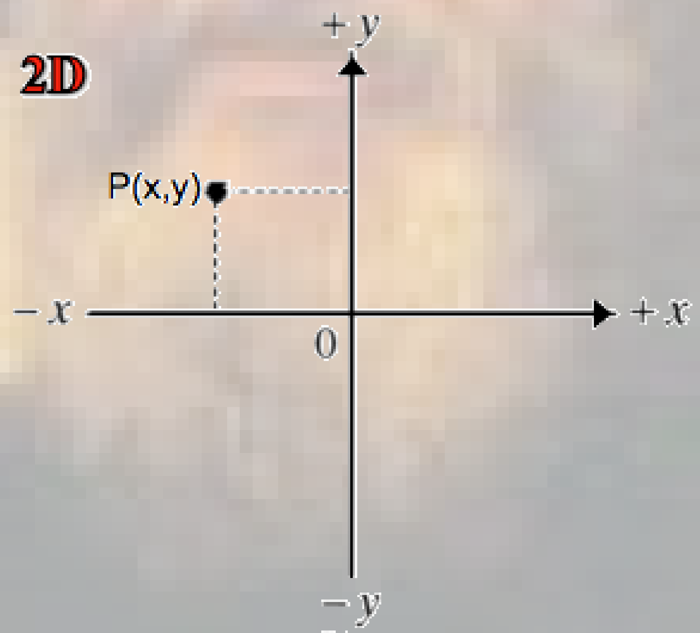
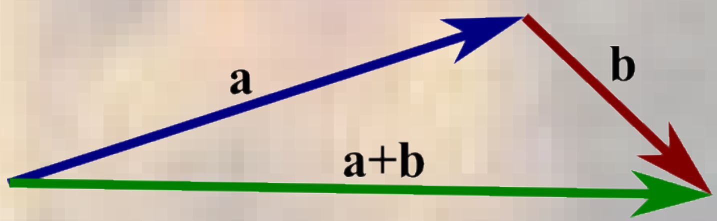
VERSO LA CINEMATICA in 2D…



I Vettori



Somma di vettori per mezzo delle componenti

Per sommare due vettori $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ utilizzando il **metodo delle componenti** occorre innanzitutto scomporre i due vettori nelle loro componenti proiettandoli lungo gli assi coordinati:

Rappresentazione cartesiana dei vettori da sommare

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\theta_1 \\ V_{1y} = V_1 \sin\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = V_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

dopodiché avremo che le componenti V_x e V_y del vettore risultante, incognito, saranno uguali – rispettivamente – alla somma (**algebrica**, trattandosi di scalari – anche negativi) delle componenti x e y dei due vettori originari:

Rappresentazione cartesiana del vettore risultante

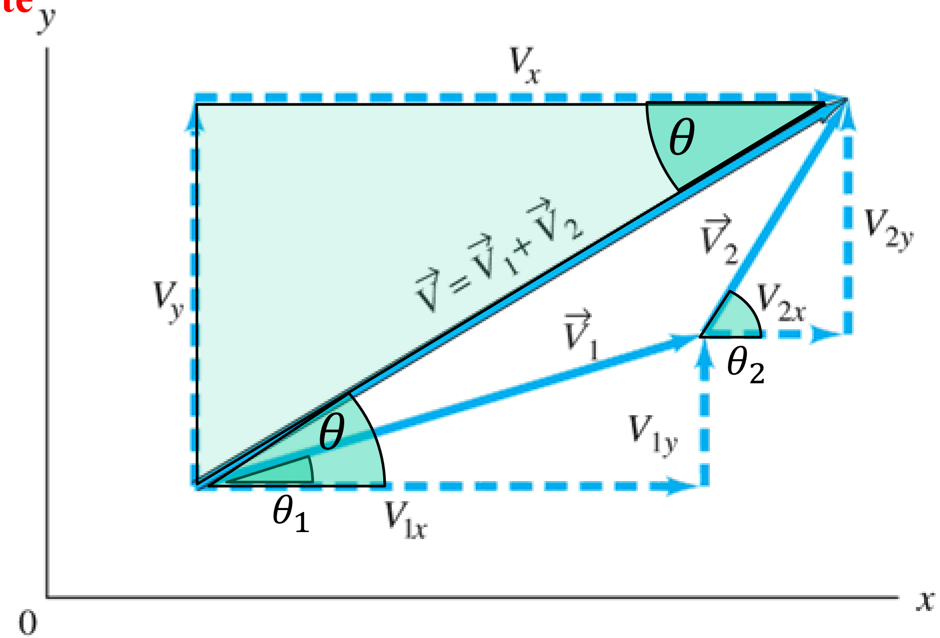
$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \rightarrow \begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = V_{1y} + V_{2y} \end{cases}$$

da cui si possono poi ottenere modulo e direzione del vettore **risultante** per mezzo delle seguenti trasformazioni:

Rappresentazione polare del vettore risultante

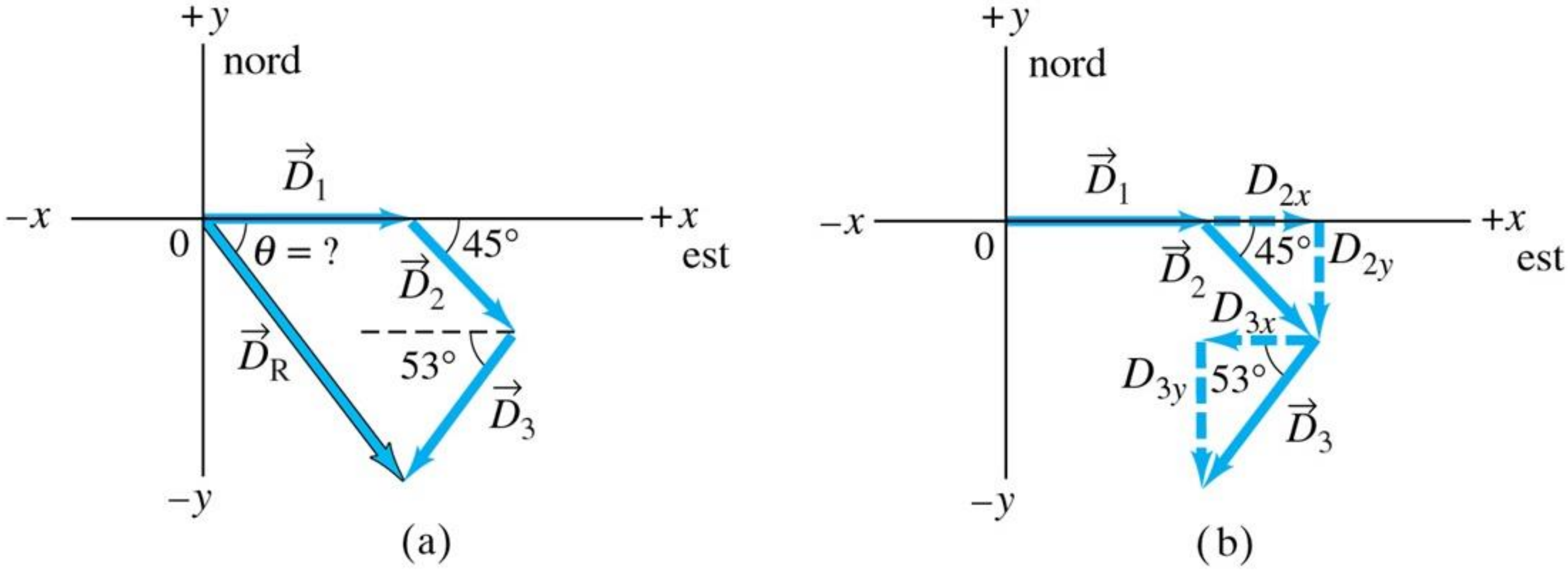
$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x} \rightarrow \theta = arctg\frac{V_y}{V_x}$$



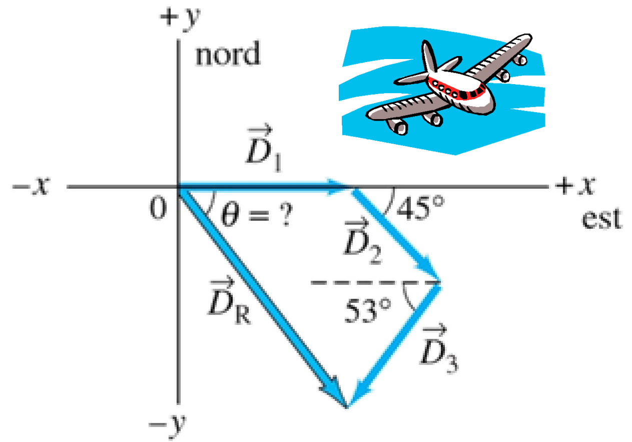
Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550 k**m. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

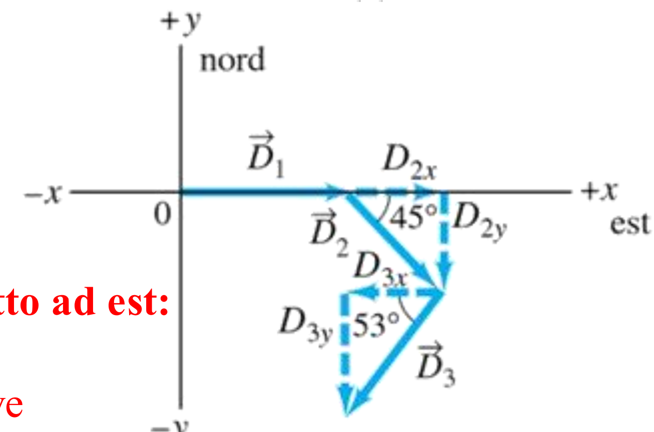


Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550** km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

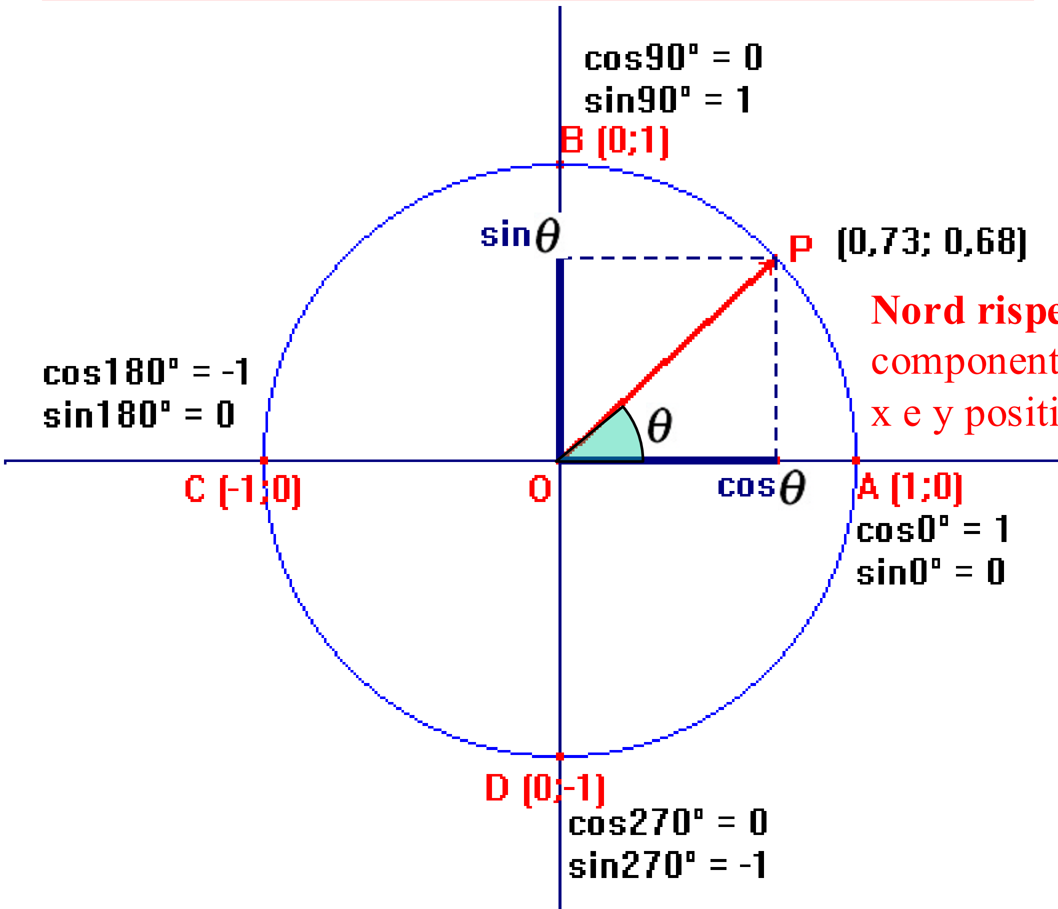
Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)



(b)



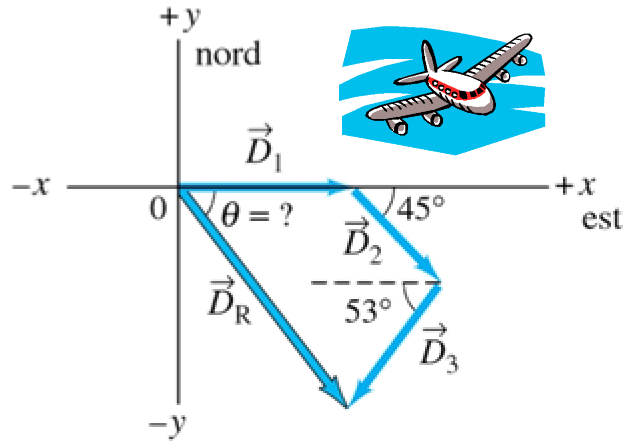
Nord rispetto ad est:
componenti
x e y positive

Esercizio

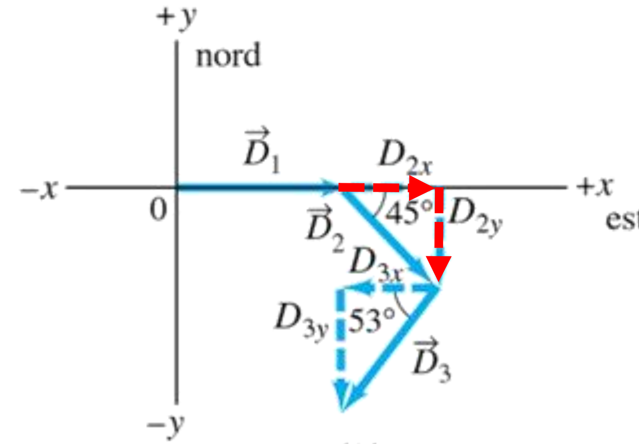
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550** km. Qual’è lo spostamento totale dell’aereo?

