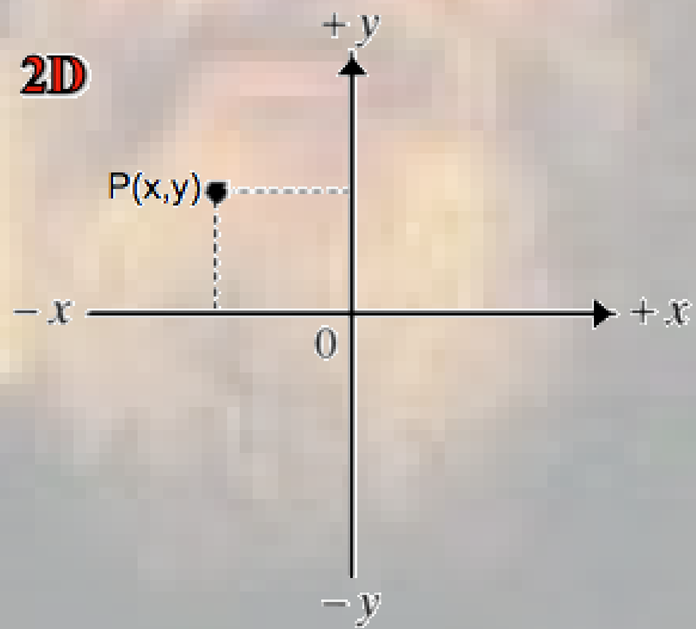
LA CINEMATICA in DUE DIMENSIONI

2D

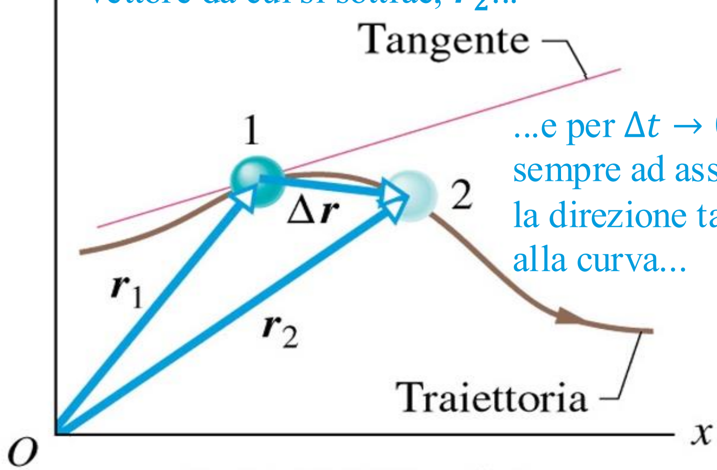


Moto di un «proiettile» in due dimensioni

Galileo fu il primo a capire che il moto di un proiettile (ossia di un qualunque corpo) soggetto alla gravità può essere analizzato molto più semplicemente ed efficacemente prendendo in considerazione **separatamente** le componenti orizzontale e verticale del moto. Così facendo, poiché *l'accelerazione di gravità è diretta solo e costantemente verso il basso* (asse y negativo), il moto lungo l'**asse y** sarà **uniformemente accelerato**; il moto lungo l'**asse x** invece, non essendo soggetto ad accelerazione, sarà **uniforme** (cioè a velocità costante). **La velocità vettoriale complessiva sarà data quindi, ad ogni istante, dalla somma delle sue componenti lungo i due assi coordinati:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

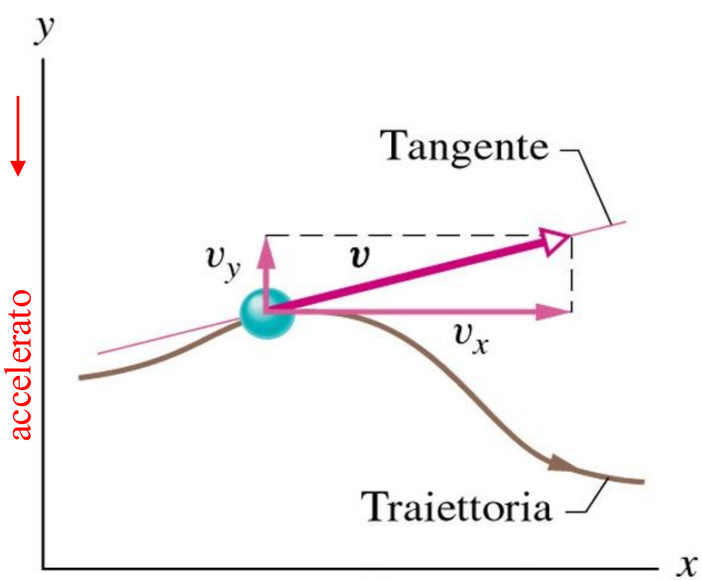
Qualsiasi vettore differenza, come lo spostamento $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$, ha sempre la coda sulla punta del vettore da sottrarre, qui $\boldsymbol{r_1}$, e la punta su quella del vettore da cui si sottrae, $\boldsymbol{r_2}$...



...e per $\Delta t \to 0$ tende sempre ad assumere la direzione tangente alla curva...

