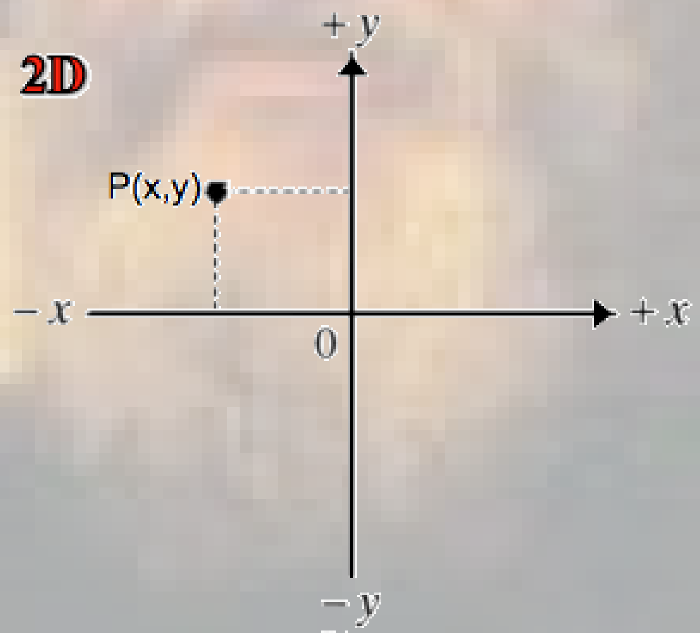
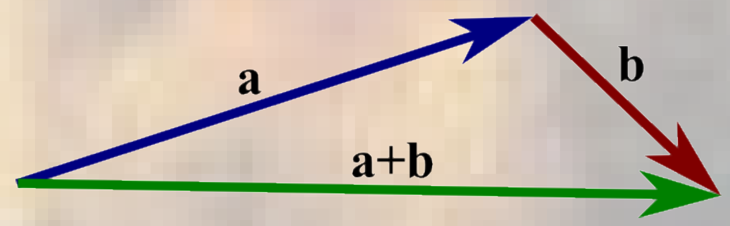
VERSO LA CINEMATICA in 2D…

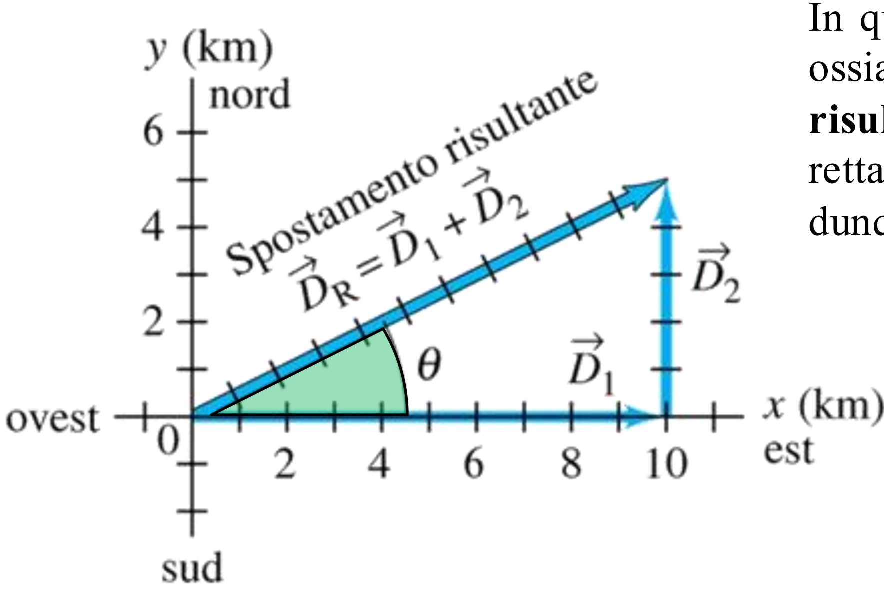


I Vettori



Somma di vettori perpendicolari in 2 dimensioni

Consideriamo un **sistema di riferimento a due dimensioni** e due vettori da sommare (ad es. di modulo 10 Km e 5 Km) che non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.



In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora:*

$$D_R = \sqrt{D_1^{\,2} + D_2^{\,2}} = \sqrt{(10.0km)^2 + (5.0km)^2} =$$

$$= \sqrt{125km^2} = 11.2km$$

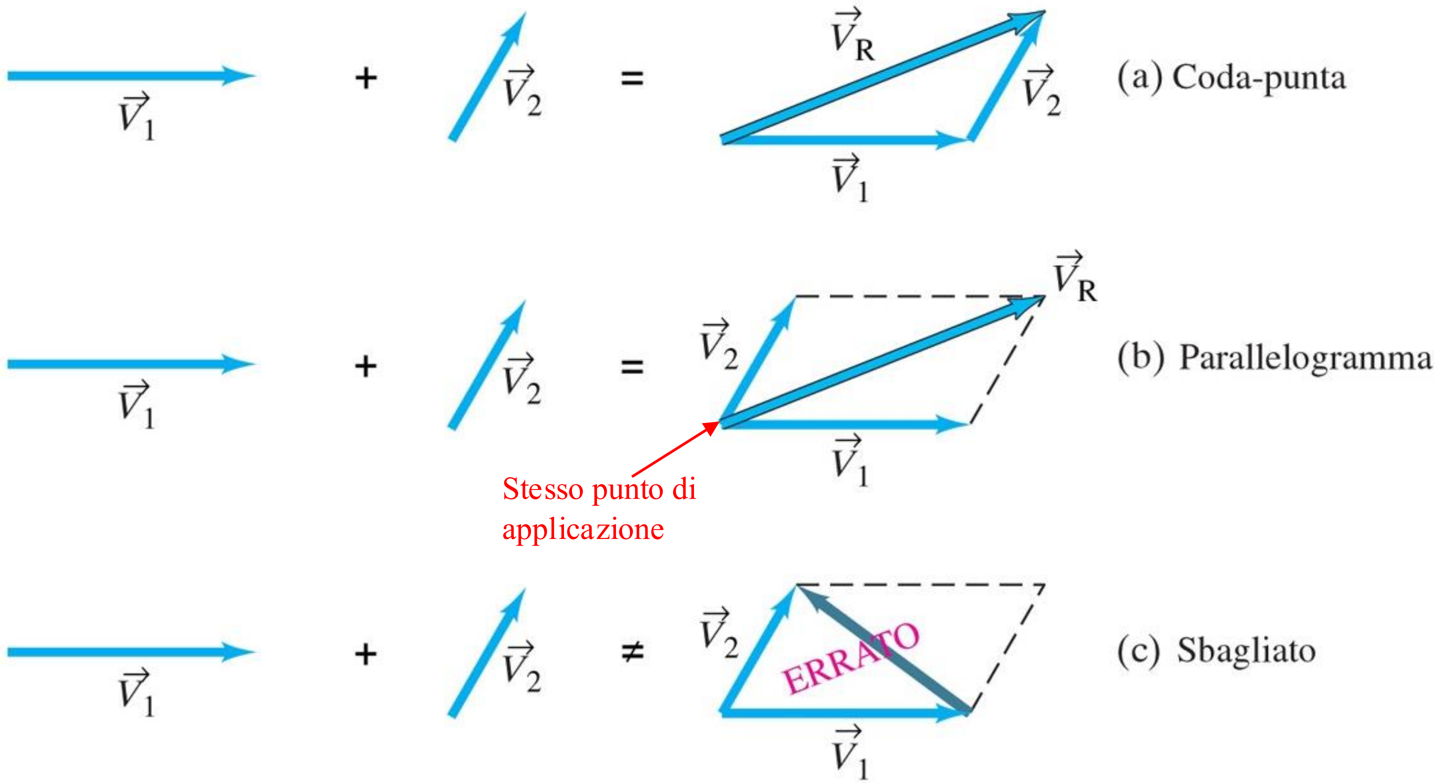
Notiamo anche che il vettore risultante $\vec{D}_R$ forma un certo **angolo** $\boldsymbol{\theta}$ con l'asse x positivo (vedremo dopo come ricavarlo).