Avvertenza

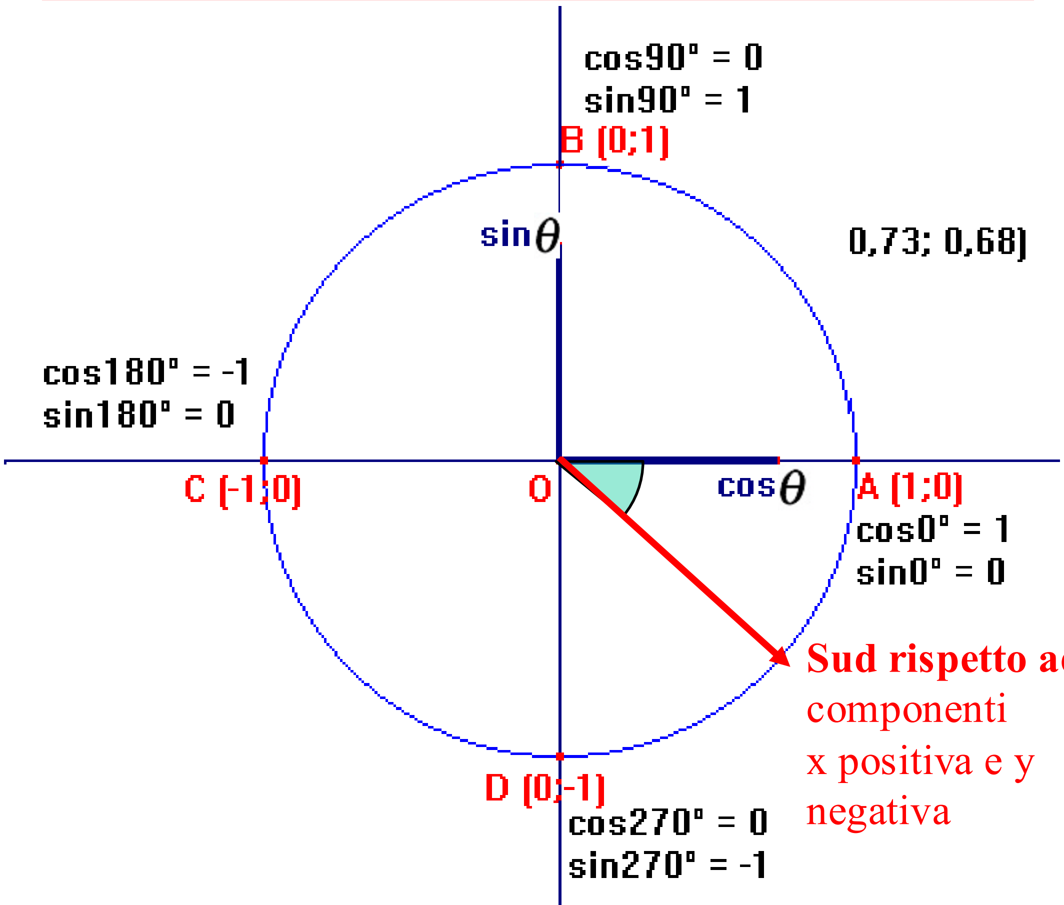
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)

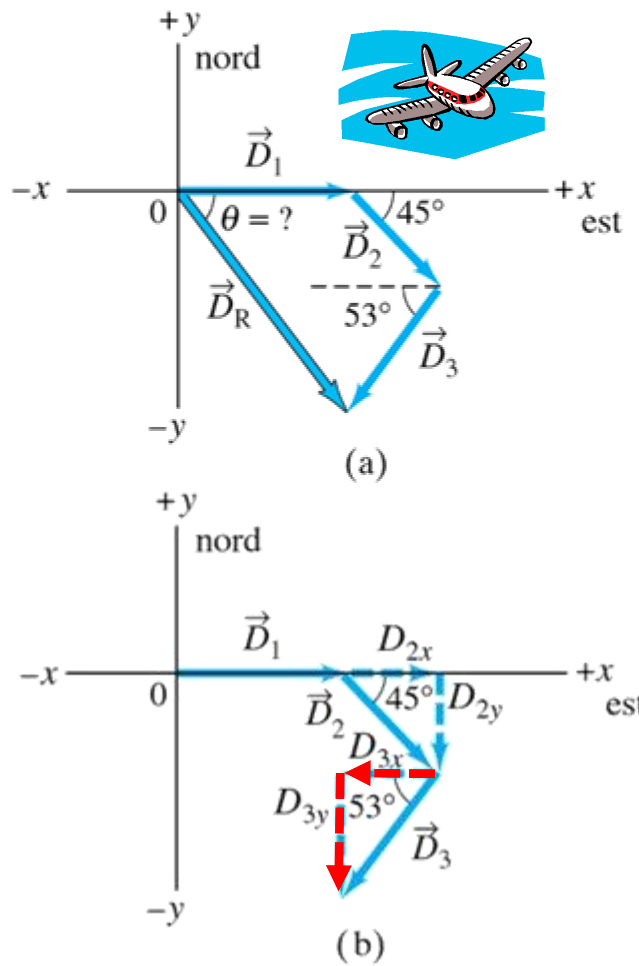


(b)

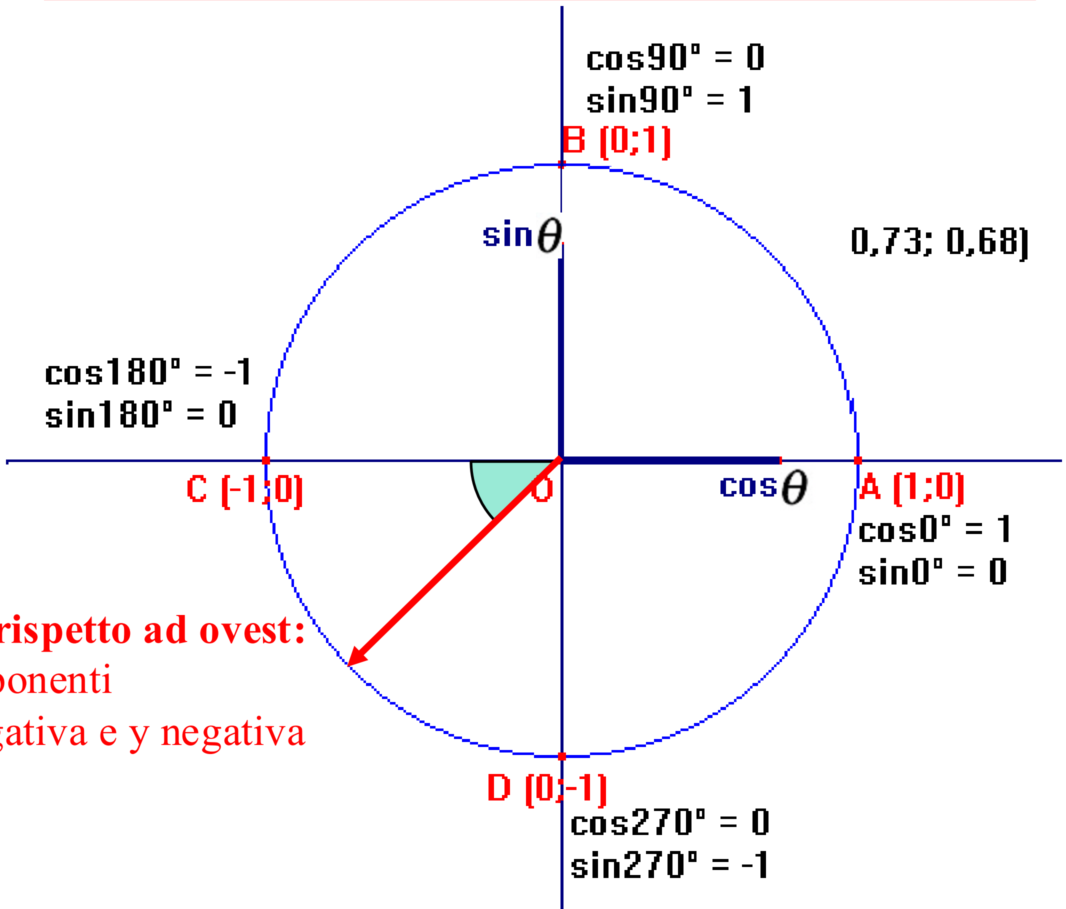


Sud rispetto ad est:
componenti
x positiva e y
negativa

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550** km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?



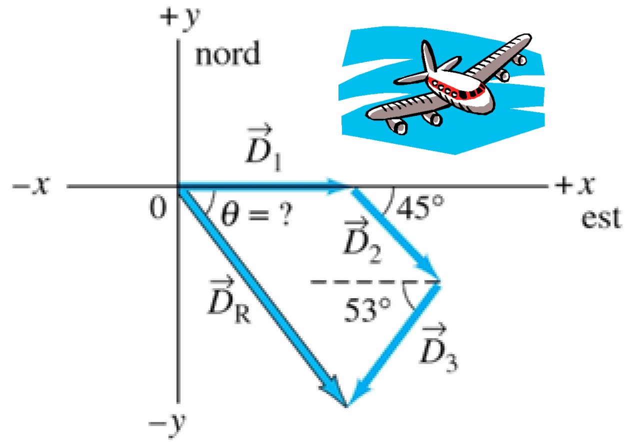
Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



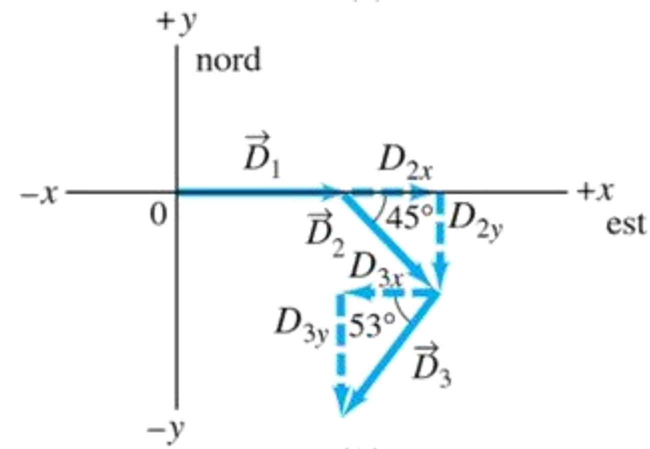
Sud rispetto ad ovest:
componenti
x negativa e y negativa

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550** km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

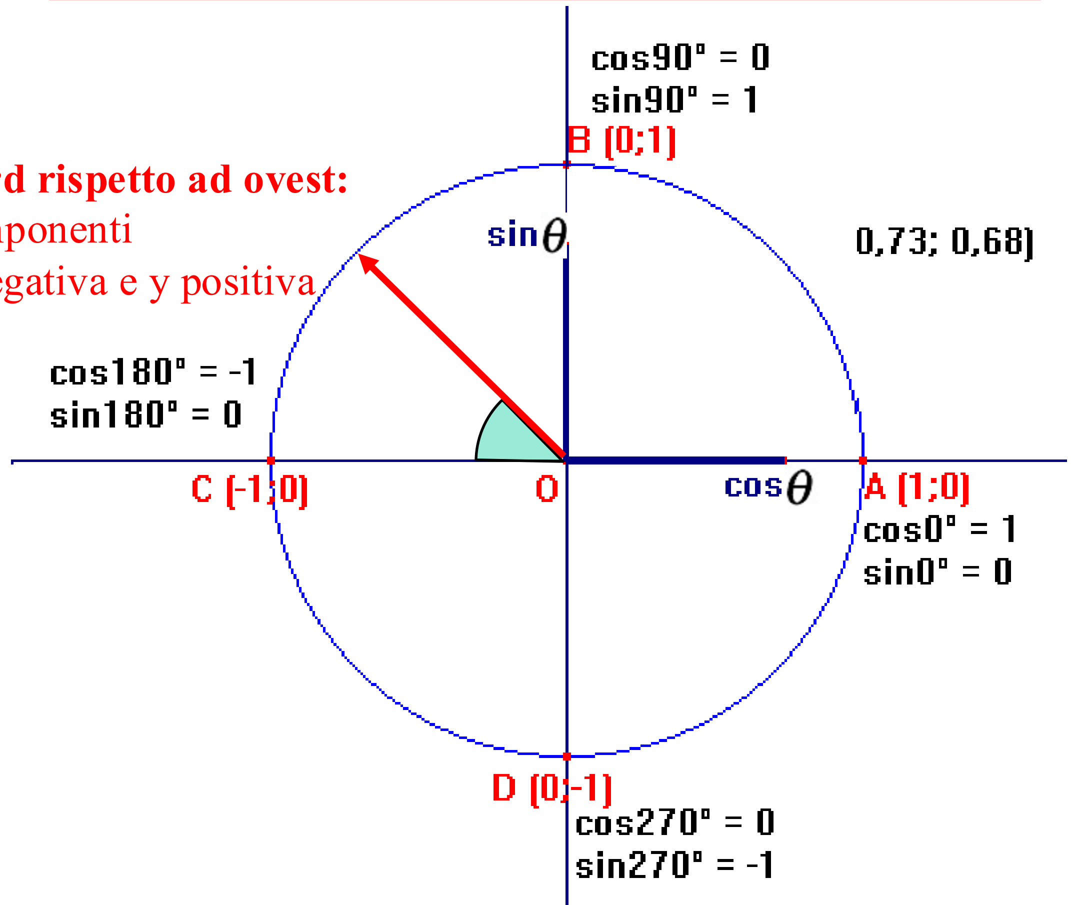


(a)



(b)

Nord rispetto ad ovest:
componenti
x negativa e y positiva



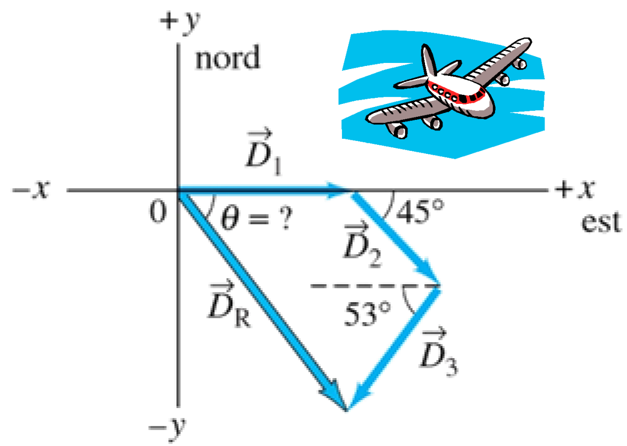
Esercizio

Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550 k**m. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

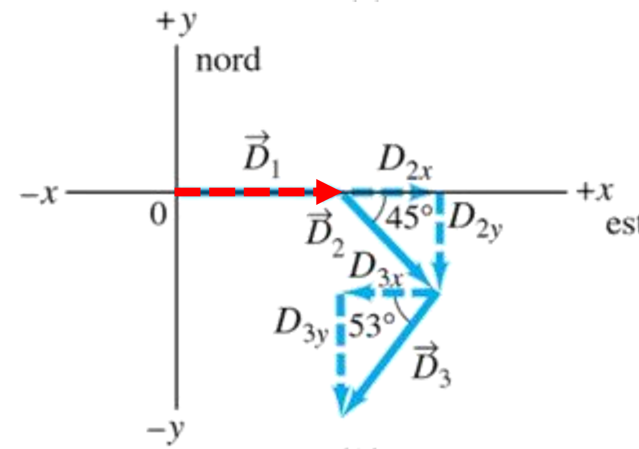
Avvertenza

Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$



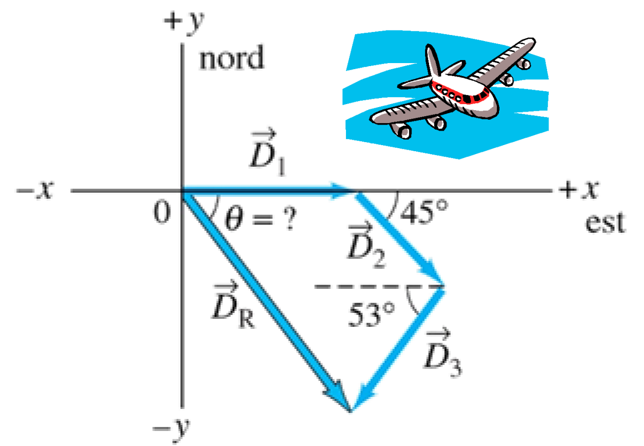
(a)



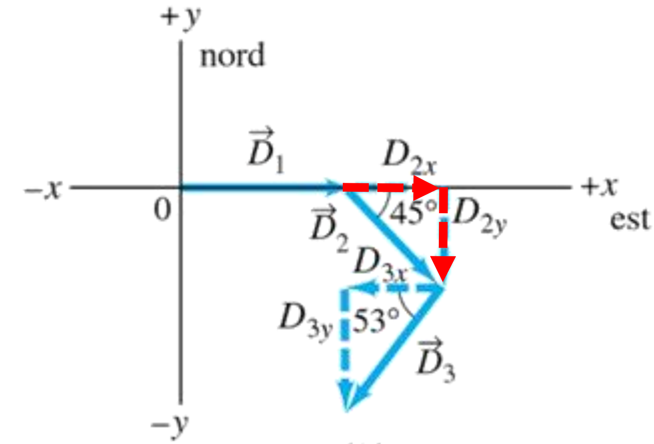
(b)

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550 k**m. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)



(b)

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440 km)(0.707) = 311 km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440 km)(0.707) = -311 km \end{cases}$$

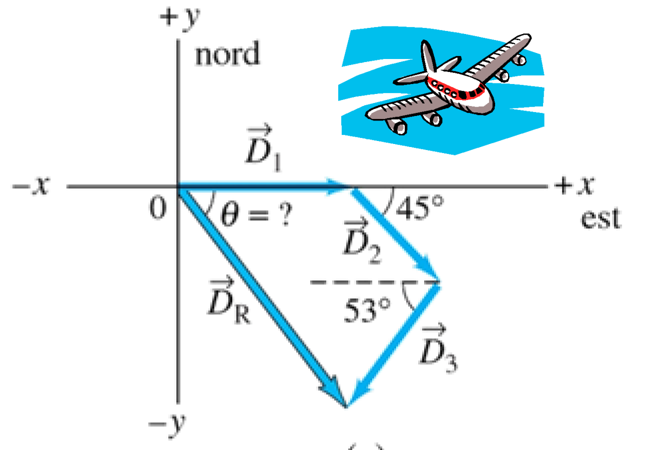
Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550 k**m. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.

