una virgola alla fine del numero intero e la si sposta verso sinistra di una posizione alla volta, moltiplicando contestualmente per una potenza di 10 con esponente crescente di una unità alla volta:**

$$36900 \rightarrow 3690.0 \cdot 10 \rightarrow 369.00 \cdot 10^2 \rightarrow 36.900 \cdot 10^3 \rightarrow 3.6900 \cdot 10^4$$

**...e alla fine si eliminano eventuali zeri conclusivi dopo la virgola:**

$$3.69 \cdot 10^4$$

**Ovviamente la procedura può essere ripetuta al contrario:**

$$3.69 \cdot 10^4 \rightarrow 36.9 \cdot 10^3 \rightarrow 369 \cdot 10^2 \rightarrow 3690 \cdot 10 \rightarrow 36900$$

# Potenze di Dieci

E' prassi comune, nel linguaggio scientifico, esprimere i numeri coinvolti in un processo di misura riportando **solo le cifre significative** sotto forma di numeri decimali con una sola cifra (la più significativa) nella parte intera, e moltiplicandole per una opportuna **potenza di dieci**. E' questa la cosiddetta “**notazione scientifica**”.

Ad esempio:  $36900 = 3.69 \cdot 10^4$  oppure  $0.0021 = 2.1 \cdot 10^{-3}$



**Invece, per trasformare un numero decimale in notazione scientifica, si sposta la virgola verso destra di una posizione alla volta, eliminando di volta in volta eventuali zeri all'estrema sinistra e moltiplicando contestualmente per una potenza di 10 con esponente (negativo) decrescente di una unità alla volta:**

$$0.0021 \rightarrow 0.021 \cdot 10^{-1} \rightarrow 0.21 \cdot 10^{-2} \rightarrow 2.1 \cdot 10^{-3}$$

**Anche in questo caso la procedura può essere ripetuta al contrario:**

$$2.1 \cdot 10^{-3} \rightarrow 0.21 \cdot 10^{-2} \rightarrow 0.021 \cdot 10^{-1} \rightarrow 0.0021$$