Importante: osserviamo che il modulo del vettore risultante ottenuto con la somma vettoriale appena vista è **minore** della somma dei moduli dei due vettori sommati (pari a 15km): è questa la famosa "**disuguaglianza triangolare**" ($D_R < D_1 + D_2$).

Osserviamo inoltre che, nell'esempio precedente, non sarebbe corretto scrivere: $\vec{D}_R = 11.2km$ perchè il numero 11.2km si riferisce solo al modulo del vettore $\vec{D}_R$ (si sarebbe invece potuto scrivere, in alternativa, $\left|\vec{D}_R\right| = 11.2km$).

Somma grafica di vettori qualunque in 2 dimensioni

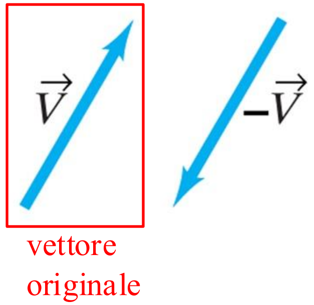
Abbiamo già presentato il **metodo coda-punta** per sommare graficamente due o più vettori consecutivi (a). Un metodo alternativo, ma equivalente, è il cosiddetto **metodo del parallelogramma** (b), **più conveniente quando si tratta di sommare vettori che non sono consecutivi ma hanno lo stesso punto di applicazione (ad es. nel caso di forze applicate ad uno stesso corpo, come vedremo più avanti).** In questo caso i due vettori vengono tracciati a partire da una stessa origine (ossia **facendo coincidere i loro punti di applicazione**), dopodiché si costruisce il parallelogramma che ha questi vettori come lati consecutivi: il vettore risultante sarà dato dalla **diagonale** del parallelogramma tracciata a partire dalla comune origine.



Altre operazioni con i vettori

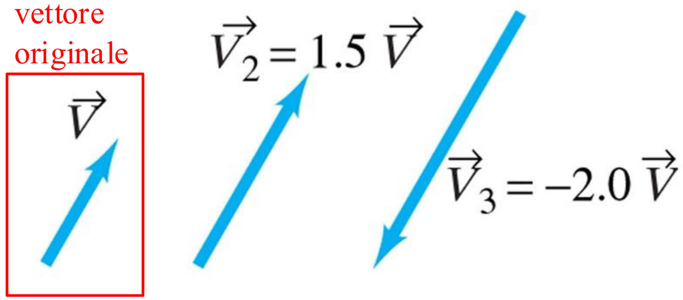
Vettore opposto

Il negativo (o opposto) di un vettore è un vettore che ha la stessa lunghezza (stesso modulo), la stessa direzione, ma verso opposto:



Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

La moltiplicazione di un vettore per uno scalare *b* dà un vettore il cui modulo è dato dal prodotto di *b* per il modulo del primo vettore, che ha la stessa direzione e che ha lo stesso verso se *b* è positivo, verso opposto se *b* è negativo:



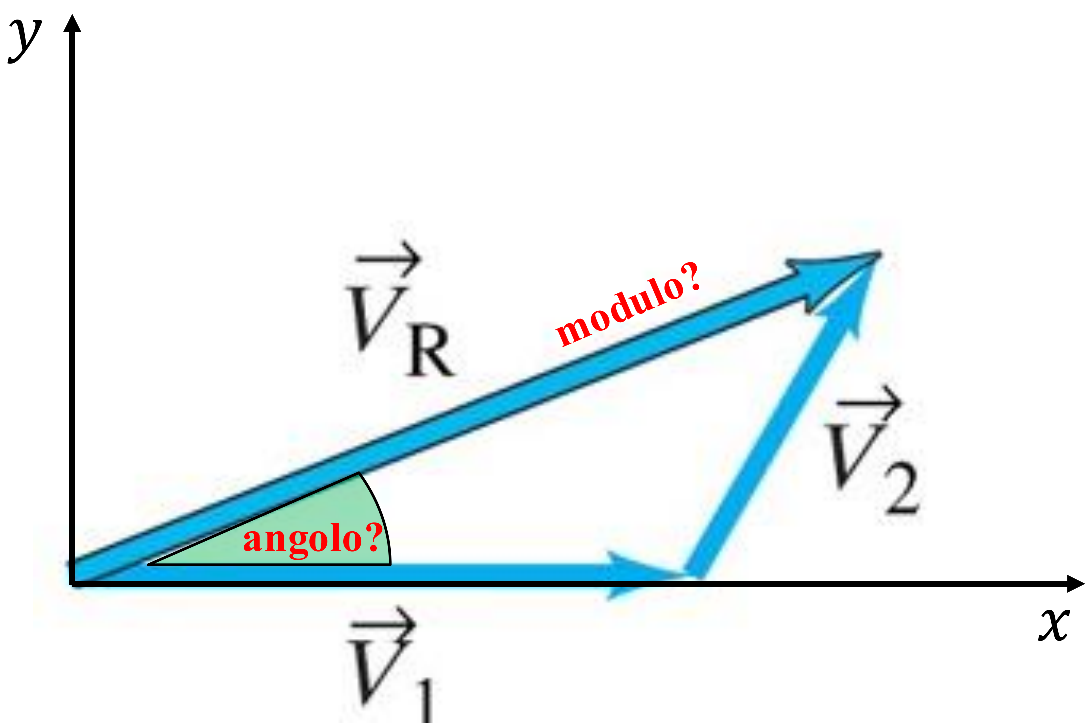
Sottrazione di vettori

La differenza tra due vettori è definita come la somma del primo vettore con l'opposto del secondo:

Calcolare modulo e argomento del vettore risultante

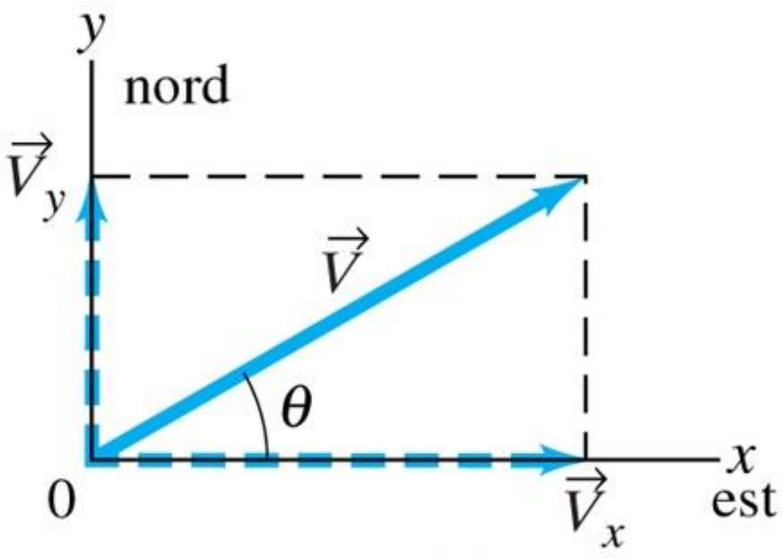
Bene, abbiamo visto come effettuare la **somma grafica** di 2 o più vettori qualunque sul piano per ottenere il **vettore risultante** (detto anche, semplicemente, «risultante»). Ma come fare per calcolare il **modulo** della risultante e **l'angolo** (detto anche «argomento») che essa forma con l'asse delle *x* positive?