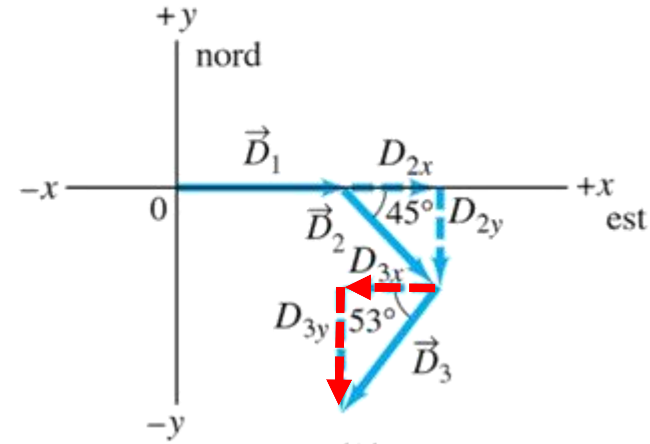
$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440 km)(0.707) = 311 km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440 km)(0.707) = -311 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_3 \begin{cases} D_{3x} = -D_3 \cos 53° = -(550 km)(0.602) = -331 km \\ D_{3y} = -D_3 sen 53° = -(550 km)(0.799) = -439 km \end{cases}$$

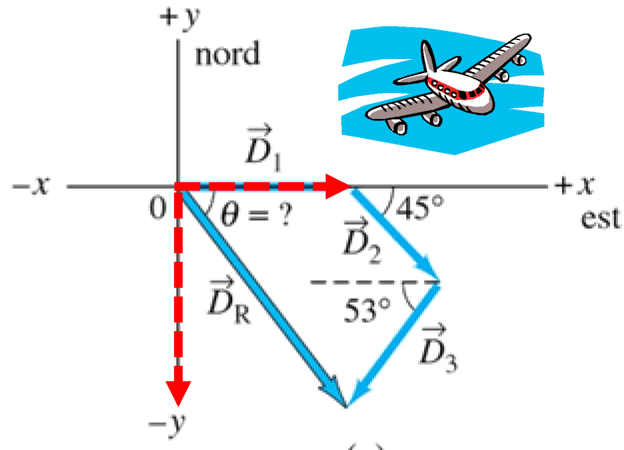


(a)



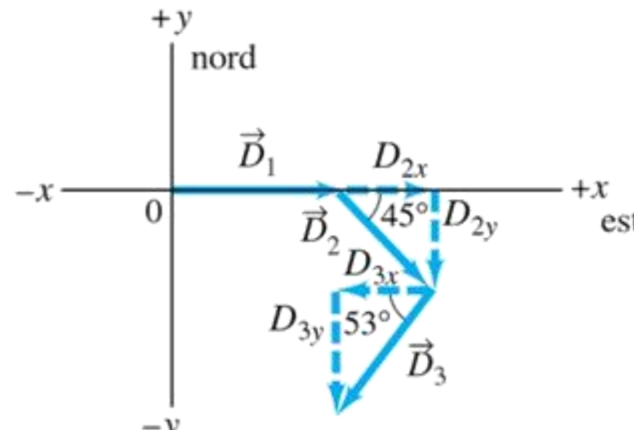
(b)

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550 k**m. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?



(a)

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(b)

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440km)(0.707) = 311km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440km)(0.707) = -311km \end{cases}$$

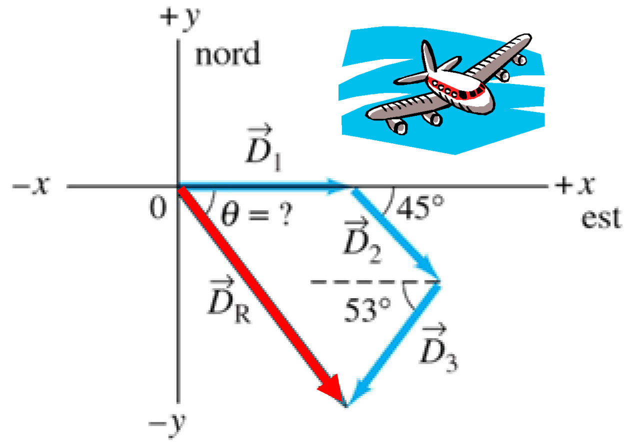
$$\vec{D}_3 \begin{cases} D_{3x} = -D_3 \cos 53° = -(550km)(0.602) = -331km \\ D_{3y} = -D_3 sen 53° = -(550km)(0.799) = -439km \end{cases}$$

Rappresentazione Cartesiana del vettore risultante $\rightarrow$

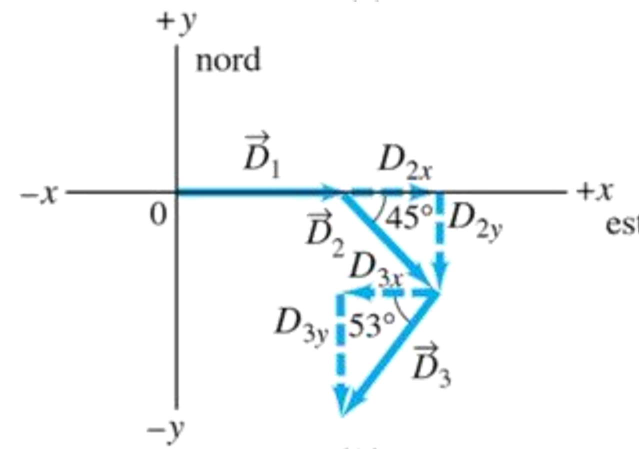
$$\vec{D}_R \begin{cases} D_{Rx} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 620km + 311km - 331km = 600km \\ D_{Ry} = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 0km - 311km - 439km = -750km \end{cases}$$

Esercizio
Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali, come mostrato in figura. La prima tratta è diretta **verso est per 620 km**; la seconda tratta è diretta **verso sud rispetto ad est (45°) per 440 km**; la terza a **53° sud rispetto ad ovest per 550** km. Qual'è lo spostamento totale dell'aereo?

Avvertenza
Ricordarsi di attribuire il segno negativo ad ogni componente che in figura è rivolta nelle direzioni x o y negative.



(a)



(b)

$$\vec{D}_1 \begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos 0° = D_1 = 620 km \\ D_{1y} = D_1 sen 0° = 0 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_2 \begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos 45° = (440 km)(0.707) = 311 km \\ D_{2y} = -D_2 sen 45° = -(440 km)(0.707) = -311 km \end{cases}$$

$$\vec{D}_3 \begin{cases} D_{3x} = -D_3 \cos 53° = -(550 km)(0.602) = -331 km \\ D_{3y} = -D_3 sen 53° = -(550 km)(0.799) = -439 km \end{cases}$$

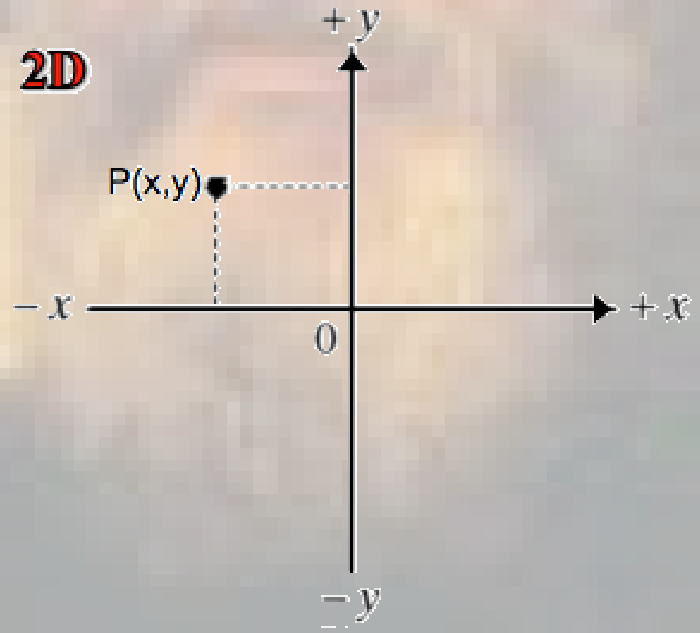
Rappresentazione Cartesiana del vettore risultante

$$\rightarrow \vec{D}_R \begin{cases} D_{Rx} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 620 km + 311 km - 331 km = 600 km \\ D_{Ry} = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 0 km - 311 km - 439 km = -750 km \end{cases}$$

Rappresentazione Polare del vettore risultante

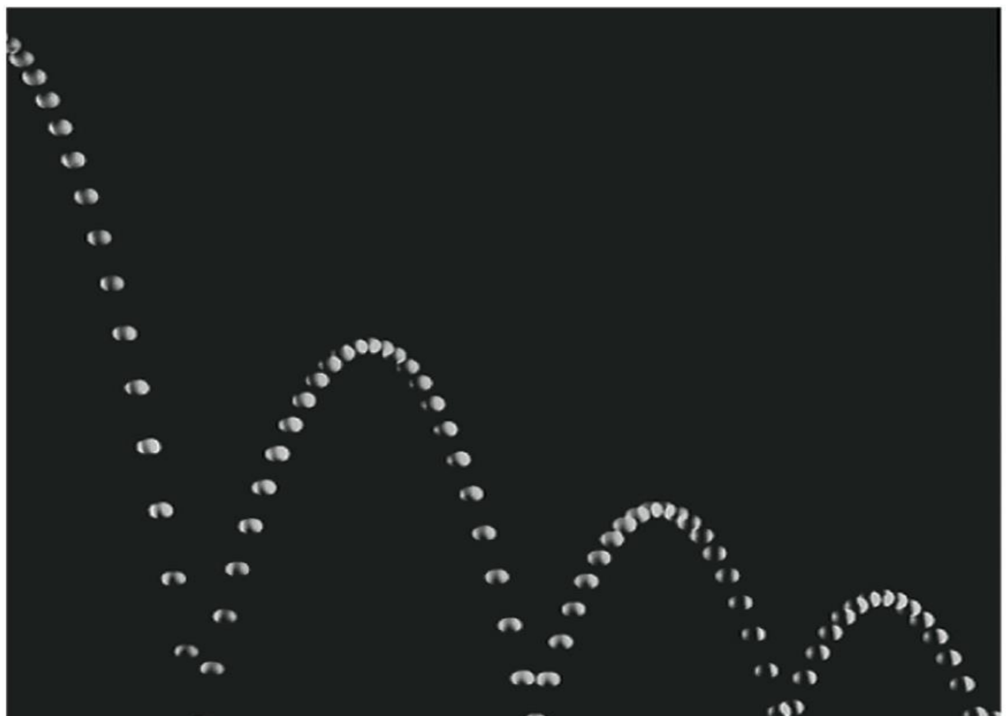
$$\rightarrow \vec{D}_R \begin{cases} D_R = \sqrt{D_{Rx}^{\ 2} + D_{Ry}^{\ 2}} = \sqrt{(600)^2 + (-750)^2}\, km = 960 km \\ tg\theta = \dfrac{D_{Ry}}{D_{Rx}} = \dfrac{-750 km}{600 km} = -1.25 \rightarrow \theta = arctg(-1.25) = -51° \end{cases}$$

LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI



Moto di un proiettile in due dimensioni

Generalizzando i risultati trovati per il moto unidimensionale uniformemente accelerato, esaminiamo adesso il moto di oggetti (palloni calciati, palline da golf, palle da baseball, pallottole, etc...) che si muovono in *due dimensioni* in prossimità della superficie terrestre: si tratta di esempi che possono essere tutti ricondotti al cosiddetto «**moto di un proiettile» in due dimensioni**. Trascureremo la resistenza dell'aria e considereremo il moto degli oggetti solo **dopo** che sono stati lanciati, cioè mentre si muovono sotto il solo effetto dell'**accelerazione di gravità** che, come sappiamo è sempre diretta verso il basso e ha modulo pari a $g=9.80\ m/s^2$.



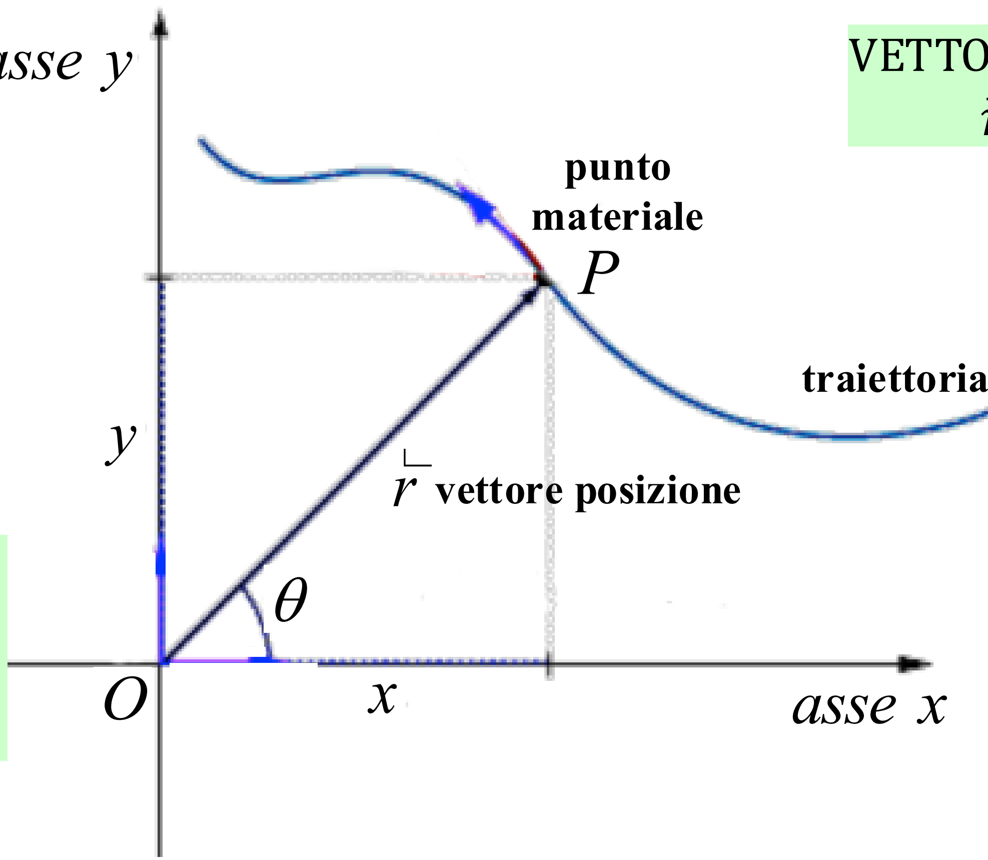
Fisica

Il vettore Posizione in due dimensioni

In due dimensioni diventa importante il «**vettore posizione**», la cui coda è situata sempre nell'origine del sistema di riferimento considerato mentre la punta indica, appunto, la posizione del punto materiale in movimento lungo la traiettoria. I moduli delle **componenti** del vettore posizione saranno quindi le **coordinate *x* e *y* del punto materiale** nel sistema di riferimento scelto.