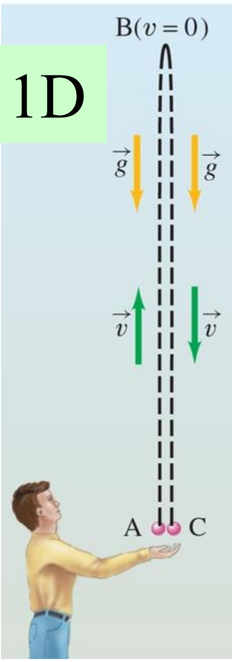
acceleraziozione di gravità $\vec{g}$

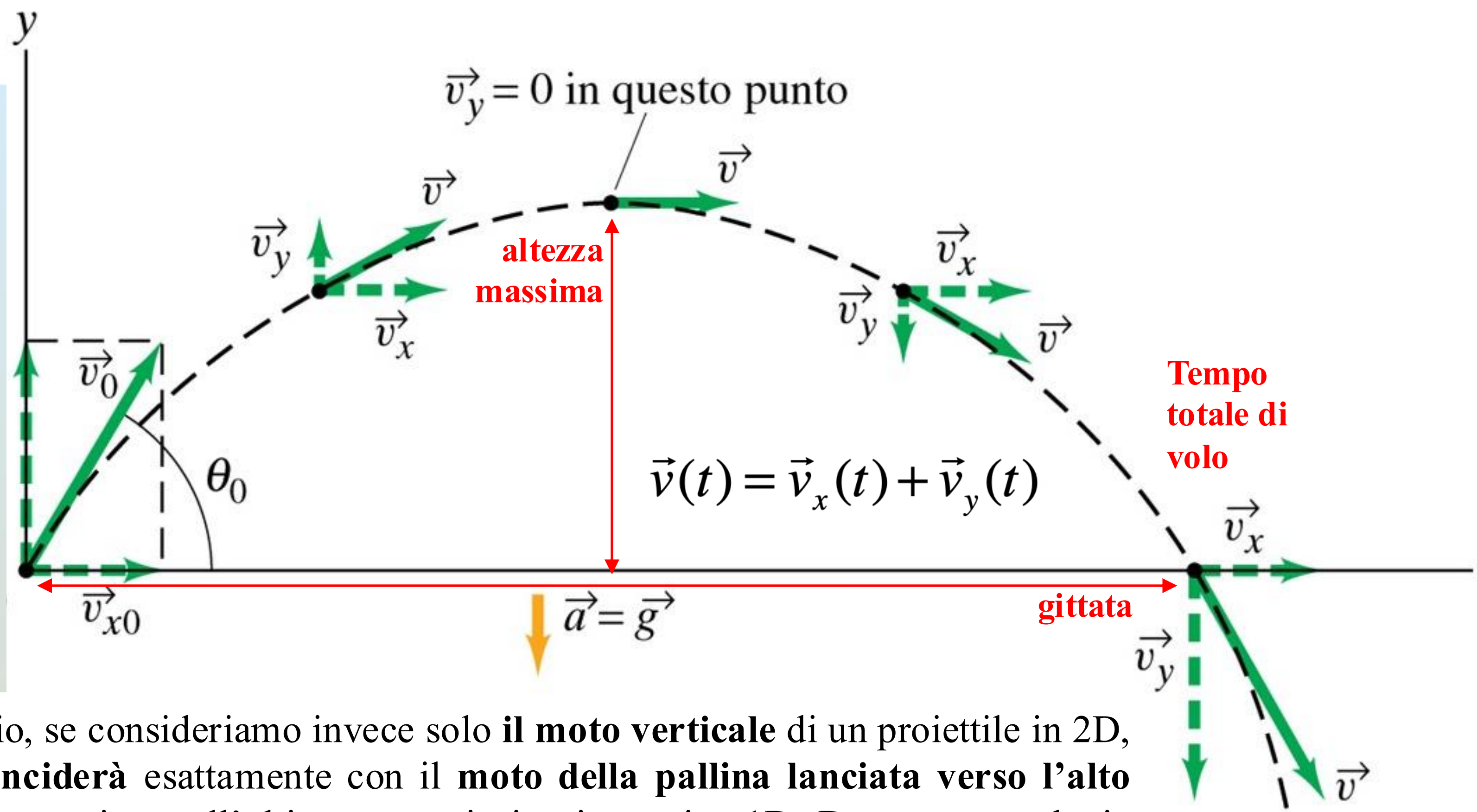
Moto uniformemente accelerato



Moto uniforme

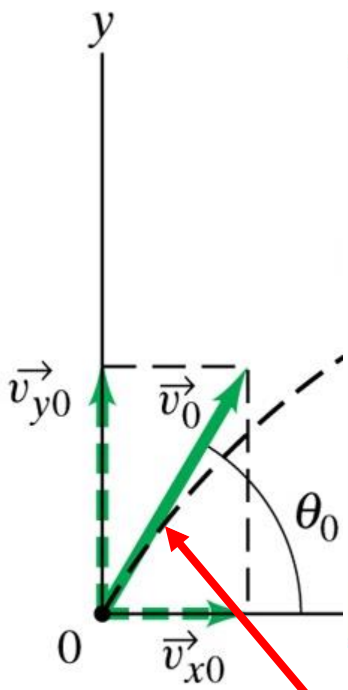
Moto di un proiettile in due dimensioni: Esempio





Ad esempio, se consideriamo invece solo **il moto verticale** di un proiettile in 2D, questo **coinciderà** esattamente con il **moto della pallina lanciata verso l'alto** lungo l'asse y visto nell'ultimo esempio in cinematica 1D. Da questa analogia possiamo dedurre che **l'altezza massima** raggiunta dal proiettile e il suo **tempo totale di volo** coincideranno con quelli della pallina (se lanciata con la stessa velocità verticale iniziale v_{y0}) e quindi non dipenderanno dalla componente v_{x0}, la quale entrerà in gioco solo nel calcolo della **gittata** del proiettile (cioè la distanza dall'origine del punto in cui il proiettile tocca terra).

Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. ($a_x = 0$, $a_y = -g = \text{cost}$)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

moto verticale (unif.accel. $a_y = -g$)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 - 2g(y - y_0)$

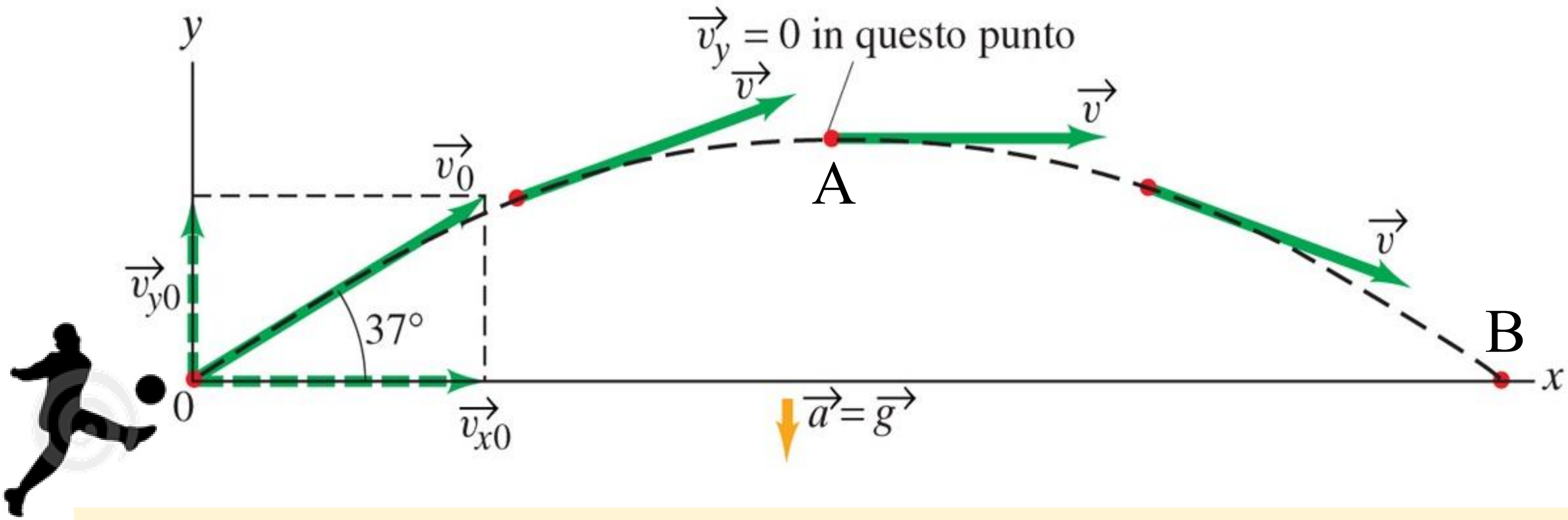
Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 ; \; v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$

Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



Esercizio

Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

(a) **l'altezza massima** y_A raggiunta dal pallone nel punto A (dipende solo da v_{y0})

(b) il **tempo trascorso** prima che il pallone tocchi terra nel punto B (dipende solo da v_{y0})

(c) la **distanza** a cui tocca terra nel punto B (dipende sia da v_{x0} che da v_{y0})

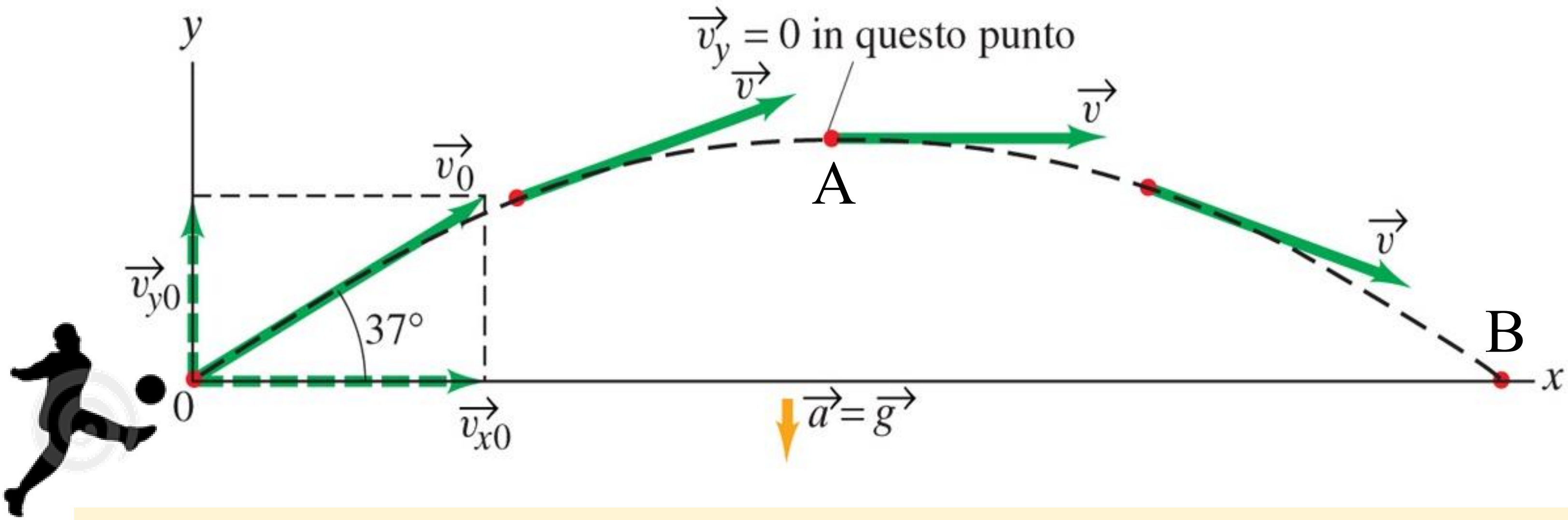
Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 ; \ v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$

$$v_{x0} = v_0 \cos 37.0° = (20.0 m/s)(0.799) = 16.0 m/s$$

$$v_{y0} = v_0 sen 37.0° = (20.0 m/s)(0.602) = 12.0 m/s$$

Esercizi sul moto di un proiettile in due dimensioni



Esercizio
Un pallone viene calciato a un angolo θ=37.0° con una velocità iniziale v_0=20m/s, come mostrato in figura. Trascurando la resistenza dell'aria e la rotazione del pallone, determinare:

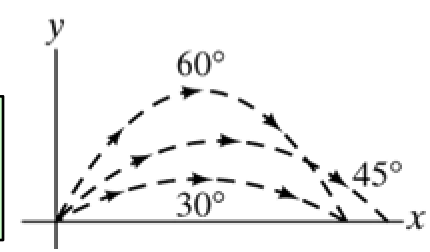
(a) **l'altezza massima** y_A raggiunta dal pallone nel punto A (dipende solo da v_{y0})
(b) il **tempo trascorso** prima che il pallone tocchi terra nel punto B (dipende solo da v_{y0})
(c) la **distanza** a cui tocca terra nel punto B (dipende sia da v_{x0} che da v_{y0})

Gittata di un proiettile

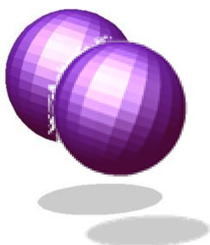
$$\boxed{R = \frac{v_0^2 sen 2\theta_0}{g}}$$

GittataMAX di un proiettile

$$2\theta_0 = 90^\circ \rightarrow \theta_0 = 45^\circ \; per \;\; cui \;\; \boxed{R_{max} = \frac{v_0^2}{g}}$$



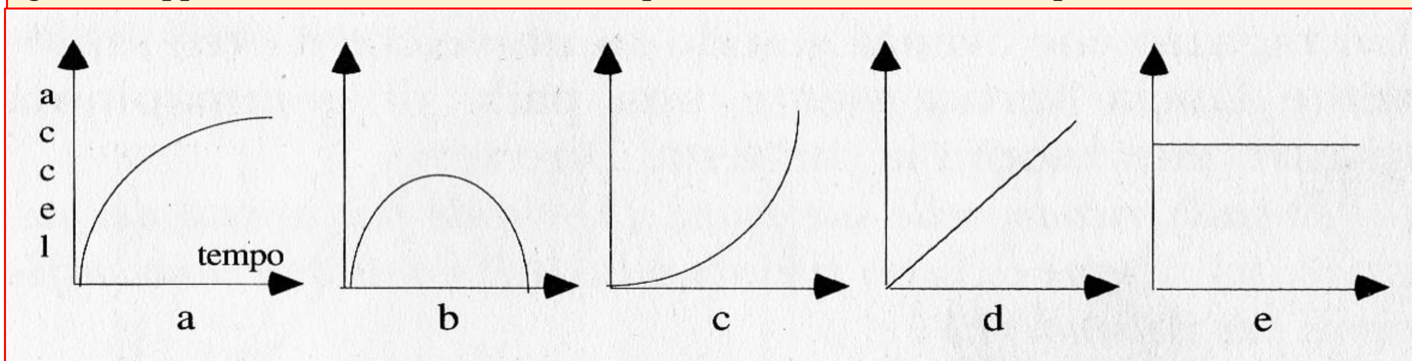
Qualche quesito...



Quesito n.1
Due sfere uguali ma di diverso peso sono lanciate verso l'alto con la *stessa velocità iniziale*. Trascurando l'effetto dell'aria, si hanno dati sufficienti per dire **quale delle due sfere arriverà più in alto?**
Possibili risposte: (a) sì, arriva più in alto la sfera che pesa meno; (b) sì, le due sfere arrivano alla stessa altezza; (c) sì, arriva più in alto la sfera che pesa di più; (d) no, non ci sono dati sufficienti per poterlo dire.

(b)

Quesito n.2
Una pietra è lanciata verso l'alto. Se si *trascura la resistenza dell'aria*, quale dei cinque grafici rappresenta **l'accelerazione** della pietra al trascorrere del tempo mentre è in aria?



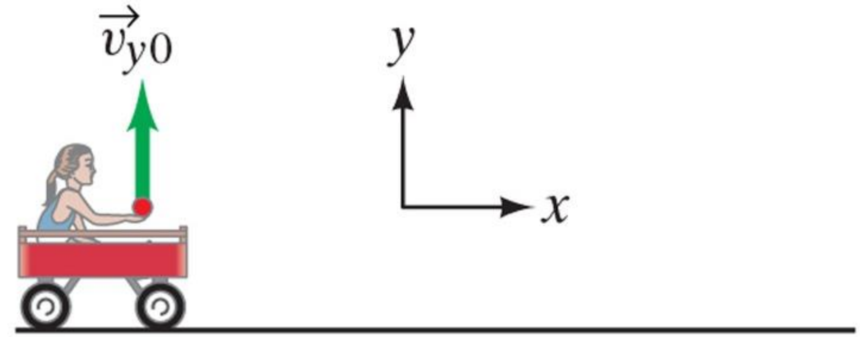
(e)

Quesito n.3
Un atleta che corre a *velocità costante* lascia cadere una boccia di piombo dalla sua mano. Dire se **essa tocca terra**: *(a) sulla verticale del punto da dove è lasciata cadere; (b) un po' più indietro; (c) nel punto dove, in quell'istante si troverà l'atleta; (d) in un punto intermedio tra (a) e (c).*