Per questo occorre introdurre il fondamentale concetto di «**componenti**» di un vettore…



Scomposizione di un vettore nelle sue componenti

Le componenti di un vettore $\vec{V}$ rispetto agli assi coordinati di un certo sistema di riferimento, in questo caso a 2 dimensioni, sono due vettori $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$, perpendicolari tra diloro e diretti lungo gli assi cartesiani, la cui somma (effettuata ad es. col metodo del parallelogramma, che in questo caso è un rettangolo) **è uguale al vettore originario:**



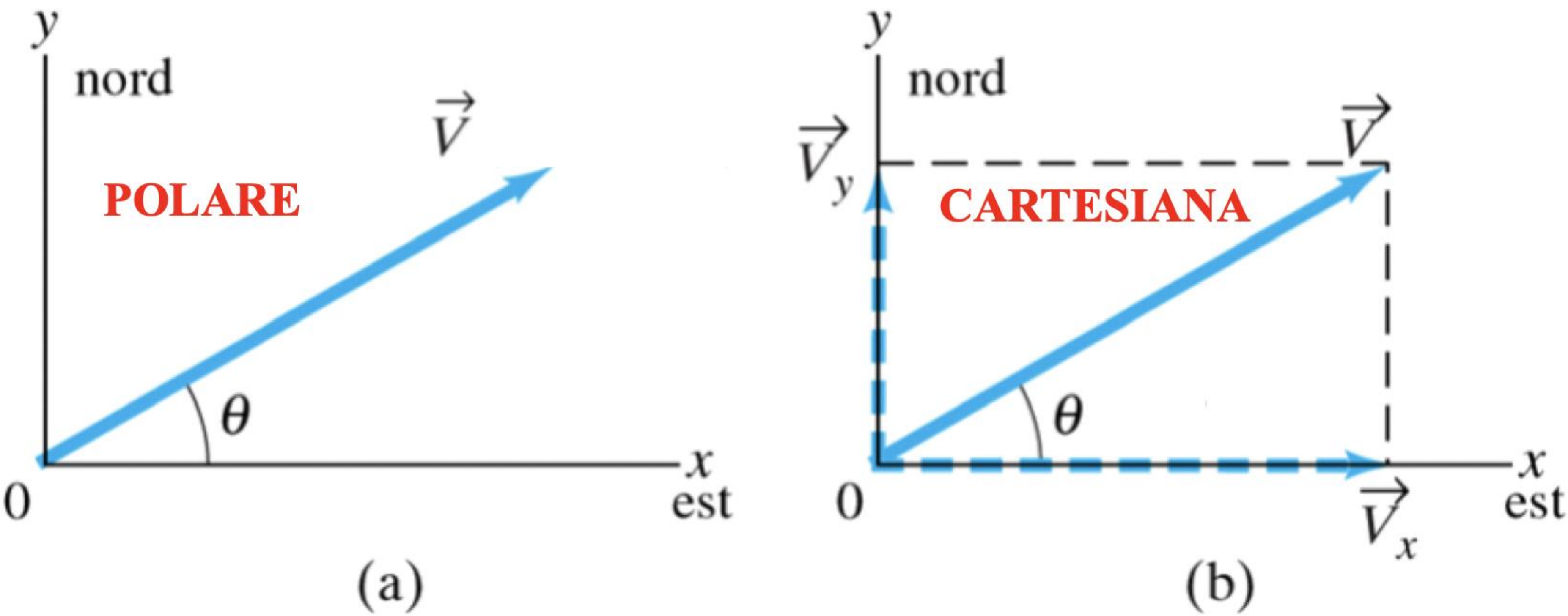
$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

Ai **moduli V_x e V_y delle due componenti** si attribuisce un segno positivo o negativo a seconda che i rispettivi vettori siano rivolti nel verso positivo o negativo degli assi coordinati, ed essi contengono tante informazioni quante il vettore di cui rappresentano le componenti.

Anticipiamo che **le componenti di un dato vettore cambieranno in funzione della scelta degli assi coordinati**, cioè del sistema di riferimento. Essendo questa scelta sempre arbitraria, spesso una buona selezione degli assi può ridurre il lavoro necessario per sommare dei vettori.

Rappresentazioni polare e cartesiana di un vettore in 2D

Abbiamo dunque **due modi** per rappresentare un vettore in un dato sistema di coordinate in 2D:
a) Darne il *modulo* V e l'*angolo* che il vettore forma con l'asse *x* (**rappresentazione polare**)
b) Darne le *componenti* V_x e V_y (**rappresentazione cartesiana**)

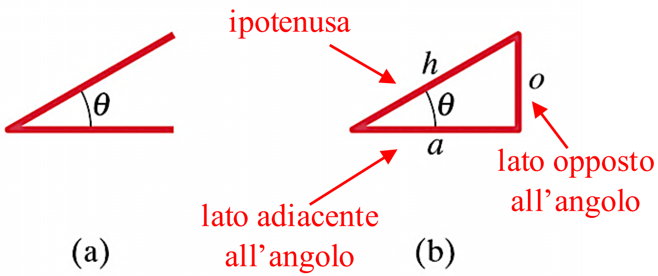


Intermezzo: un po' di trigonometria...☹

Per sommare vettori con il metodo delle componenti dobbiamo ricorrere alle **funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente** (i cui valori sono numeri puri e sono funzioni solo dell'angolo θ, cioè non cambiano se non cambia l'angolo):

Teorema di Pitagora

$$h^2 = o^2 + a^2$$



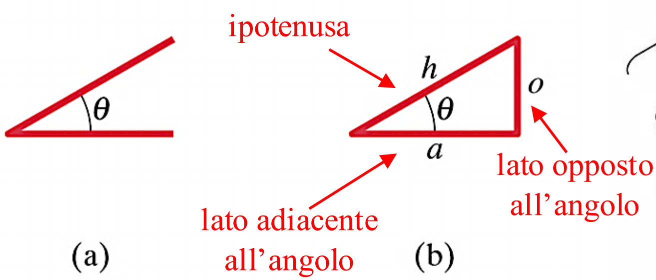
$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{lato\ \ opposto}{ipotenusa} = \dfrac{o}{h} \\ \cos\theta = \dfrac{lato\ \ adiacente}{ipotenusa} = \dfrac{a}{h} \\ tg\theta = \dfrac{lato\ \ opposto}{lato\ \ adiacente} = \dfrac{o}{a} \end{cases}$$