VETTORE POSIZIONE

$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$



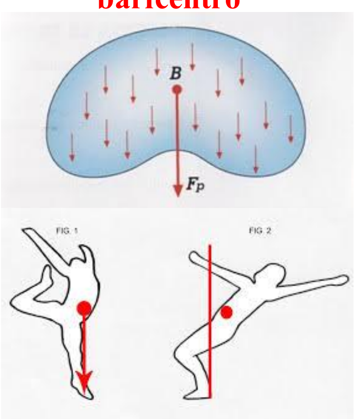
Sistema di Riferimento bidimensionale

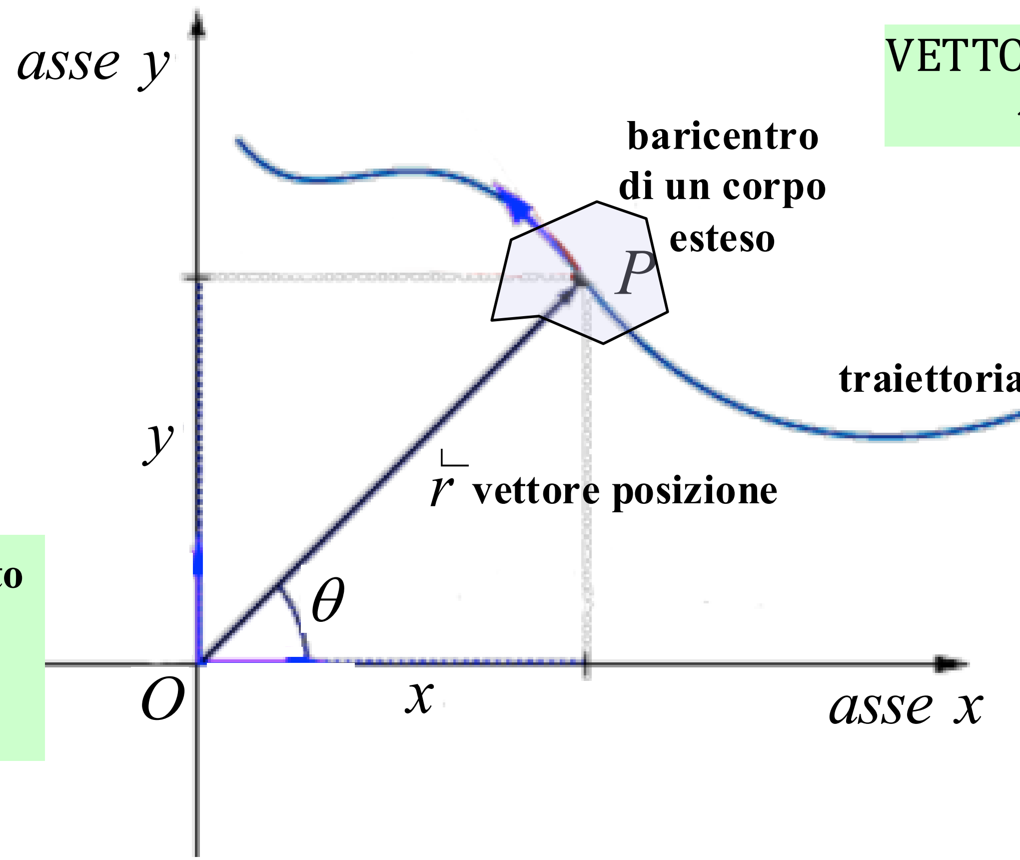
$\{xOy\}$

Il vettore Posizione in due dimensioni

Nel caso in cui, invece che un punto materiale, si debba studiare la traiettoria di un **corpo esteso**, il vettore posizione punterà al ***centro di massa***, o ***baricentro***, del corpo stesso. Per baricentro si intende quel punto (appartenente o no al corpo) che ha la proprietà di muoversi ***come se in esso fosse concentrata tutta la massa del corpo*** (il baricentro, ad esempio, è fondamentale nel determinare le condizioni di equilibrio di un corpo). Negli esempi il baricentro verrà fatto tipicamente coincidere, in prima approssimazione, con il **centro geometrico** del corpo che si sta considerando.

baricentro





VETTORE POSIZIONE

$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$

Sistema di Riferimento bidimensionale

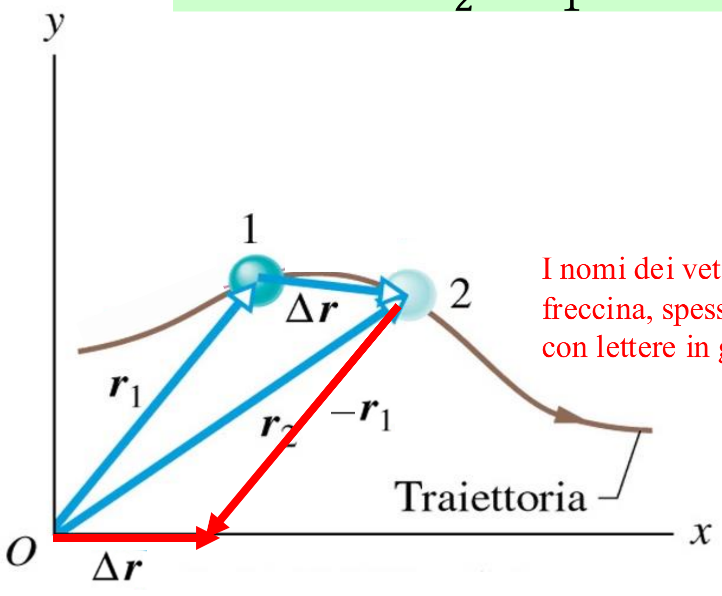
$\{xOy\}$

Spostamento e Velocità in due dimensioni

Sappiamo che la velocità media di un corpo è pari al rapporto tra il suo spostamento e il tempo impiegato a spostarsi. In due dimensioni lo **spostamento** sarà rappresentato come un *vettore ottenuto dalla differenza tra due vettori posizione ad istanti di tempo successivi…*

VETTORE SPOSTAMENTO

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$



I nomi dei vettori, oltre che con la solita freccina, spesso vengono rappresentati anche con lettere in grassetto…

Spostamento e Velocità in due dimensioni

Sappiamo che la velocità media di un corpo è pari al rapporto tra il suo spostamento e il tempo impiegato a spostarsi. In due dimensioni lo **spostamento** sarà rappresentato come un *vettore ottenuto dalla differenza tra due vettori posizione ad istanti di tempo successivi*, e la **velocità vettoriale media** sarà data quindi dal rapporto tra il vettore spostamento così ottenuto e l'intervallo di tempo considerato.

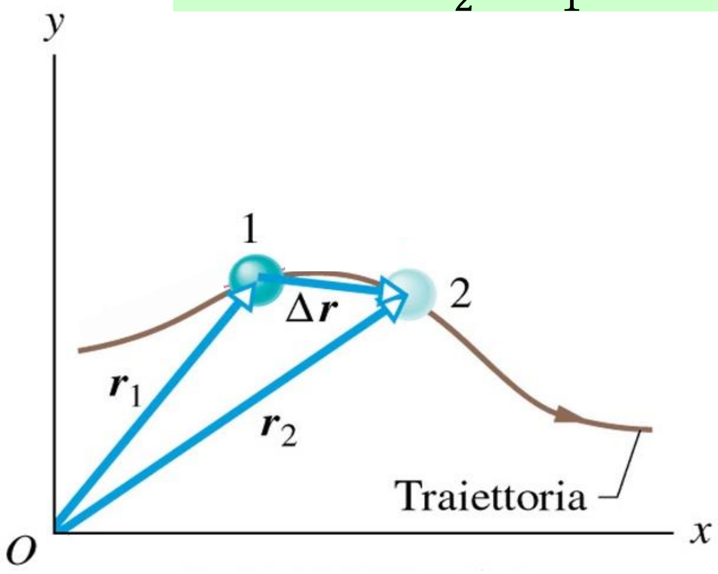
VETTORE SPOSTAMENTO

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$

Velocità vettoriale media

$$\vec{v}_{media} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore spostamento

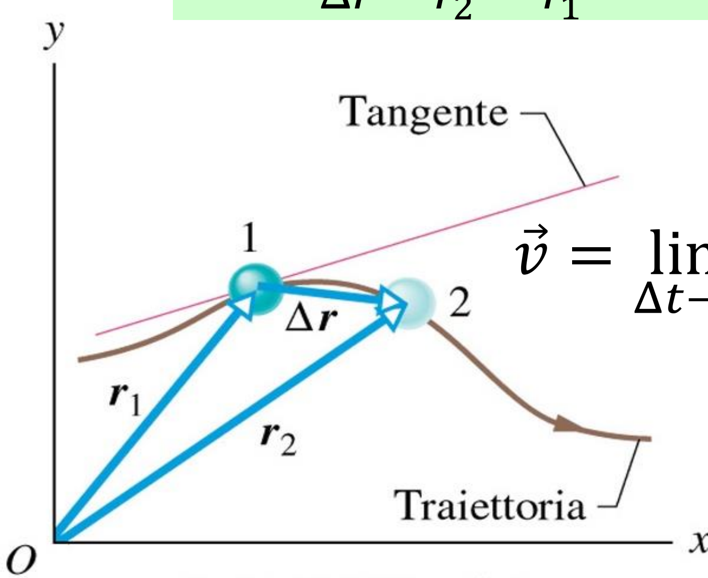


Velocità istantanea in due dimensioni

Sappiamo che la velocità media di un corpo è pari al rapporto tra il suo spostamento e il tempo impiegato a spostarsi. In due dimensioni lo **spostamento** sarà rappresentato come un *vettore ottenuto dalla differenza tra due vettori posizione ad istanti di tempo successivi*, e la **velocità vettoriale media** sarà data quindi dal rapporto tra il vettore spostamento così ottenuto e l'intervallo di tempo considerato. Facendo **tendere a zero** l'intervallo di tempo considerato, la direzione del vettore velocità media si avvicina a quella della **retta tangente alla traiettoria** nella posizione $\overrightarrow{r_1}$. Si ottiene così la **velocità vettoriale istantanea** $\vec{v}$ nel punto 1 (cioè la derivata prima del vettore posizione in quel punto, vedi immagine a sinistra), che potrà a sua volta essere scomposta nelle sue **componenti** lungo i due assi, $\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$ (vedi immagine a destra).

VETTORE SPOSTAMENTO

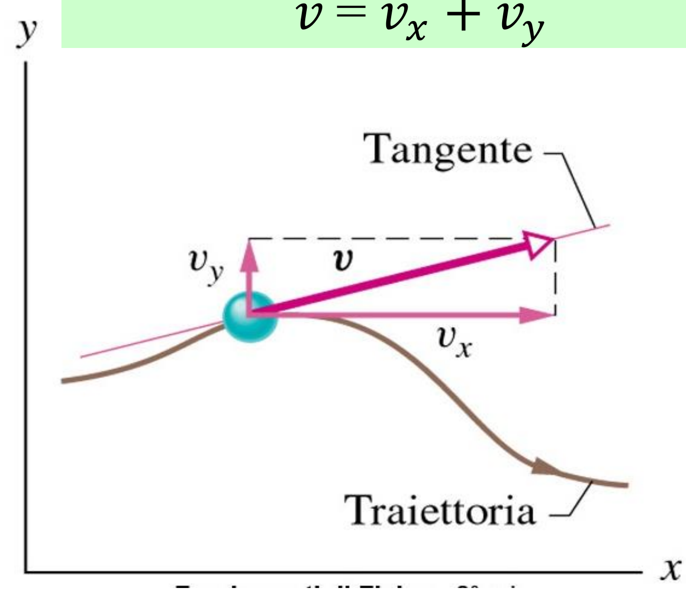
$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

VETTORE VELOCITA' ISTANTANEA

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$$

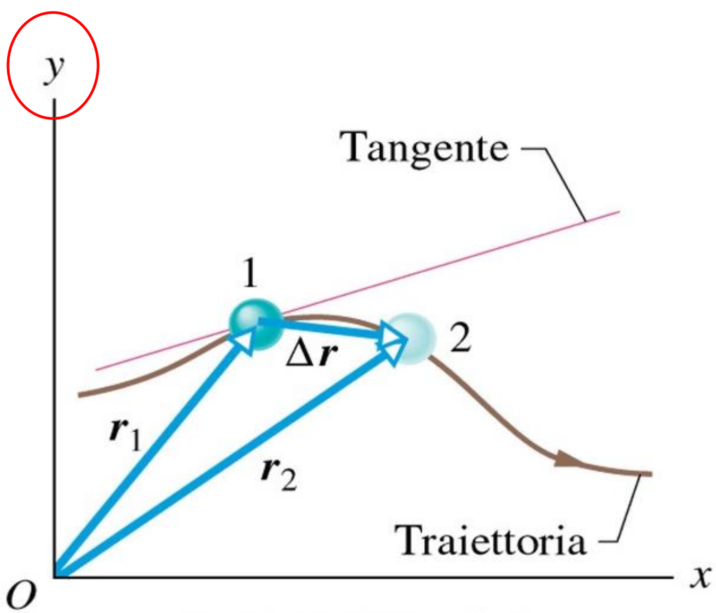


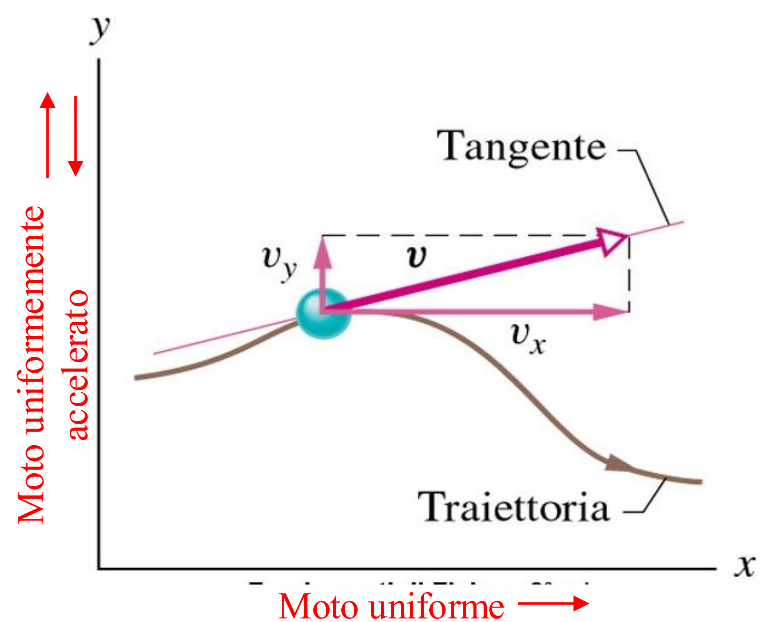
Moto di un «proiettile» in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile (ossia di un qualunque corpo) soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché *l'accelerazione di gravità è diretta solo e costantemente verso il basso* (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

accelerazione di gravità $\vec{g}$





Moto di un «proiettile» in due dimensioni

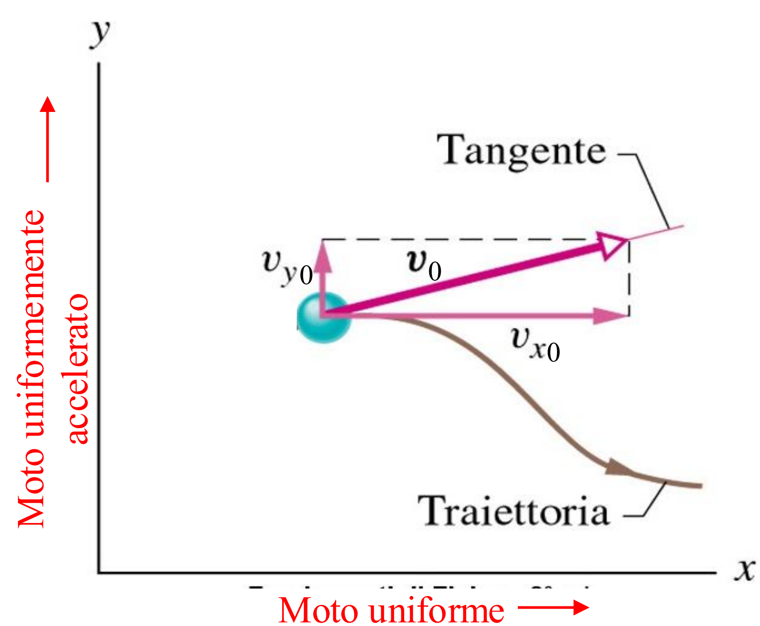
Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile (ossia di un qualunque corpo) soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché *l'accelerazione di gravità è diretta solo e costantemente verso il basso* (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

accelerazione
di gravità $\vec{g}$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$



Moto di un «proiettile» in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché *l'accelerazione di gravità è diretta solo e costantemente verso il basso* (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:** $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$

accelerazione di gravità $\vec{g}$

Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = -g = \text{cost}$)

moto orizzontale (uniforme $a_x=0$, $v_x=\text{cost.}$)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