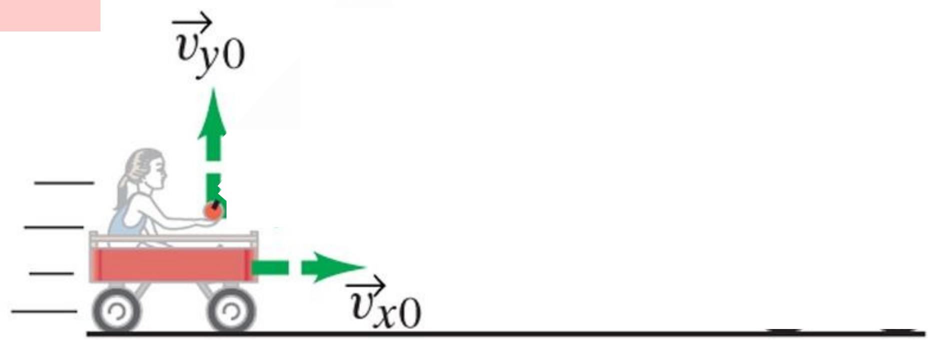
(c)

Il Quesito n.3 è analogo a questo problema concettuale:
Una bambina è seduta su un **carretto** che si muove verso destra con velocità costante. La bambina stende la mano e lancia una **mela** verticalmente verso l'alto (nel suo sistema di riferimento), mentre il carretto continua a muoversi con **velocità costante**.
Trascurando l'attrito dell'aria, la mela cadrà (A) **dietro il carretto**, (B) **sul carretto**, (C) **davanti al carretto**?

Suggerimento
Ragionare ponendosi nel *sistema di riferimento* del terreno...



(a) Sistema di riferimento del carretto

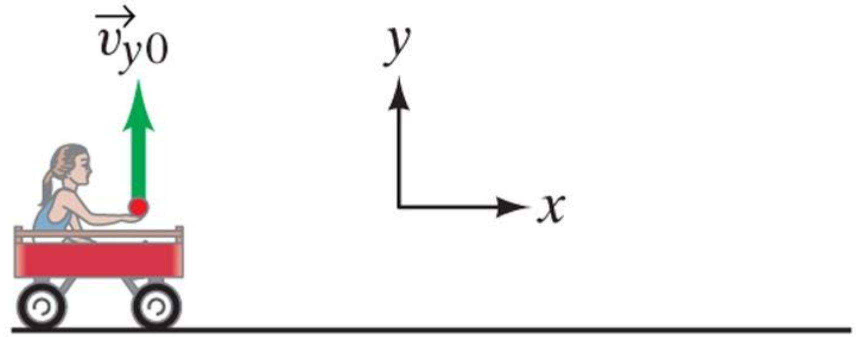


(b) Sistema di riferimento del terreno

Il Quesito n.3 è analogo a questo problema concettuale:

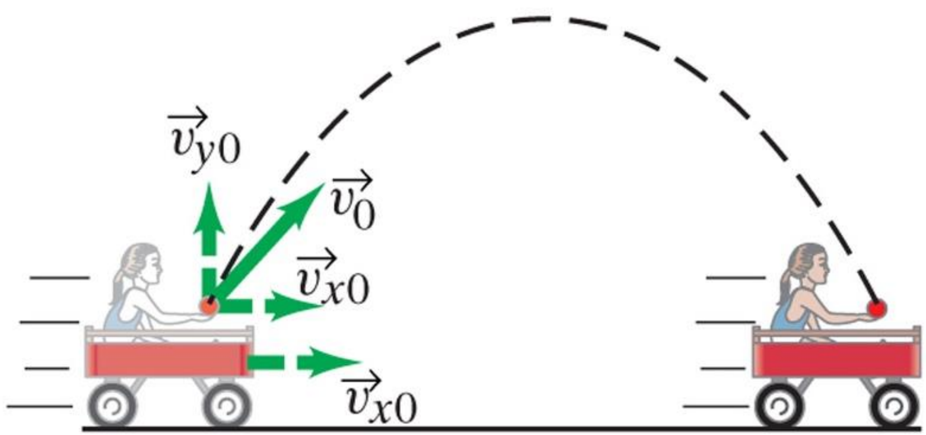
Una bambina è seduta su un **carretto** che si muove verso destra con velocità costante. La bambina stende la mano e lancia una **mela** verticalmente verso l'alto (nel suo sistema di riferimento), mentre il carretto continua a muoversi con **velocità costante**.

Trascurando l'attrito dell'aria, la mela cadrà (A) **dietro il carretto**, (B) **sul carretto**, (C) **davanti al carretto**?



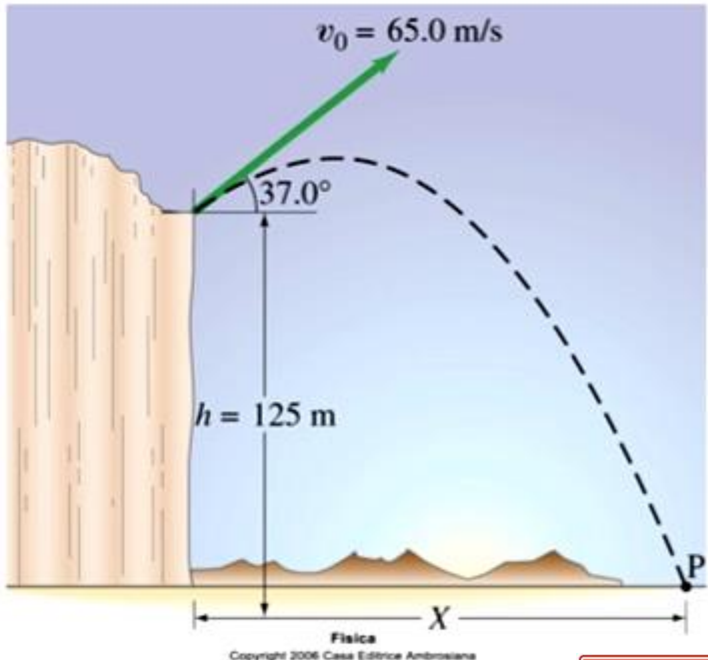
(a) Sistema di riferimento del carretto

La risposta corretta è la B!