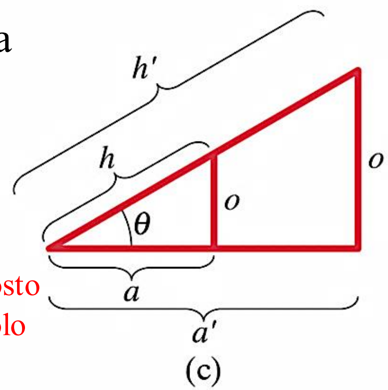
Intermezzo: un po' di trigonometria...☹

Per sommare vettori con il metodo delle componenti dobbiamo ricorrere alle **funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente** (i cui valori sono numeri puri e sono funzioni solo dell'angolo θ, cioè non cambiano se non cambia l'angolo):

Teorema di Pitagora

$$h^2 = o^2 + a^2$$





$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{lato\ \ opposto}{ipotenusa} = \dfrac{o}{h} = \dfrac{o'}{h'} \\ \cos\theta = \dfrac{lato\ \ adiacente}{ipotenusa} = \dfrac{a}{h} = \dfrac{a'}{h'} \\ tg\theta = \dfrac{lato\ \ opposto}{lato\ \ adiacente} = \dfrac{o}{a} = \dfrac{o'}{a'} \end{cases}$$

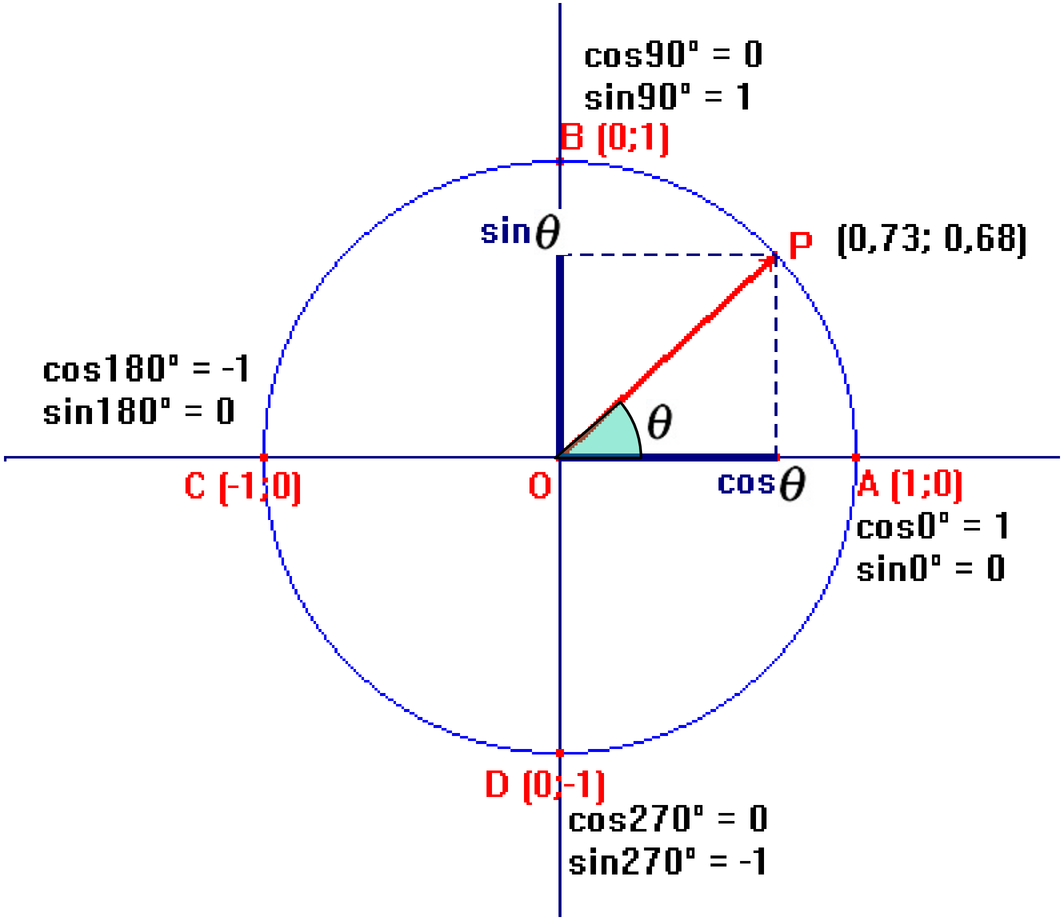
2 utili identità trigonometriche

$$\begin{cases} sen^2\theta + \cos^2\theta = \dfrac{o^2}{h^2} + \dfrac{a^2}{h^2} = \dfrac{o^2 + a^2}{h^2} = \dfrac{h^2}{h^2} = 1 \\ tg\theta = \dfrac{o}{a} = \dfrac{o}{h}\dfrac{h}{a} = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

(T.Pitagora, per h=1)

(Definizione di tangente)

Variazione delle funzioni trigonometriche sulla circonferenza goniometrica (di centro l’origine e raggio unitario)

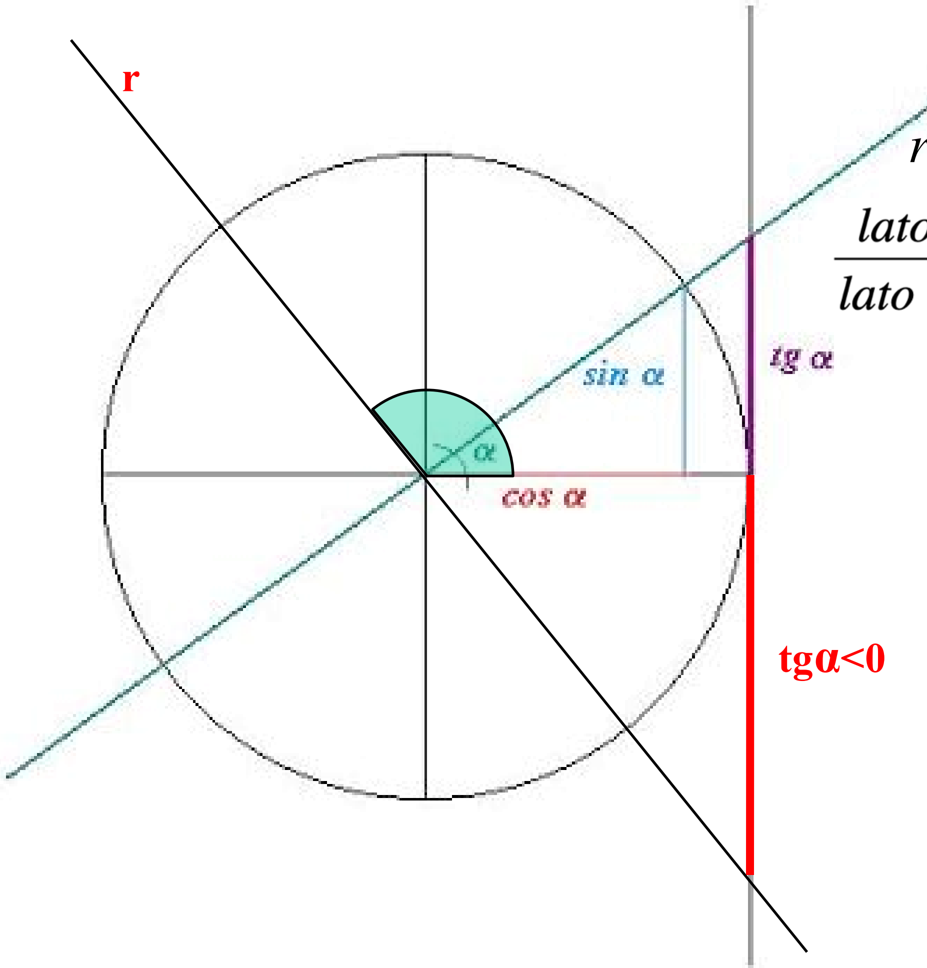


angolo in gradi	seno	coseno
0°	0	1
30°	0,5	0,87
45°	0,71	0,71
60°	0,87	0,5
90°	1	0
180°	0	-1