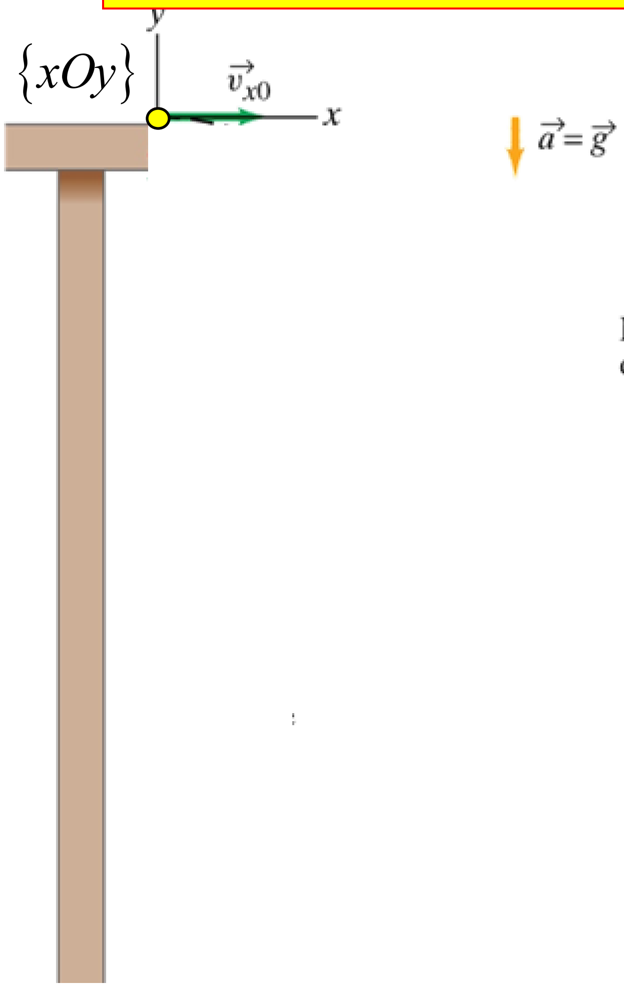
moto verticale (unif.accel. $a_y = -g$)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

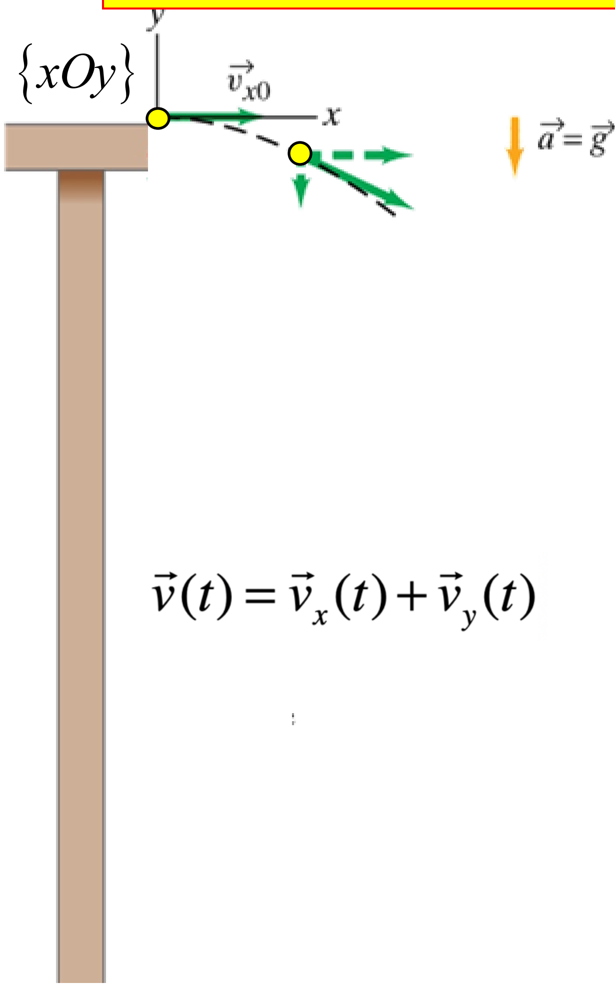


Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Moto
di un proiettile

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



Moto di un proiettile

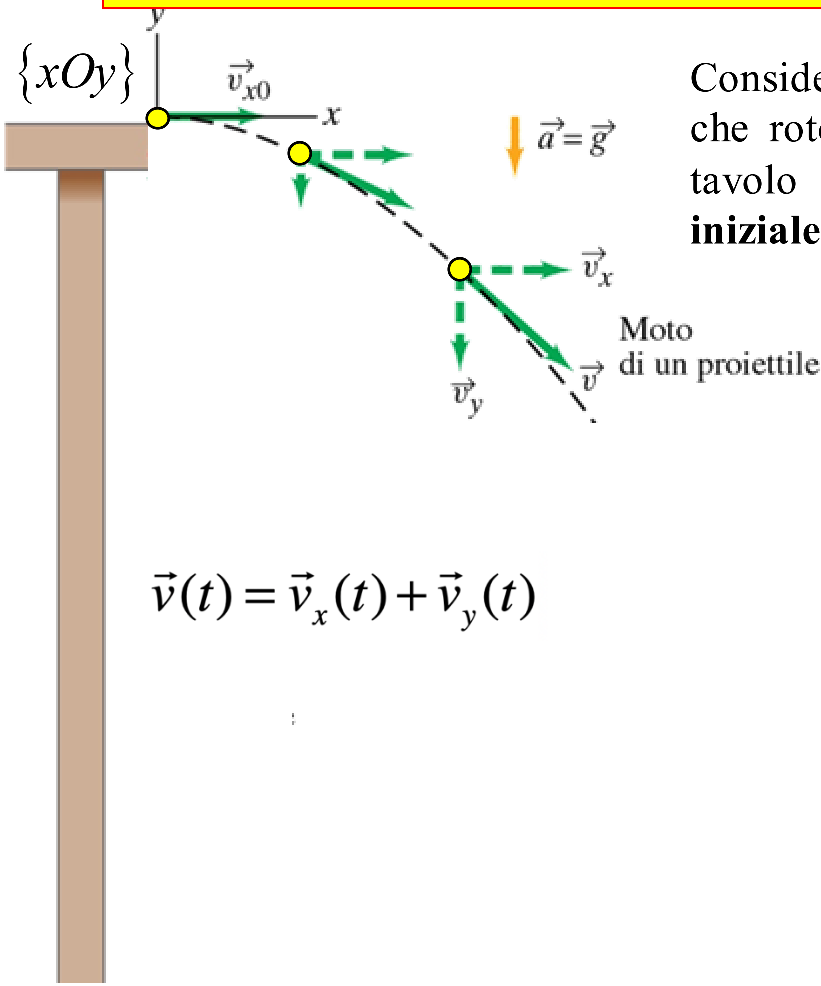
Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



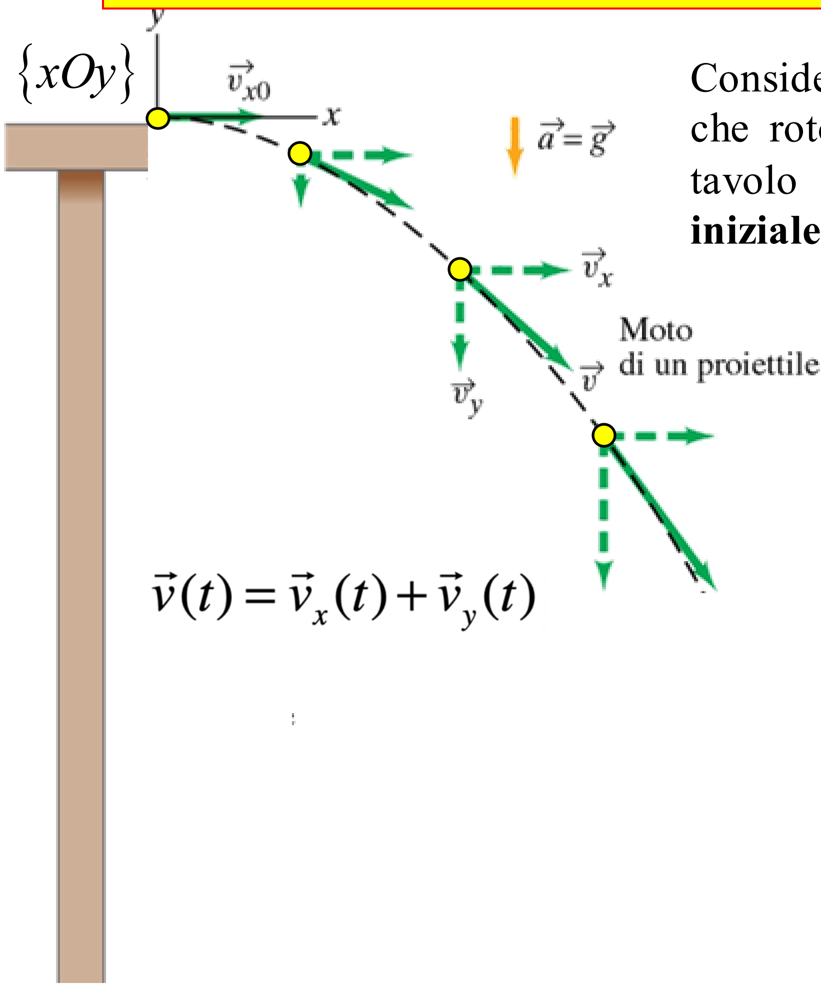
Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



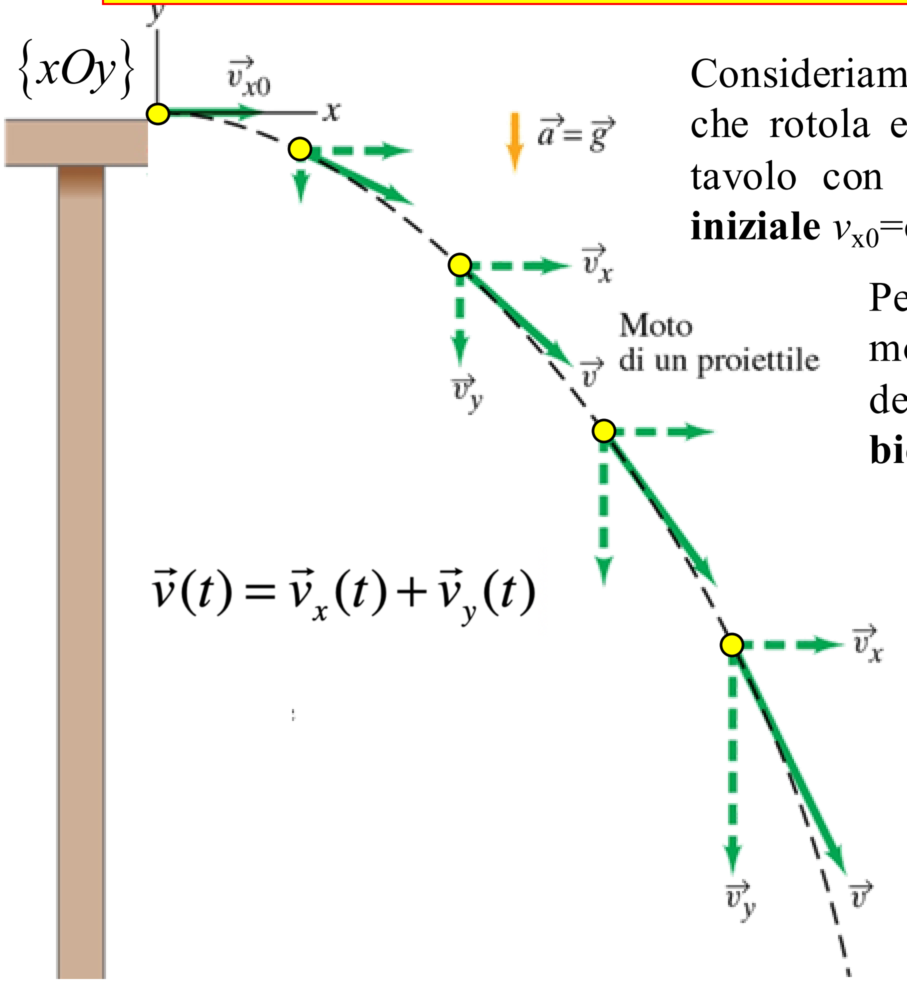
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

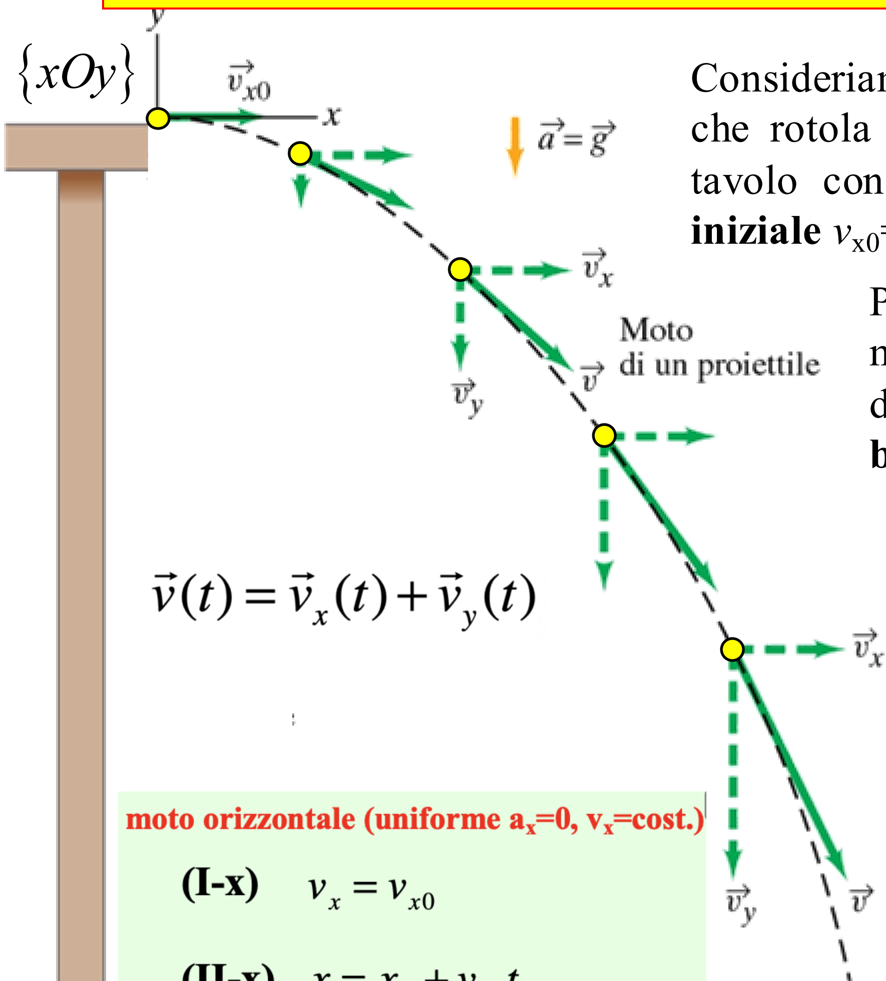


Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. ⇒ $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. □ $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

In accordo con **Galileo**, le equazioni cinematiche del moto per i corpi in caduta libera si applicano **separatamente** alle componenti *x* (moto uniforme) e *y* (moto uniformemente accelerato) del vettore velocità istantanea:

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

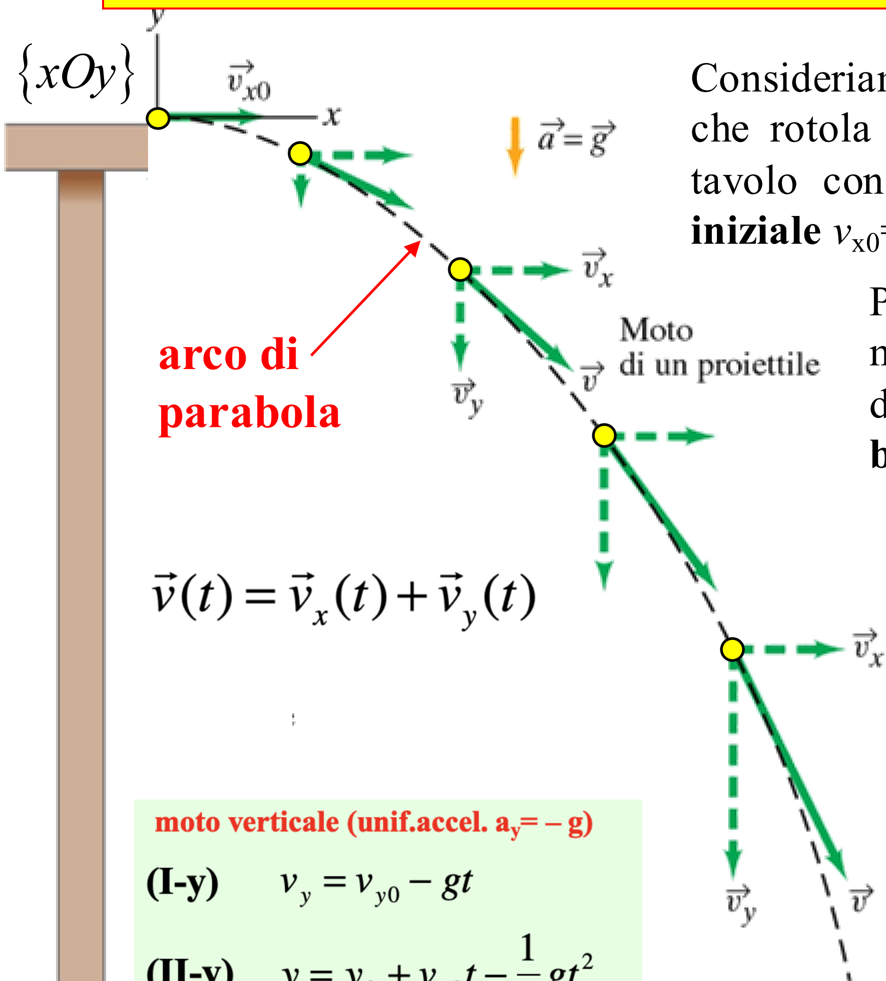
(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

Equazioni del moto per le due componenti indipendenti

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} = \text{cost.}\ ; \quad x(t) = v_{x0}t \\ \\ \end{cases}$$

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1



$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

moto verticale (unif.accel. $a_y = -g$)

(I-y) $\quad v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $\quad y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

Consideriamo una pallina (un proiettile) che rotola e cade oltre il bordo di un tavolo con componenti della **velocità iniziale** v_{x0}=cost. e v_{y0}=0. □ $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0}$

Per comodità assumeremo che il moto inizi al tempo t=0 nell'origine del nostro sistema di riferimento **bidimensionale** {xOy} (x_0=0, y_0=0).