(b) Sistema di riferimento del terreno

Svolgiamo un altro esercizio



Esercizio
Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura).

(a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno.

(b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe.

(c) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0;\ v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$

Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. (a_x =0, a_y = – g = cost)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

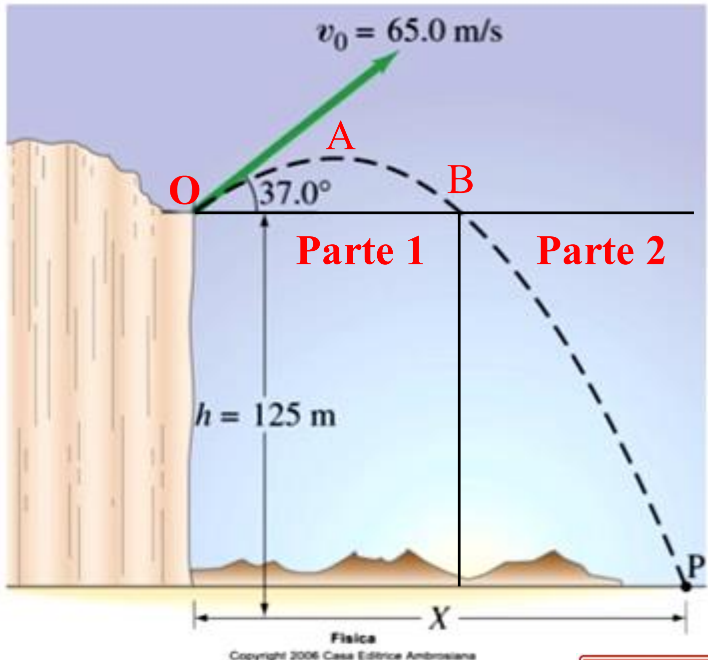
moto verticale (unif.accel. a_y= – g)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 - 2g(y - y_0)$

Svolgiamo un altro esercizio



Esercizio

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura).

(a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno.

(b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe.

(c) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Velocità vettoriale iniziale:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$$

Componenti:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0;\ v_{y0} = v_0 sen\theta_0$$

Equazioni del moto di un proiettile in 2 dim. (a_x =0, a_y = – g = cost)

moto orizzontale (uniforme a_x=0, v_x=cost.)

(I-x) $v_x = v_{x0}$

(II-x) $x = x_0 + v_{x0}t$

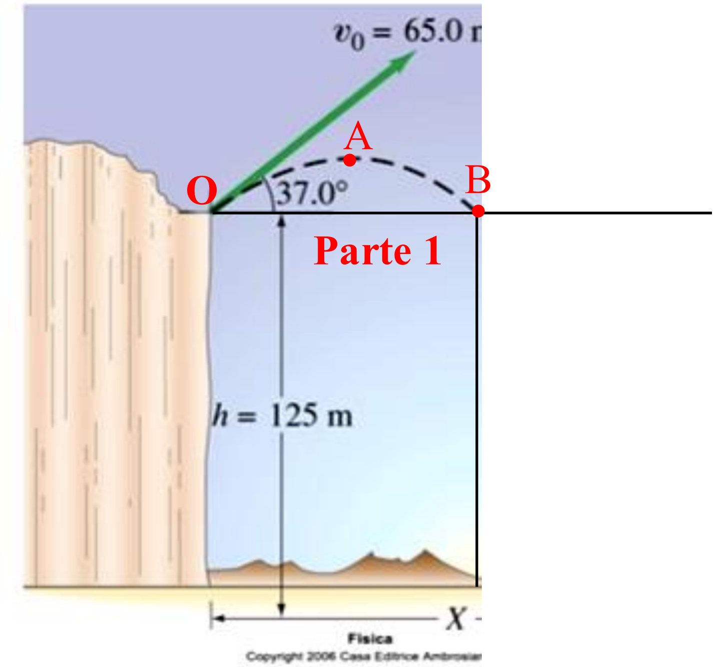
moto verticale (unif.accel. a_y= – g)

(I-y) $v_y = v_{y0} - gt$

(II-y) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

(III-y) $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} - 2g(y - y_0)$

Svolgiamo un altro esercizio



Esercizio
Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura).

(a) **Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno**.
(b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe.
(c) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Parte 1 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto O: $x_o = 0, y_o = 0$)

$$\left.\begin{aligned} v_{x0} &= 65\ m/s\cos(37°) = 51.91 m/s \\ v_{y0} &= 65\ m/s\ sen(37°) = 39.12 m/s \end{aligned}\right\}\ \text{Componenti della velocità iniziale (nel punto O)}$$