$$\sin\theta \in [-1,1]$$

$$\cos\theta \in [-1,1]$$

Tangente di un angolo e coefficiente angolare di una retta r: y = mx



$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = m$$

$$\frac{lato\ \ opposto}{lato\ \ adiacente}$$

Coefficiente angolare della retta r passante per l'origine: *y* = m*x*

angolo in gradi	seno	coseno	tangente
0°	0	1	0
30°	0,5	0,87	0,58
45°	0,71	0,71	1
60°	0,87	0,5	1,73
90°	1	0	--
180°	0	-1	0

$$tg\alpha \ \in [-\infty, +\infty]$$

Grafico delle funzioni trigonometriche

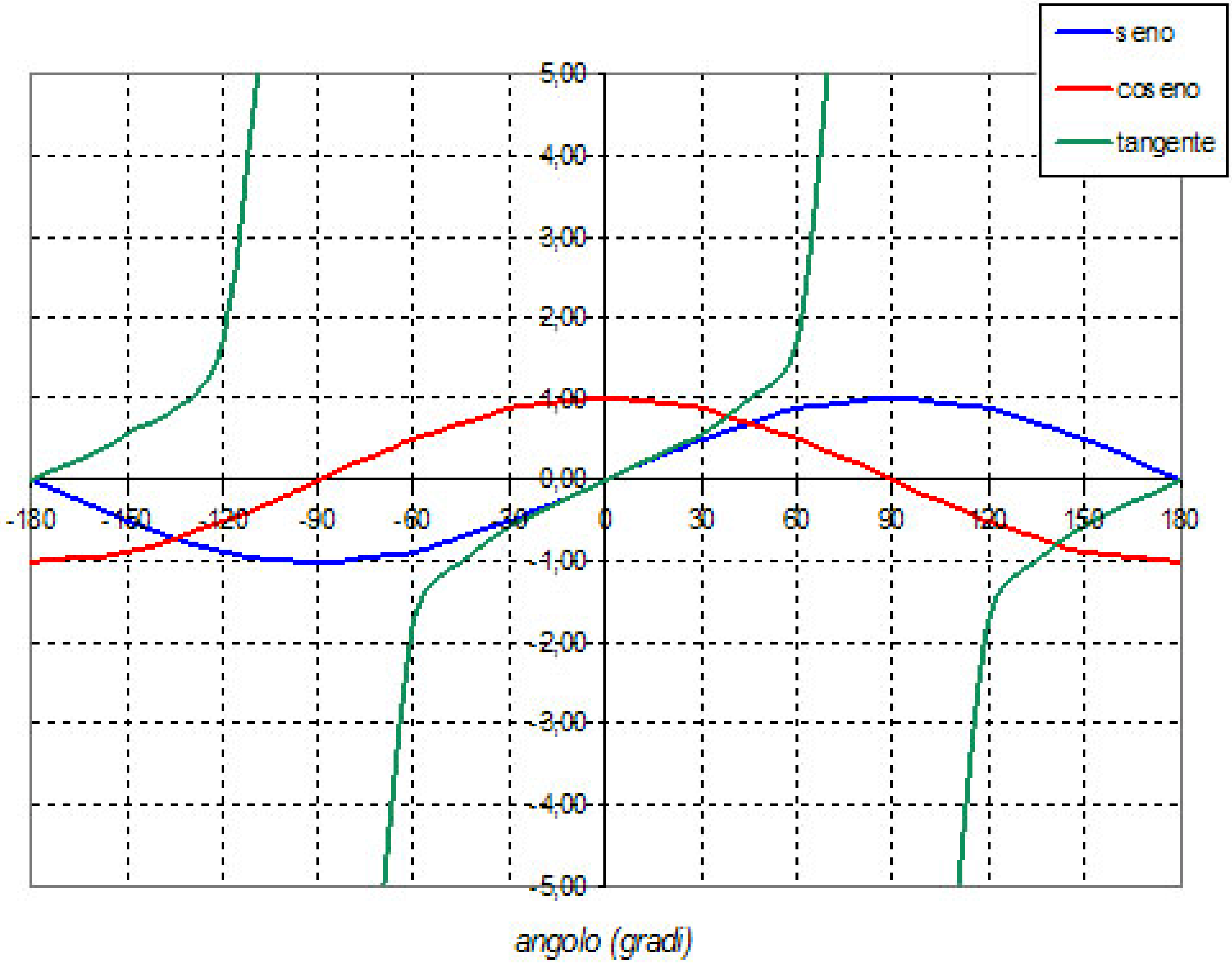
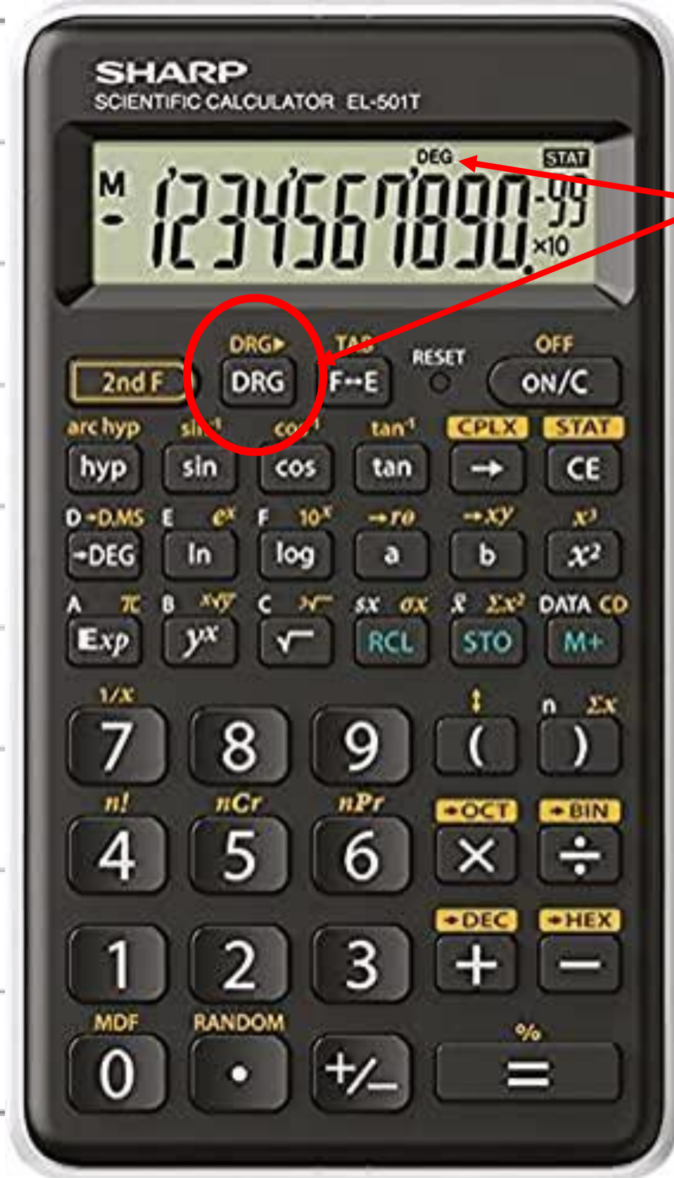