In ogni punto della traiettoria il vettore della **velocità istantanea** è ad essa tangente ed è diretto nel verso del moto della pallina in quell'istante.

In accordo con **Galileo**, le equazioni cinematiche del moto per i corpi in caduta libera si applicano **separatamente** alle componenti *x* (moto uniforme) e *y* (moto uniformemente accelerato) del vettore velocità istantanea:

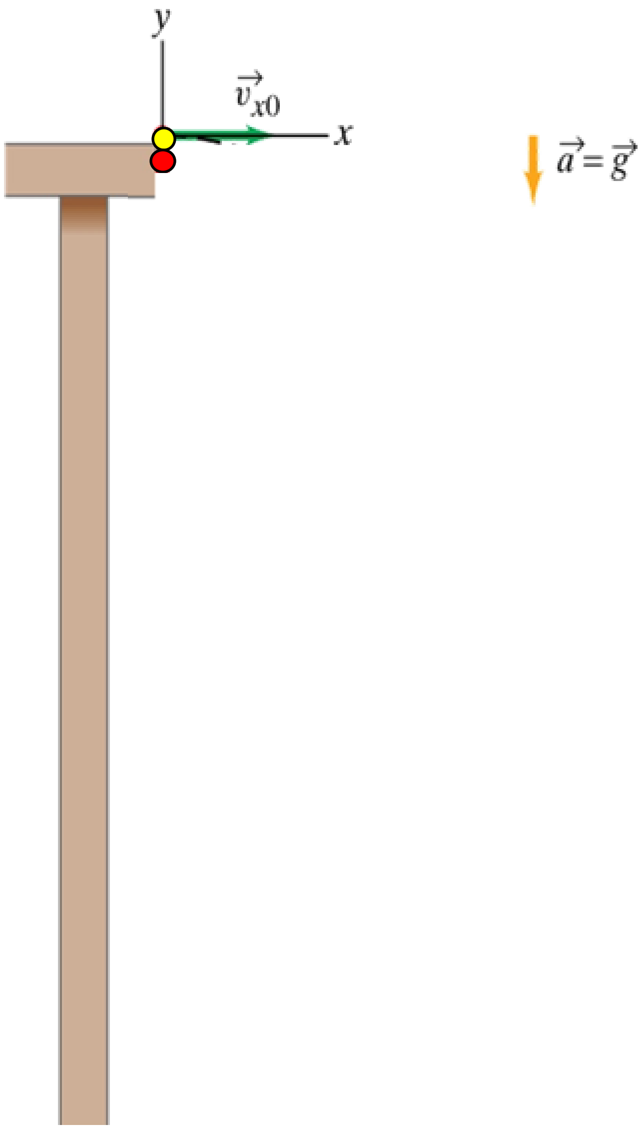
Equazioni del moto per le due componenti indipendenti

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} = \cos t \quad ; \quad x(t) = v_{x0}t \\ v_y(t) = -gt \quad ; \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Combinando i moti lungo i due assi si ottiene una traiettoria parabolica (in questo caso un arco di parabola)

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

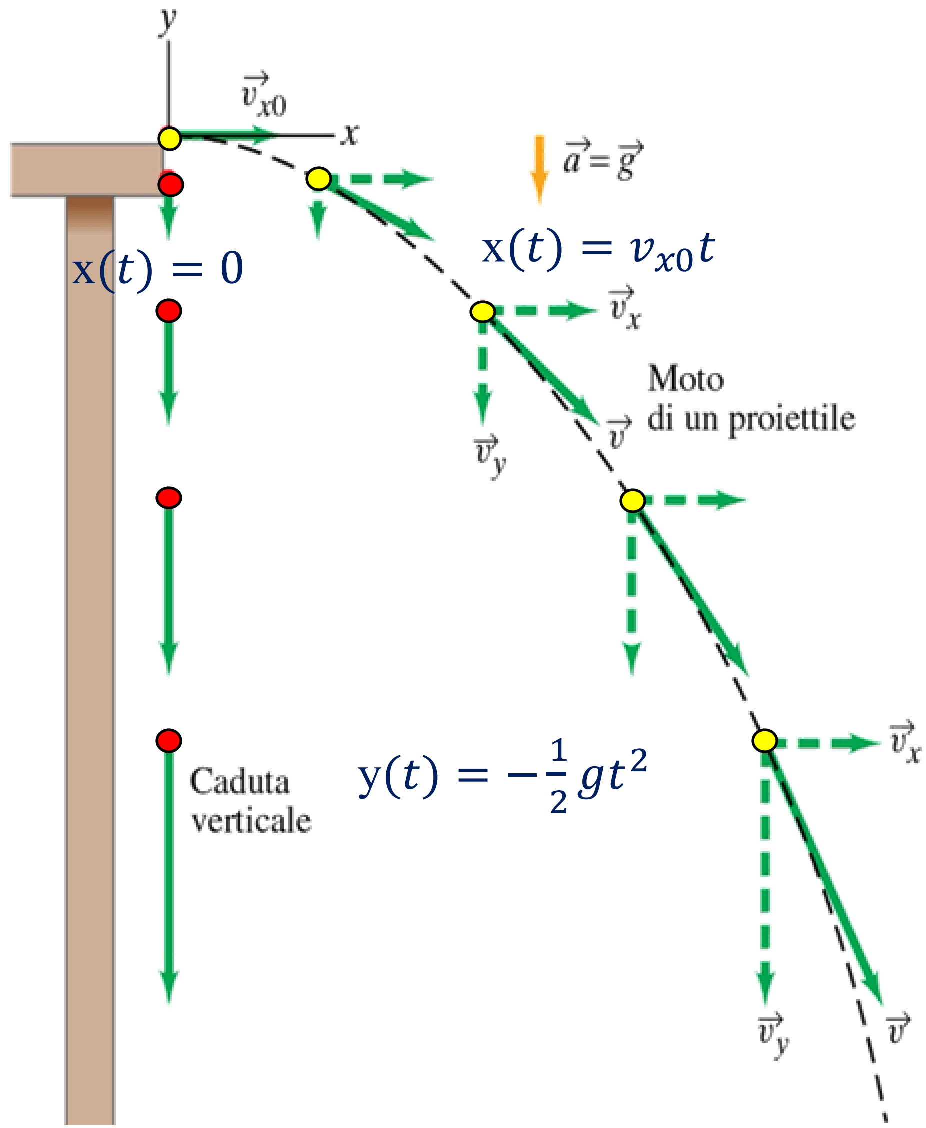
Quesito
Se contemporaneamente alla pallina gialla dell'esempio precedente **un'altra pallina rossa** viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?



Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

Quesito
Se contemporaneamente alla pallina gialla dell'esempio precedente **un'altra pallina rossa** viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta
Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (unif.accelerato) lungo la direzione verticale è il **medesimo** (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente orizzontale (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .



pallina gialla

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

pallina rossa

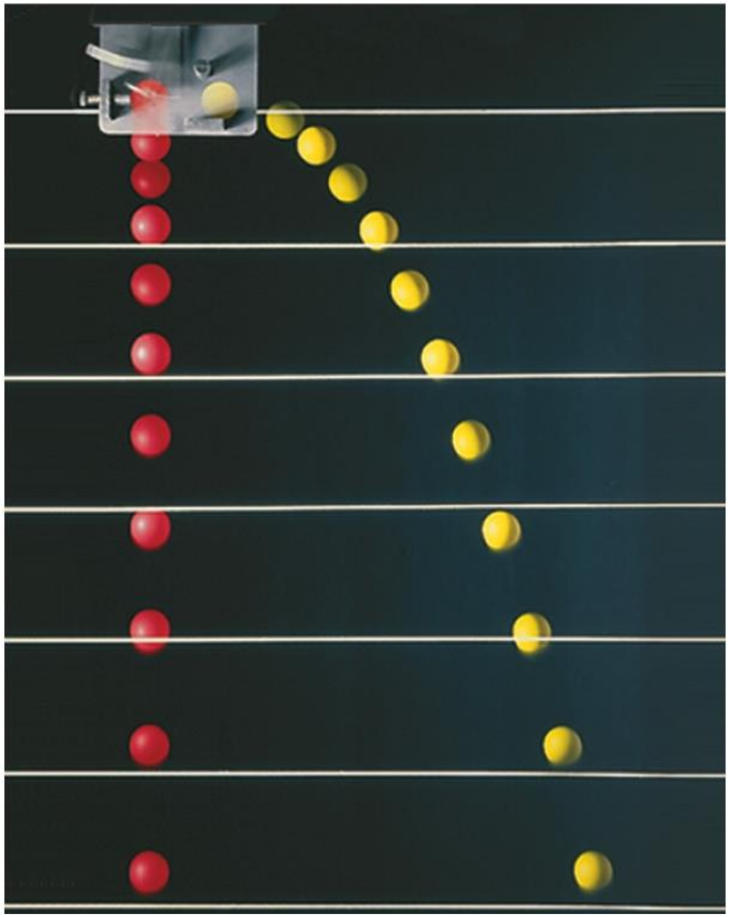
$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 1

Quesito
Se contemporaneamente alla pallina gialla dell'esempio precedente **un'altra pallina rossa** viene lasciata cadere dal bordo del tavolo da ferma (v_{x0}=0 e v_{y0}=0), **quale delle due palline raggiungerà prima il suolo**?

Risposta
Le due palline raggiungono il suolo **contemporaneamente**, perchè il loro moto (unif.accelerato) lungo la direzione verticale è il **medesimo** (essendo la componente verticale della velocità v_{y0}=0 in entrambi i casi). Il moto **differisce** invece lungo la componente orizzontale (moto uniforme), in quanto la velocità v_{x0} iniziale è differente nei due casi – diversa da zero per la pallina gialla, uguale a zero per la rossa .

Conferma sperimentale!



pallina gialla

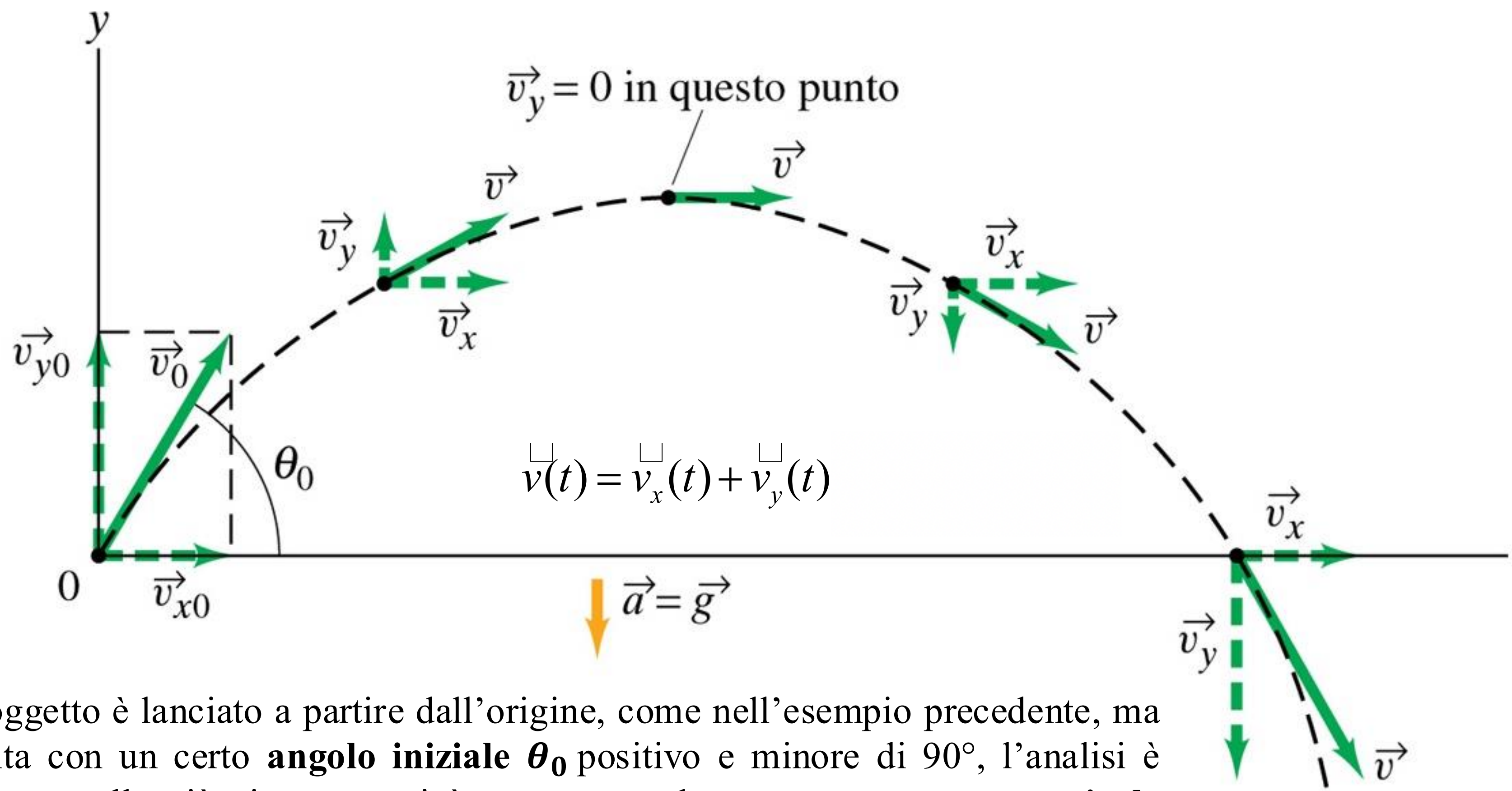
$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