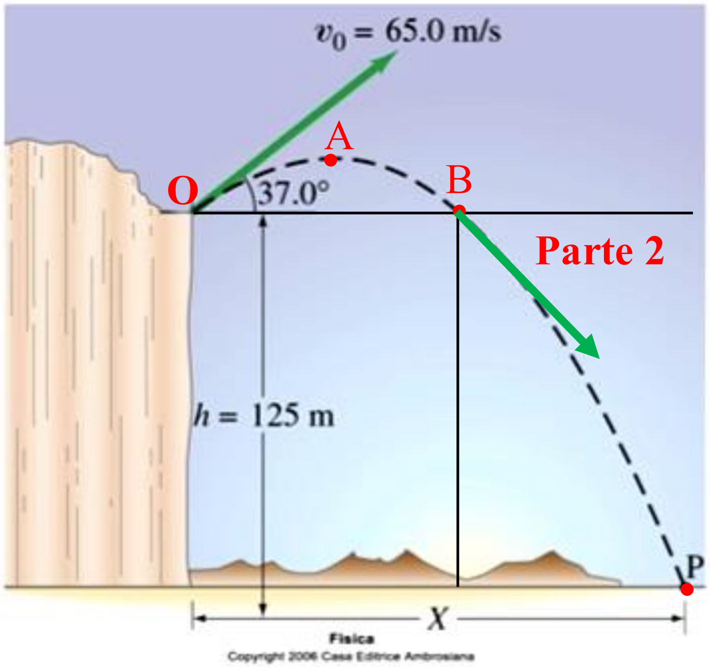
Calcoliamo, per mezzo dell'equazione I-y, il tempo necessario al proiettile per passare dal punto O al punto A (dove $v_y = 0$) e poi quello per arrivare al punto B (che è il doppio del precedente):

$$v_y = v_{y0} - gt \ \rightarrow 0 = v_{y0} - gt_A \ \rightarrow gt_A = v_{y0} \ \rightarrow \ t_A = \frac{v_{y0}}{g} = 3.99\ s \ \rightarrow t_B = 2t_A = 7.98\text{s}$$

Dopodichè sostituiamo il valore t_B nell'equazione II-x (moto uniforme) per ottenere la gittata x_B:

$$x_B = x_0 + v_{x0}t_B \ \rightarrow \ x_B = 0 + (51.91 m/s)(7.98 s) = 414.24\ \text{m}$$

Svolgiamo un altro esercizio



Esercizio

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura).

(a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno.

(b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe.

(c) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Parte 2 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto B: $x_o = x_B, y_o = 0$ **)**

Adesso spostiamo l'origine nel punto B e prendiamo queste nuove componenti della velocità iniziale:

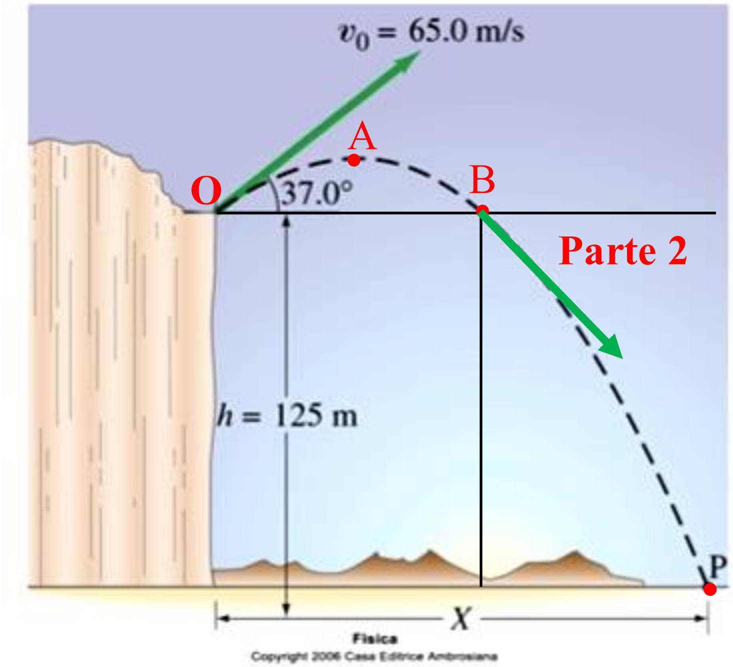
$$\left.\begin{aligned} v_{x0} &= 51.91 m/s \\ v_{y0} &= -39.12 m/s \end{aligned}\right\}$$

Componenti della velocità nel punto B (la v_{y0} è invertita per questioni di simmetria rispetto al punto O).

Utilizziamo l'equazione II-y per ricavare il tempo impiegato dal proiettile per passare dal punto B al punto P:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - v_{y0}t + y = 0 \rightarrow \frac{9.8\frac{m}{s^2}}{2}t^2 + 39.12\frac{m}{s}t - 125m = 0$$

Svolgiamo un altro esercizio



equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta > 0 \longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Delta = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta < 0 \longrightarrow$ *equazione impossibile*

Parte 2 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto B: $x_o = x_B, y_o = 0$ **)**

Adesso spostiamo l'origine nel punto B e prendiamo queste nuove componenti della velocità iniziale:

$$\left.\begin{aligned} v_{x0} &= 51.91 m/s \\ v_{y0} &= -39.12 m/s \end{aligned}\right\}$$

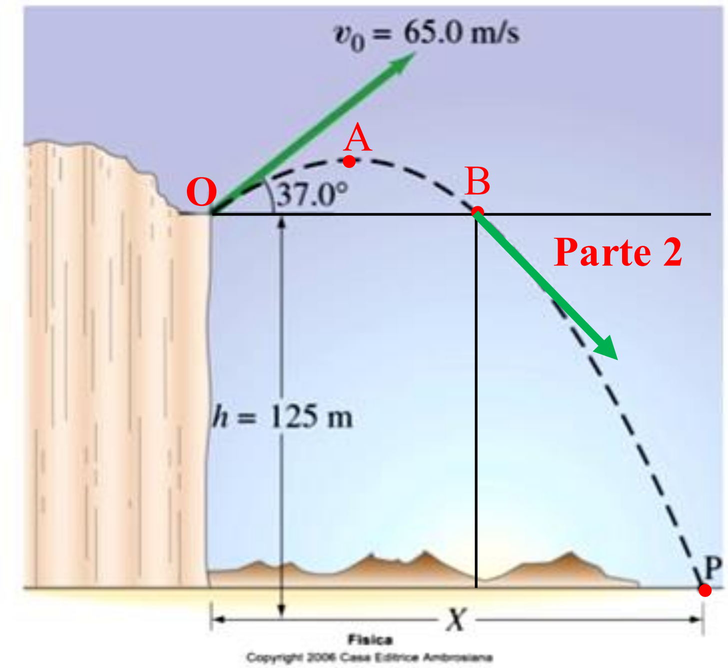
Componenti della velocità nel punto B (la v_{y0} è invertita per questioni di simmetria rispetto al punto O).