Tabella dei valori

Gradi	senα	cosα	tgα	Gradi	senα	cosα	tgα
0°	0	1	0	180°	0	-1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	N.D.	270°	-1	0	N.D.
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabella dei valori

Gradi	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



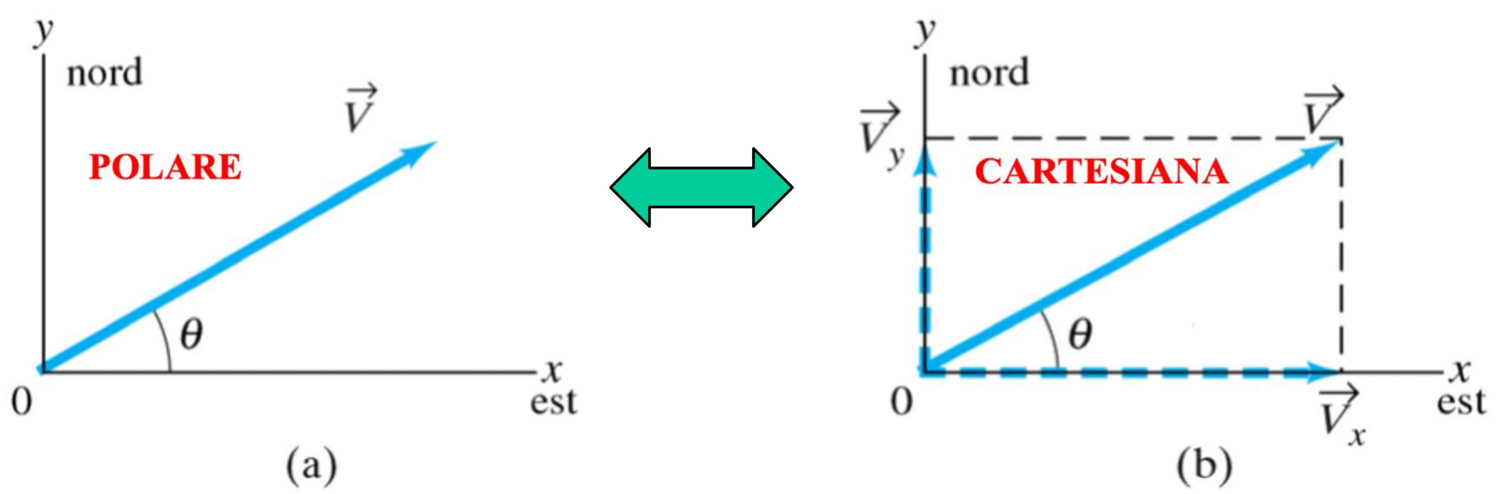
Quando usate la calcolatrice per calcolare il valore delle funzioni trigonometriche, state attenti all'impostazione delle unità di misura degli angoli, che può essere:

- gradi (DEG)
- radianti (RAD)
- gradianti (GRAD)

Accertatevi quindi (premendo il pulsante ripetutamente e controllando la scritta sopra il display numerico) che abbiate scelto l'unità di misura DEG.

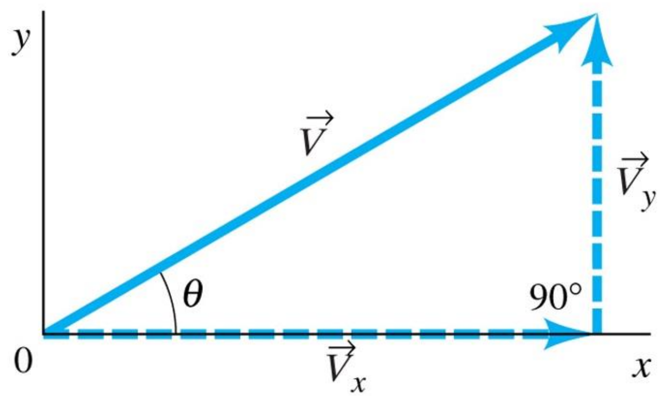
Cambiare la rappresentazione di un vettore

Le funzioni trigonometriche sono indispensabili per cambiare la rappresentazione di un vettore:



POLARE → CARTESIANA

$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{V_y}{V} \rightarrow V_y = Vsen\theta \\ \cos\theta = \dfrac{V_x}{V} \rightarrow V_x = V\cos\theta \end{cases}$$



CARTESIANA → POLARE

T. di Pitagora:

$$V^2 = V_x{}^2 + V_y{}^2 \square \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \square \quad \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$

L'arcotangente è la funzione inversa della tangente, ossia: arctg(x) equivale all'arco (o all'angolo) la cui tangente è x

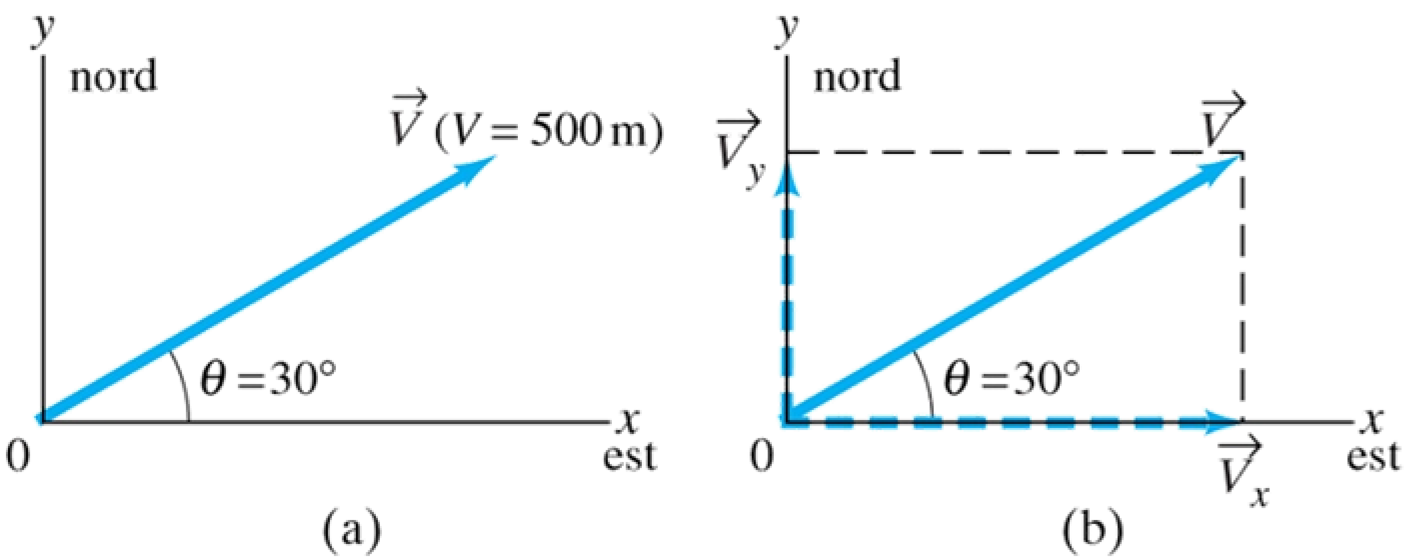
Cambiare la rappresentazione di un vettore: un esempio