pallina rossa

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

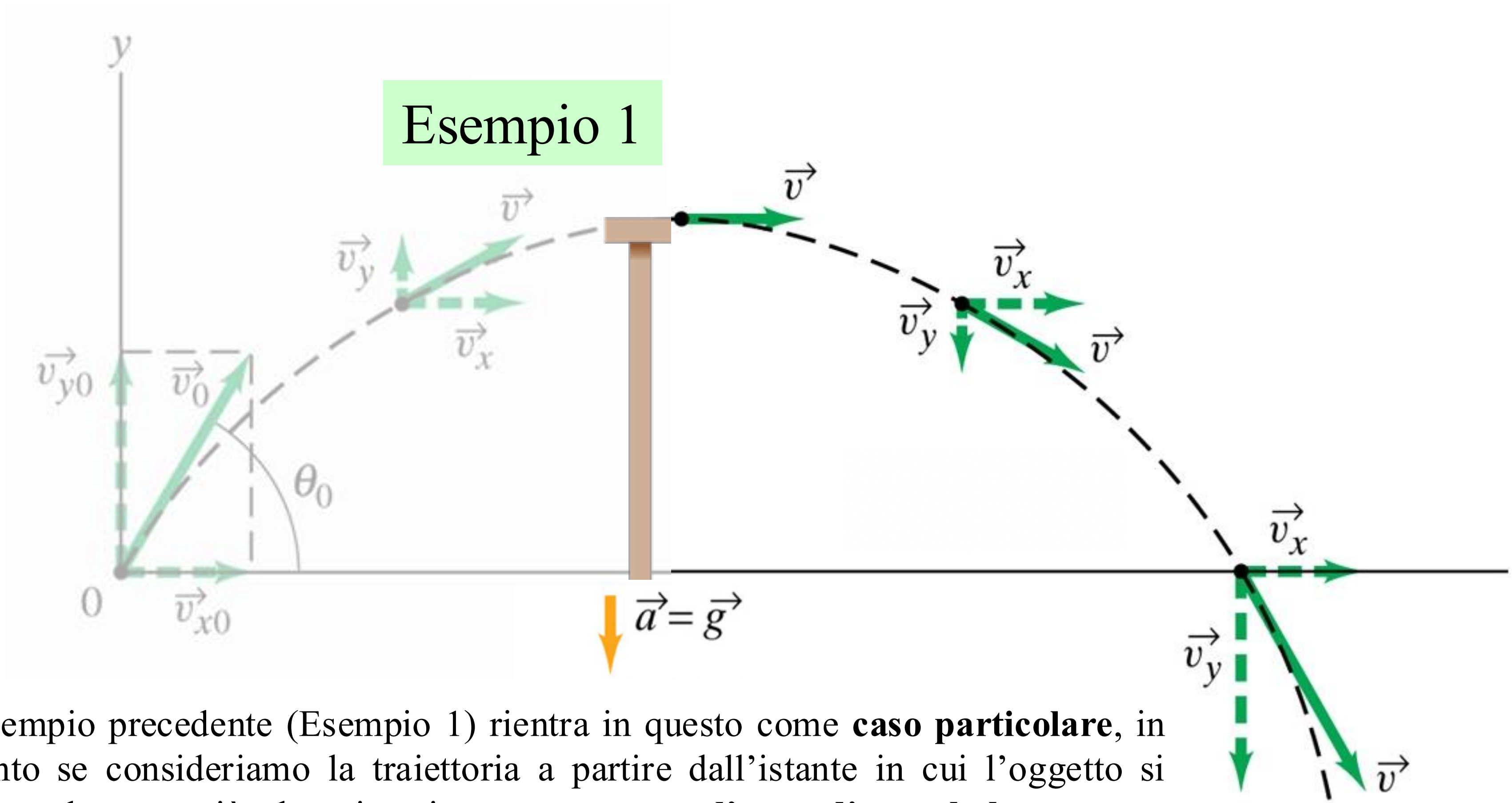
https://www.youtube.com/watch?v=9lTOZQ5DvBM

Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



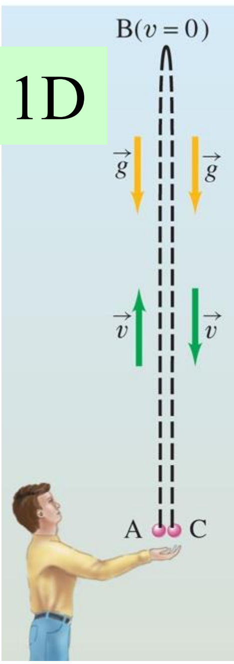
Se l'oggetto è lanciato a partire dall'origine, come nell'esempio precedente, ma stavolta con un certo **angolo iniziale $\boldsymbol{\theta_0}$** positivo e minore di 90°, l'analisi è simile a quella già vista ma qui è presente anche una **componente verticale positiva** della velocità $v_{y0} > 0$ che a causa della gravità decresce uniformemente fino ad annullarsi quando l'oggetto raggiunge il punto più alto della traiettoria, dopodiché cresce nuovamente in modulo ma con verso opposto. La **componente orizzontale** v_{x0} resta invece costante come nell'esempio precedente. La traiettoria complessiva è adesso una **parabola** completa.

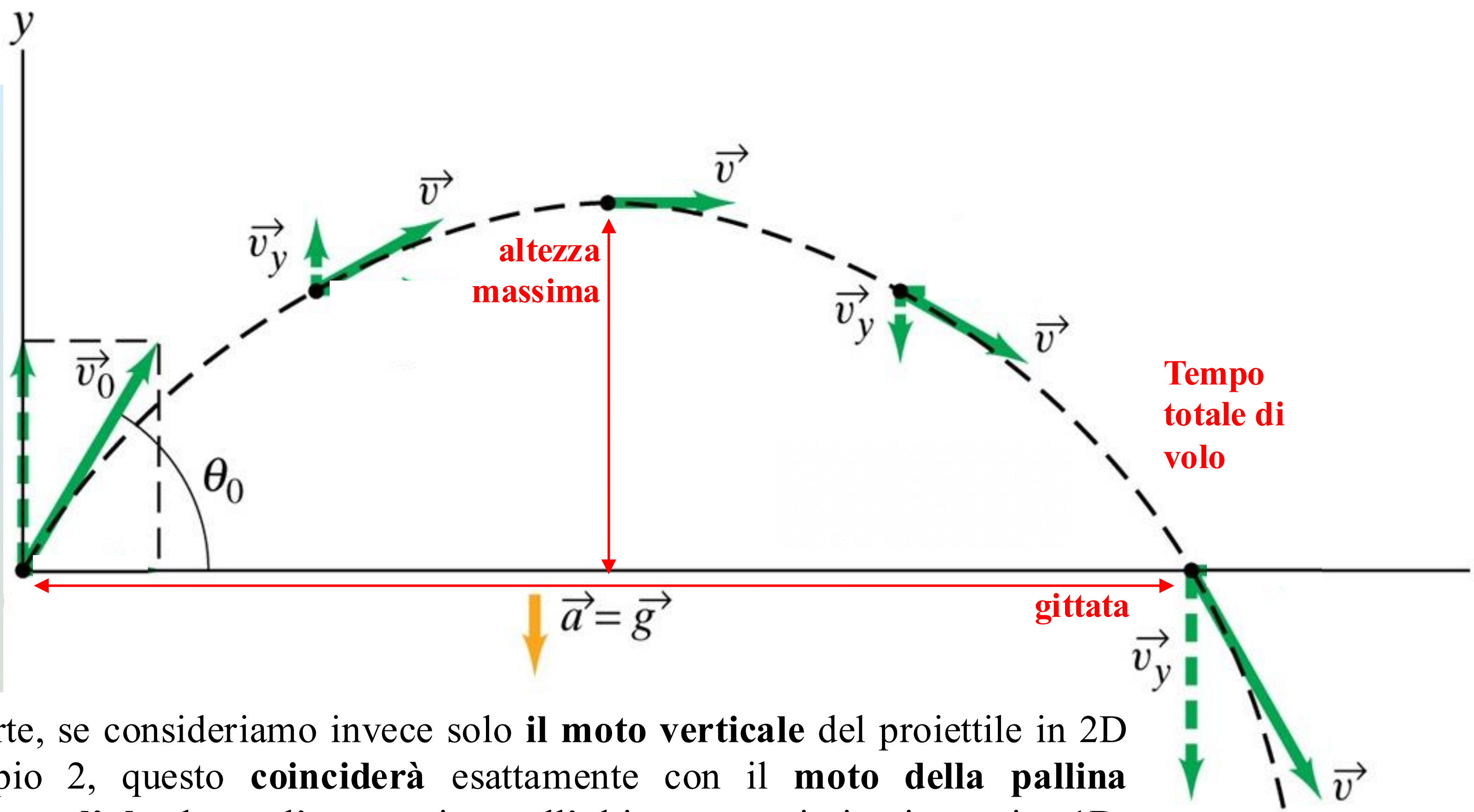
Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2



L'esempio precedente (Esempio 1) rientra in questo come **caso particolare**, in quanto se consideriamo la traiettoria a partire dall'istante in cui l'oggetto si trova nel punto più alto, ritroviamo esattamente **l'arco di parabola** percorso dalla pallina che, rotolando, cadeva dal tavolo con velocità verticale iniziale nulla…

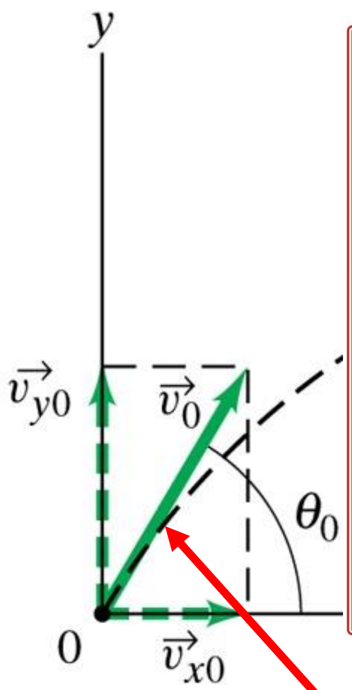
Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio 2





D’altra parte, se consideriamo invece solo **il moto verticale** del proiettile in 2D dell’Esempio 2, questo **coinciderà** esattamente con il **moto della pallina lanciata verso l’alto** lungo l’asse y visto nell’ultimo esempio in cinematica 1D. Da questa analogia possiamo dedurre che **l’altezza massima** raggiunta dal proiettile e il suo **tempo totale di volo** coincideranno con quelli della pallina (se lanciata con la stessa velocità verticale iniziale v_{y0}) e quindi non dipenderanno dalla componente v_{x0}, la quale entrerà in gioco solo nel calcolo della **gittata** del proiettile (cioè la distanza dall’origine del punto in cui il proiettile tocca terra).

Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. (a_x =0, a_y = – g = cost)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

moto verticale (unif.accel. a_y= – g)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

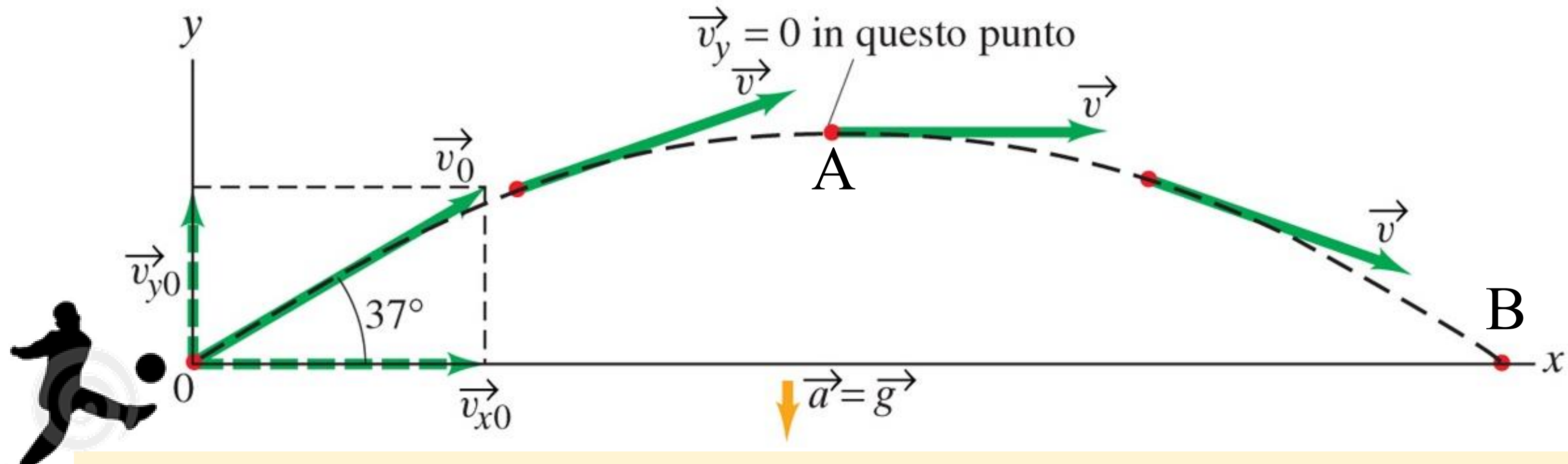
(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 ;\; v_{y0} = v_0 sen\,\theta_0$$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

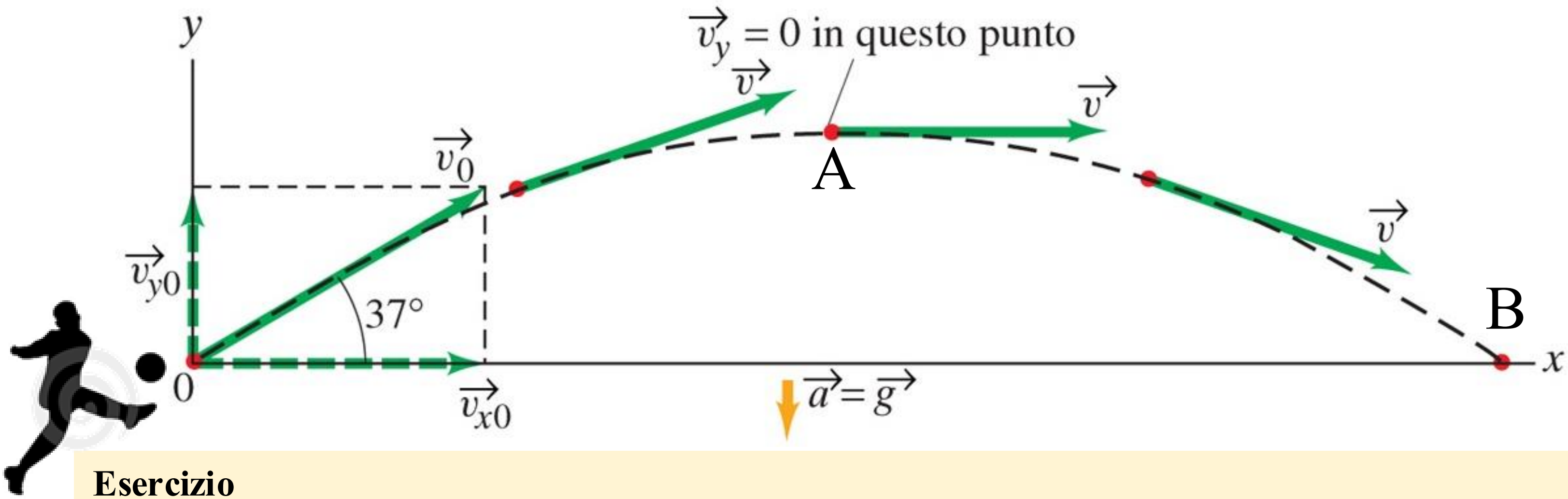
Suggerimenti
-Trattare separatamente i moti lungo gli assi x e y e usare le equazioni del moto di un proiettile;
-Ricordare che il moto lungo x avviene a velocità costante mentre quello lungo y è a velocità variabile.
-Considerare che il **tempo totale che il pallone trascorre in aria e l'altezza massima che raggiunge** sono determinati solo dal moto lungo y, mentre la **distanza massima in orizzontale (gittata)** è determinata dal moto congiunto lungo gli assi x e y;

Innanzitutto occorre scomporre la velocità iniziale nelle sue componenti:

$$\boxed{v_{x0} = v_0 \cos\theta \;;\; v_{y0} = v_0 sen\theta}$$

$$v_{x0} = v_0 \cos 37.0^{\circ} = (20.0 m/s)(0.799) = 16.0 m/s$$

$$v_{y0} = v_0 sen 37.0^{\circ} = (20.0 m/s)(0.602) = 12.0 m/s$$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

Equazioni del moto di un proiettile ($a_x = 0$, $a_y = -g = \text{cost}$)

moto orizzontale (a_x=0, v_x=cost.) UNIFORME

(I-x) $v_x = v_{x0}$

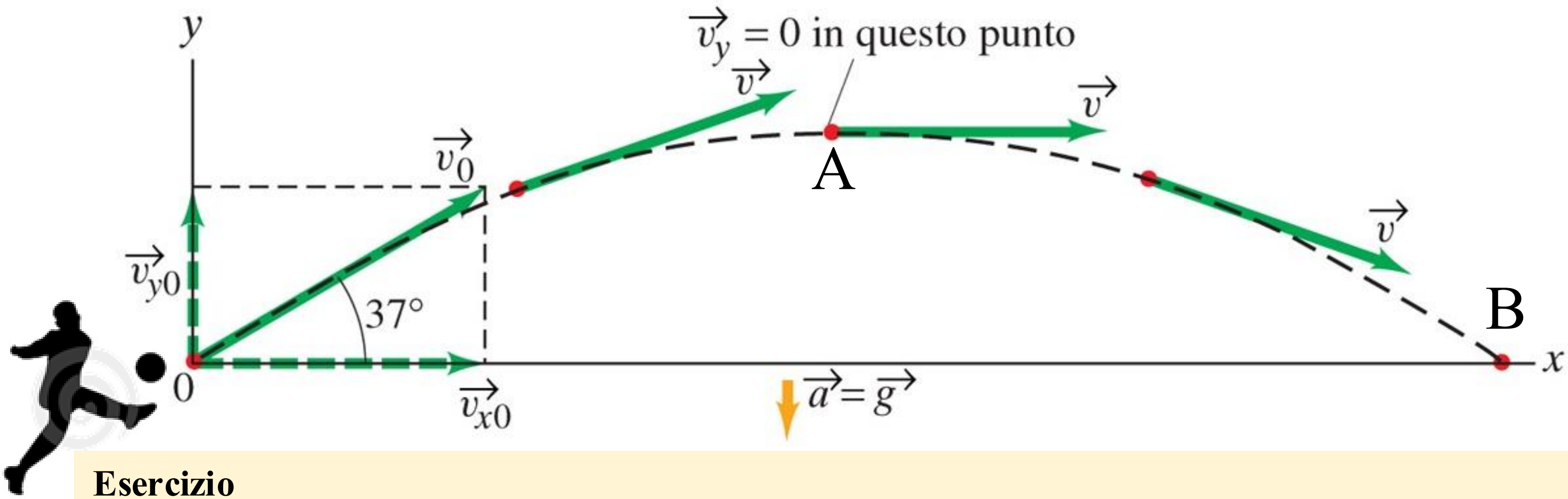
(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

moto verticale (a_y= – g) UNIFORMEMENTE ACCELERATO

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
(a) l'altezza massima y_A raggiunta dal pallone nel punto A
...