Esempio. Supponiamo che il vettore in figura (a) rappresenti uno spostamento di 500m in direzione 30° nord, rispetto ad est (*rappresentazione polare*). Sapendo che sen 30° = 0.500 e cos 30° = 0.866, dalle formule appena viste avremo, nella *rappresentazione cartesiana*:

$$V_x = V\cos(30^\circ) = (500m)(0.866) = 433m\ (est) \qquad V_y = Vsen(30^\circ) = (500m)(0.500) = 250m\ (nord)$$

Da qui è anche possibile tornare indietro e ricavare il modulo e l'angolo (*rappresentazione polare*) per mezzo delle trasformazioni inverse:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(433m)^2 + (250m)^2} = 500m \qquad tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \Rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x} = arctg\frac{250m}{433m} = 30^\circ$$

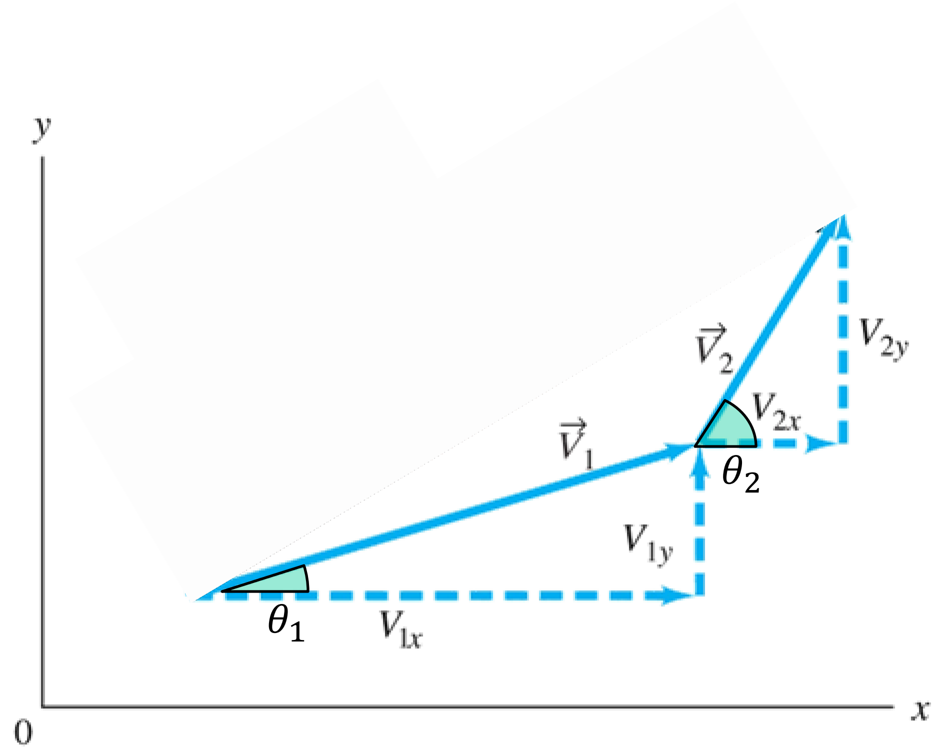


Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

Rappresentazione cartesiana dei vettori da sommare

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$



Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

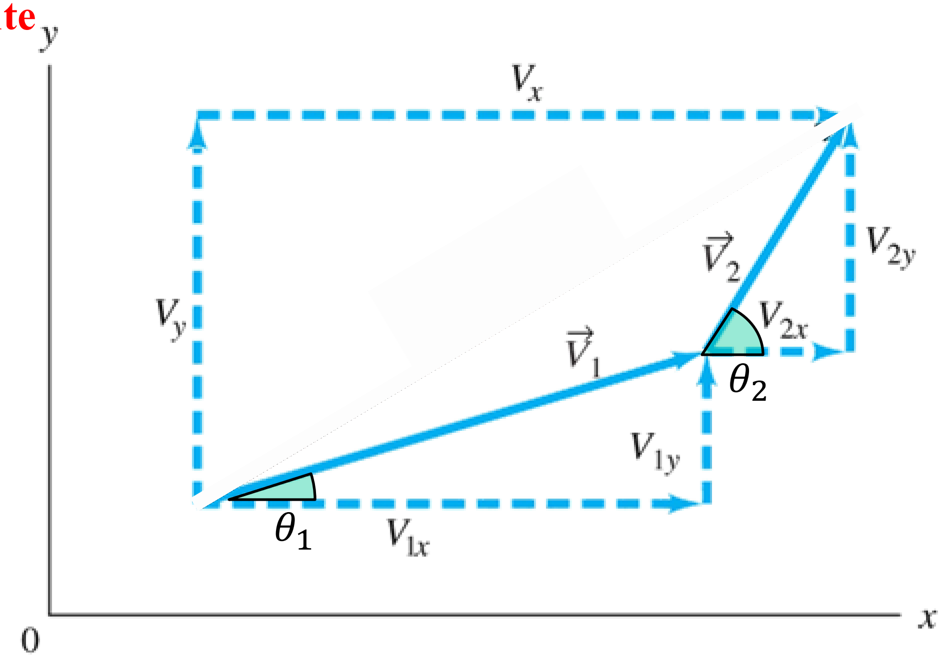
Rappresentazione cartesiana dei vettori da sommare

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

dopodiché avremo che le componenti V_x e V_y del vettore risultante, incognito, saranno uguali – rispettivamente – alla somma (**algebrica**, trattandosi di scalari – anche negativi) delle componenti x e y dei due vettori originari:

Rappresentazione cartesiana del vettore risultante

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$



Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

Rappresentazione cartesiana dei vettori da sommare

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

dopodiché avremo che le componenti V_x e V_y del vettore risultante, incognito, saranno uguali – rispettivamente – alla somma (**algebrica**, trattandosi di scalari – anche negativi) delle componenti x e y dei due vettori originari:

Rappresentazione cartesiana del vettore risultante

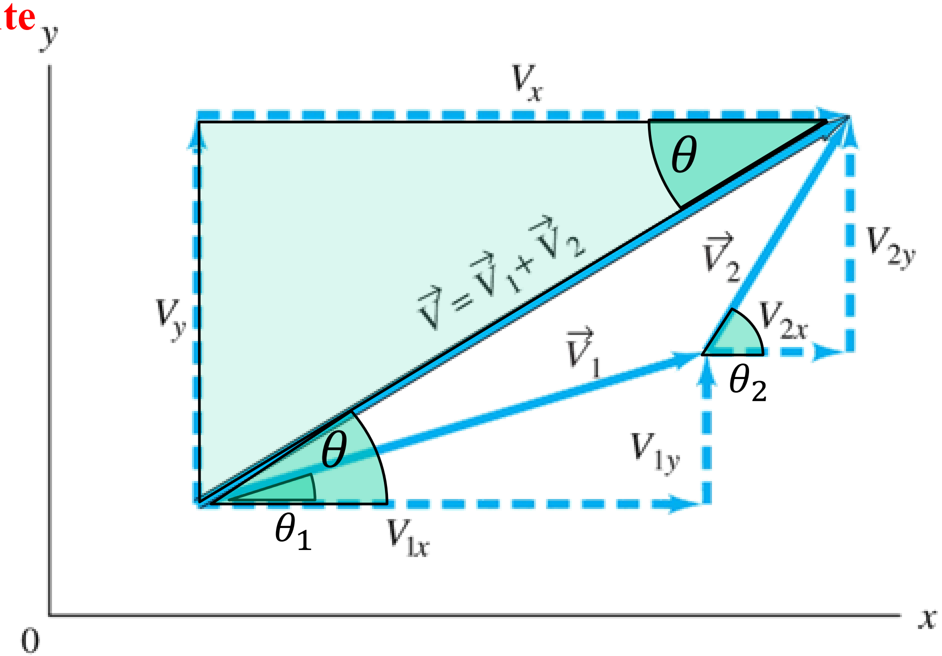
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$

da cui si possono poi ottenere modulo e direzione del vettore **risultante** per mezzo delle seguenti trasformazioni:

Rappresentazione polare del vettore risultante

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$



Somma di vettori per mezzo delle componenti

Come già detto, è importante ricordare che le componenti di un dato vettore cambiano se cambia la **scelta degli assi coordinati**, cioè del sistema di riferimento. In generale **conviene scegliere uno degli assi nella stessa direzione di uno dei vettori da sommare**, il quale avrà dunque una sola componente non nulla!). Vediamo subito un esempio…

Rappresentazione cartesiana del vettore risultante

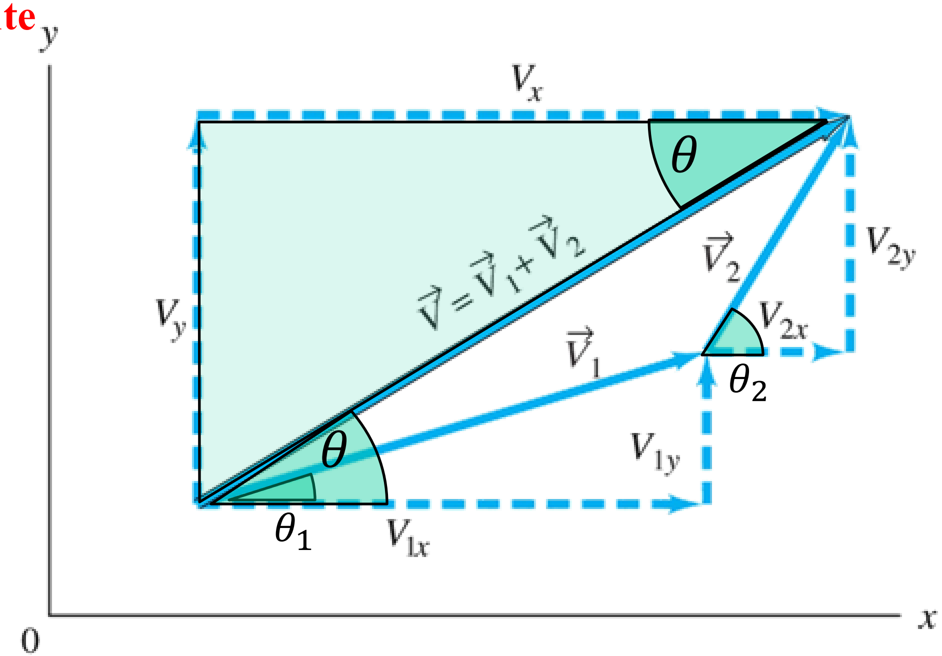
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$

da cui si possono poi ottenere modulo e direzione del vettore **risultante** per mezzo delle seguenti trasformazioni:

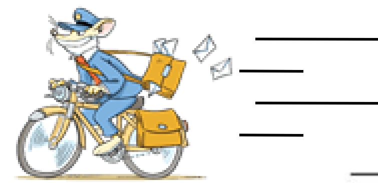
Rappresentazione polare del vettore risultante

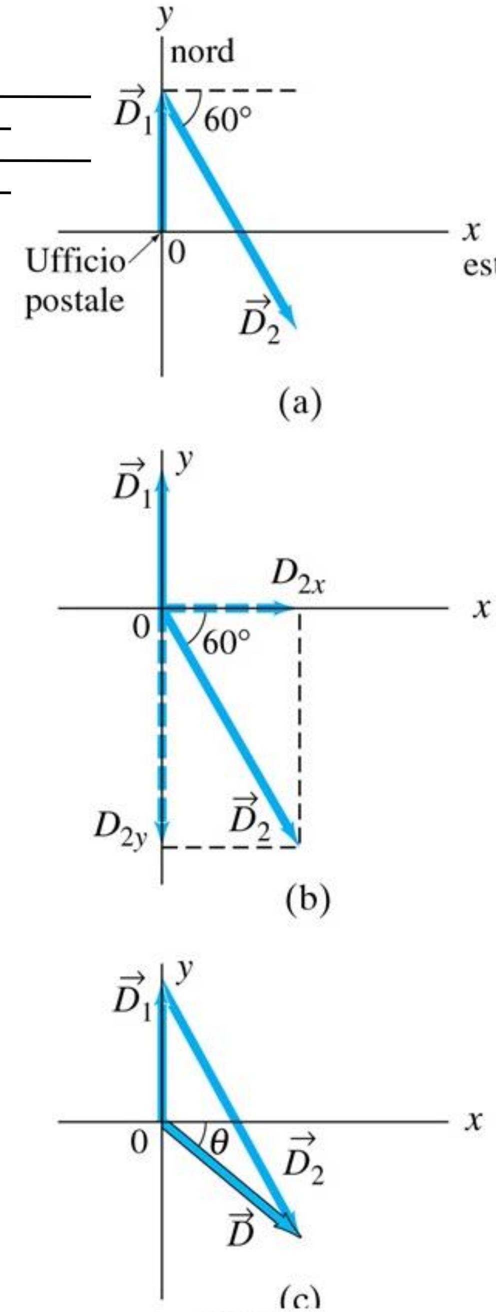
$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$



Esempio
Un maldestro postino di campagna lascia l'ufficio postale e guida per **22.0 km in direzione nord**, quindi prosegue in direzione **60.0° sud rispetto ad est per 47.0 km** verso un'altra città. Qual'è il suo spostamento complessivo rispetto all'ufficio postale?





Fisica

Soluzione
Scelta la direzione est come asse x positivo e la nord come y positivo, scomponiamo ogni vettore spostamento nelle sue componenti:

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = 0 km \\ D_{1y} = 22.0 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = (47.0 km)(\cos 60^\circ) = (47.0 km)(0.500) = 23.5 km \\ D_{2y} = (47.0 km)(sen 60^\circ) = -(47.0 km)(0.866) = -40.7 kn \end{cases}$$

$$\vec{D} \begin{cases} D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0 km + 23.5 km = +23.5 km \\ D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22.0 km + (-40.7 km) = -18.7 km \end{cases}$$

$$D = \sqrt{D_x^{\ 2} + D_y^{\ 2}} = \sqrt{(23.5 km)^2 + (-18.7 km)^2} = 30.0 km$$

$$tg\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-18.7 km}{23.5 km} = -0.796 \rightarrow \theta = arctg(-0.796) = -38.5^\circ$$

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550 k**m. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.