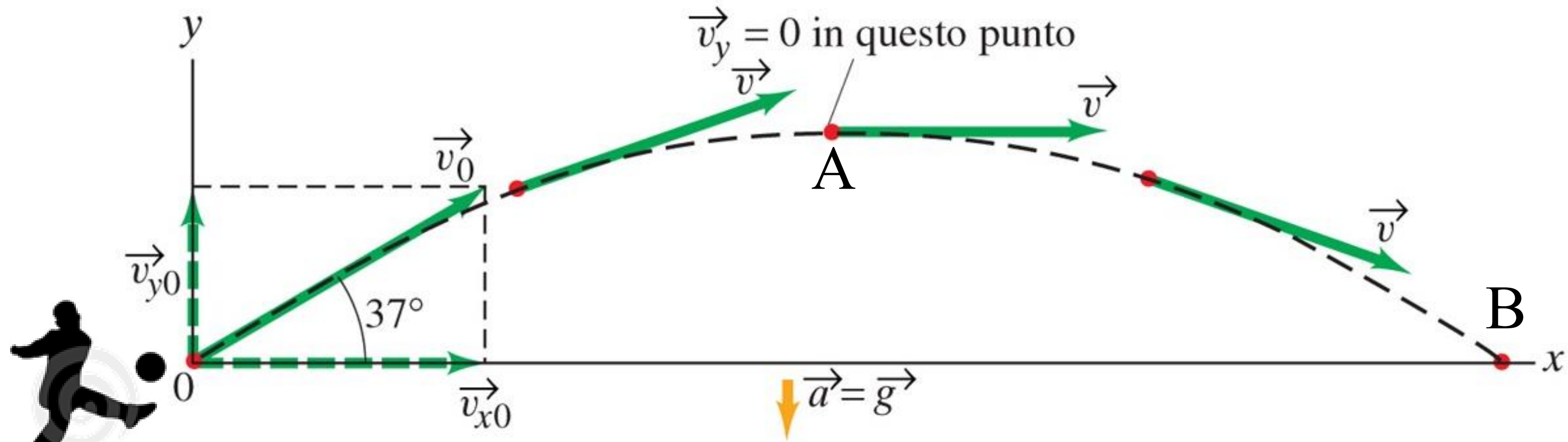
Nel punto A la velocità ha direzione orizzontale, dunque v_y=0 e il tempo t_A necessario a raggiungere il punto A sarà dato dall'equazione I-y risolta rispetto a t:

$$v_y = v_{y0} - gt \quad \square \quad t_A = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{12.0m/s}{9.80m/s^2} = 1.22s$$

da cui, essendo x_0=0 ed y_0=0, dall'equazione II-y si ricava la coordinata y_A della massima altezza:

$$y_A = v_{y0}t_A - \frac{1}{2}g{t_A}^2 = (12.0m/s)(1.22s) - \frac{1}{2}(9.80m/s^2)(1.22s)^2 = 7.35m$$

Questo risultato si poteva ricavare anche utilizzando solo l'equazione III-y (considerando che il pallone raggiunge la quota y_A con velocità v_y=0) ma in questo modo abbiamo ottenuto una informazione supplementare sul tempo t_A che ci risulterà utile per rispondere alle prossime domande…



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
...
(b) il tempo trascorso prima che il pallone tocchi terra nel punto B
...

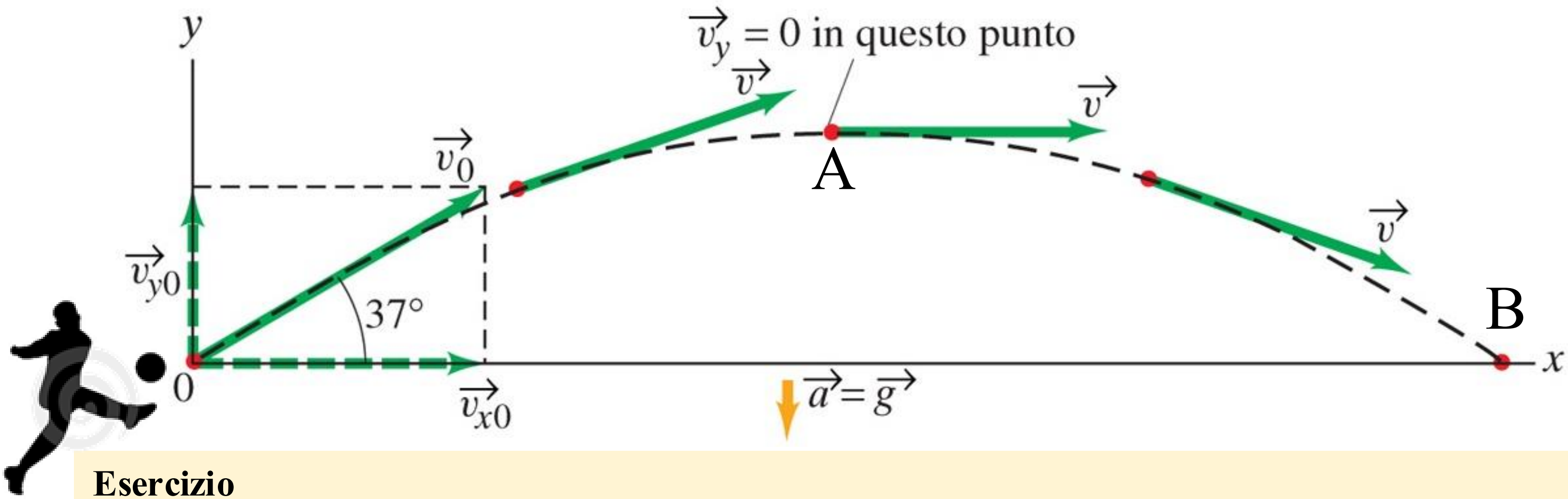
Sarebbe semplicemente uguale al doppio del tempo t_A necessario a raggiungere il punto A:

$$t_B = 2t_A = 2 \cdot (1.22s) = 2.44s$$

ma è possibile ricavarlo anche dall'equazione II-y con y_0=0 ed y=0, risolvendola rispetto al tempo:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + (12m/s)t - \frac{1}{2}(9.80m/s^2)t^2$$

$$\Rightarrow \quad [\frac{1}{2}(9.80m/s^2)t - 12.0m/s]t = 0 \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad t = 0 \\ &\Rightarrow \quad t_B = \frac{2(12.0m/s)}{(9.80m/s^2)} = 2.45s \end{aligned}$$



Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

...

(c) la distanza a cui tocca terra nel punto B

(d) le componenti del vettore velocità nel punto A

(e) le componenti del vettore accelerazione nel punto A

moto orizzontale (a_x=0, v_x=cost.) UNIFORME

(I-x) $v_x = v_{x0}$

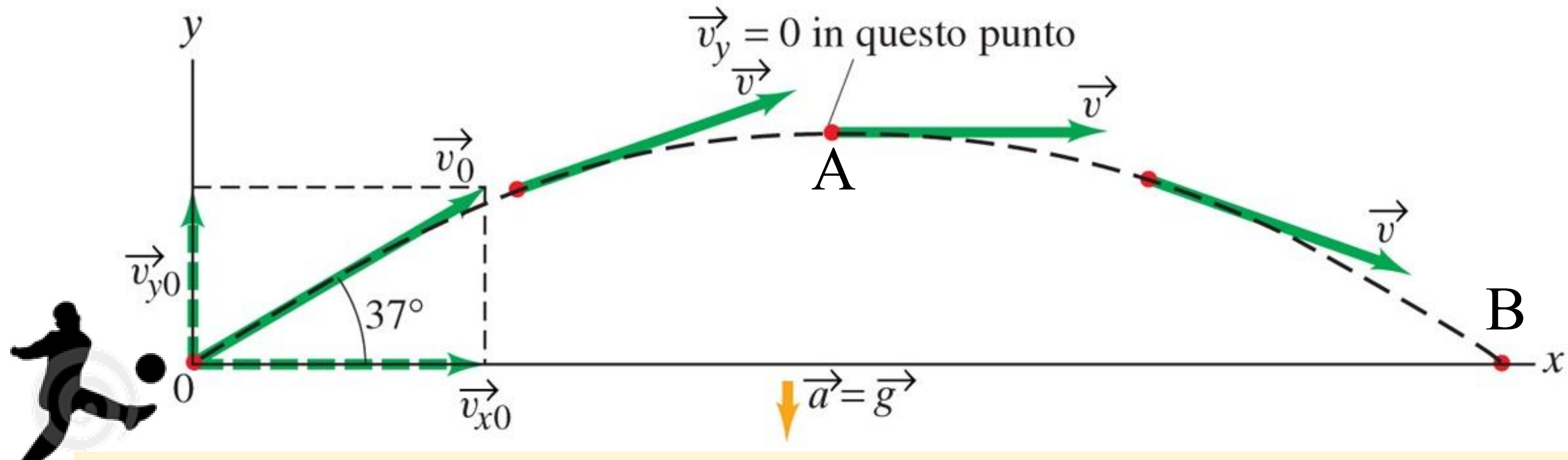
(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

moto verticale (a_y= – g) UNIFORMEMENTE ACCELERATO

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:
...
(c) la distanza a cui tocca terra nel punto B
(d) le componenti del vettore velocità nel punto A
(e) le componenti del vettore accelerazione nel punto A

(c) La coordinata x_B si ricava semplicemente sostituendo t_B nell'equazione II-x con x_0=0 e v_{x0}=16.0m/s:

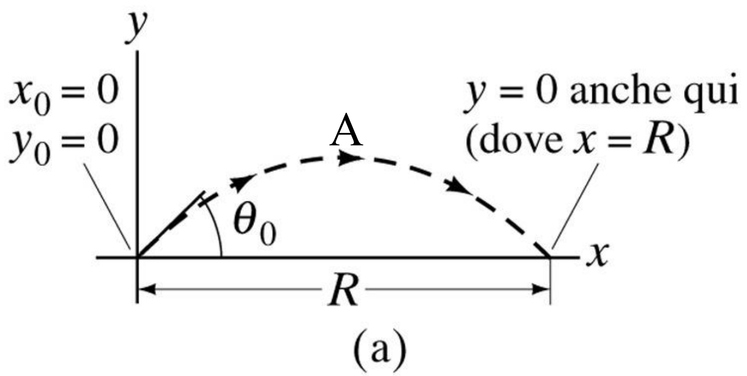
$$x = x_0 + v_{x0}t \quad \square \quad x_B = v_{x0}t_B = (16.0m/s)(2.45s) = 39.2m$$

(d) La componente y della velocità nel punto A è nulla, mentre la componente x resta costante per tutta la durata del moto e dunque è uguale a v_{xA}=v_{x0}=16.0m/s;

(e) Il vettore accelerazione, ormai dovrebbe essere chiaro, è sempre costante, di modulo pari a g e rivolto verso il basso.

Gittata orizzontale di un proiettile

La gittata orizzontale di un proiettile è definita come *la distanza orizzontale percorsa dal proiettile prima di tornare all'altezza iniziale* $y=y_0$ (che di solito è quella del suolo). E' interessante derivare una **formula generale** che permetta di calcolare la gittata orizzontale R di un proiettile sparato al tempo t=0 dall'origine (x_0,y_0) di un sistema di riferimento (nel verso delle x crescenti) in funzione della sua velocità iniziale v_0 e del suo angolo di sparo θ_0.



Calcoliamo il tempo totale di volo dall'equazione (I-y) per il moto verticale, ponendo a zero la componente y della velocità nel punto A e poi raddoppiando il tempo necessario a raggiungere quel punto:

$$0 = v_{y0} - g t_A \;\rightarrow\; t_A = \frac{v_{y0}}{g} \;\rightarrow\; t = 2\frac{v_{y0}}{g}$$

…e sostituiamo nell'equazione per il moto orizzontale:

$$R = x = v_{x0} t \;\rightarrow\; R = v_{x0}\left(\frac{2v_{y0}}{g}\right) = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^{\,2} sen\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

essendo: $\overset{\square}{v_0} \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{y0} = v_0 sen\theta_0 \end{cases}$

Da quì, utilizzando l'identità trigonometrica **2senθcosθ=sen2θ** , avremo infine l'espressione cercata:

$$\rightarrow R = \frac{v_0^{\,2} sen 2\theta_0}{g}$$

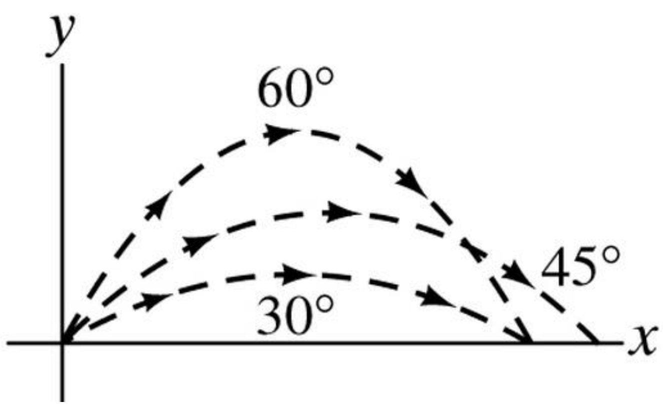
Nota
Da questa equazione si vede che **la gittata orizzontale aumenta col quadrato di v_0**, perciò una velocità iniziale doppia (a parità di angolo di sparo θ_0) porta ad un incrememento di quattro volte nella gittata massima!

Gittata orizzontale di un proiettile

$$R = \frac{v_0^{\,2} sen 2\theta_0}{g}$$

Fissata invece la velocità iniziale v_0, e facendo variare l'angolo di sparo θ_0 , dalla formula appena vista avremo che la **gittata massima $\mathbf{R_{max}}$** si otterrà quando il $sen(2\theta_0)$ assume il suo valore massimo (=1), e cioè quando:

$$2\theta_0 = 90^\circ \rightarrow \theta_0 = 45^\circ \;\; per \;\; cui \;\; R_{\max} = \frac{v_0^{\,2}}{g}$$



angolo in gradi	angolo in radianti	seno
0°	0	0
30°	0,52	0,5
45°	0,79	0,71
60°	1,05	0,87
90°	1,57	1
180°	3,14	0

Ovviamente se la **resistenza** dell'aria non è trascurabile (come si è tacitamente supposto finora) la gittata – per un certo valore della velocità iniziale – sarà minore di quella appena calcolata, e si può verificare che il suo valore massimo si ottiene per un angolo minore di 45°.