Utilizziamo l'equazione II-y per ricavare il tempo impiegato dal proiettile per passare dal punto B al punto P:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \;\rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - v_{y0}t + y = 0 \;\rightarrow \frac{9.8\frac{m}{s2}}{2}t^2 + 39.12\frac{m}{s}t - 125m = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni, una negativa (che scartiamo) e una positiva, che è: $t_{BP} = 2.45$s

Svolgiamo un altro esercizio



Esercizio

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura).

(a) **Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno**.

(b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe.

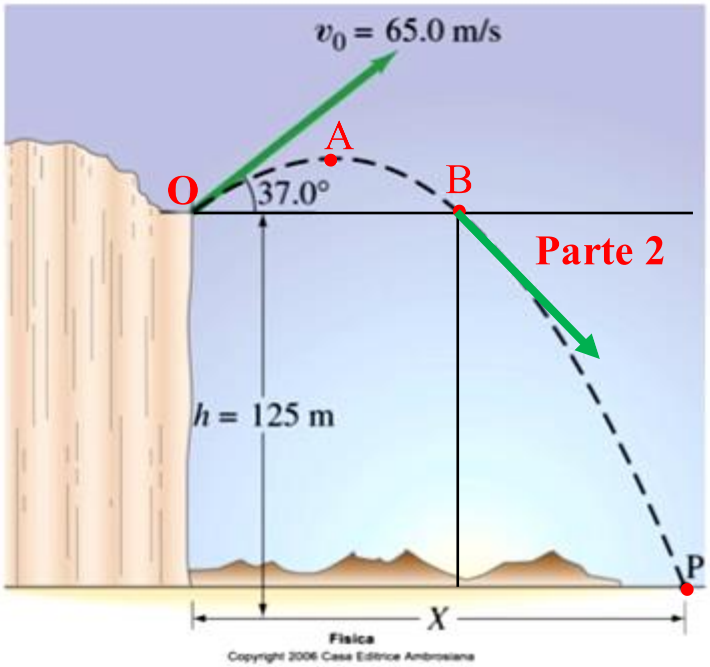
(c) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Parte 2 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto B: $x_o = x_B, y_o = 0$)

Quindi il tempo totale di volo sarà:

$$t_{tot} = t_B + t_{BP} = 7.98\text{s} + 2.45\text{s} = 10.43\text{s}$$

Svolgiamo un altro esercizio



Esercizio
Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura).

(a) **Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno**.

(b) **Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe**.

(c) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Parte 2 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto B: $x_o = x_B, y_o = 0$ **)**

Quindi il tempo totale di volo sarà:

$$t_{tot} = t_B + t_{BP} = 7.98s + 2.45s = 10.43s$$

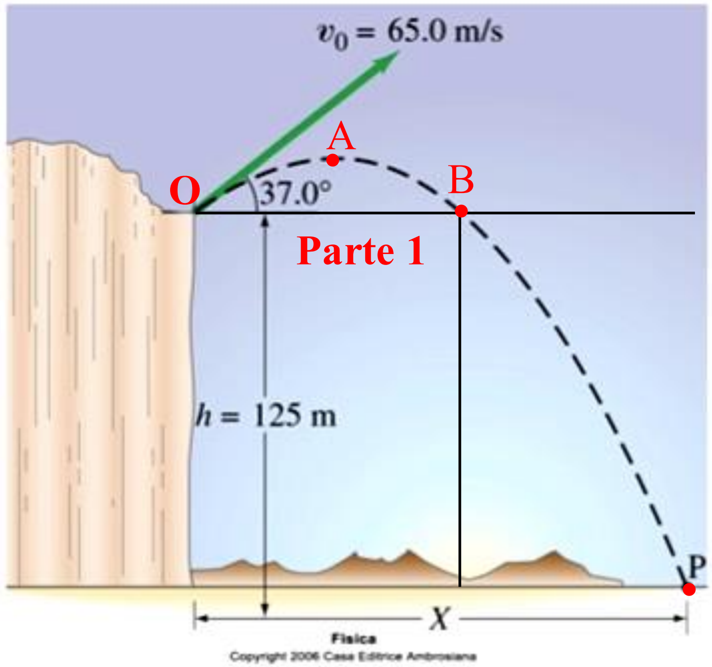
Sostituendo t_{BP} nella solita equazione II-x per il moto uniforme, e considerando che $x_o = x_B$, otteniamo la gittata complessiva:

$$x_P = x_B + v_{x0}t_{BP} \ \rightarrow \ x_P = 414.24m + (51.91m/s)(2.45s) = 414.24m + 127.18m$$

$$\rightarrow X = x_P = 541.42m$$

Non ci resta che trovare l'altezza massima del proiettile nel punto A...

Svolgiamo un altro esercizio



Esercizio

Un proiettile viene sparato dal bordo di una rupe, 125 m sopra il livello del terreno, con una velocità iniziale di 65 m/s e un angolo di 37° rispetto all'orizzontale (vedi figura).

(a) Determinate il tempo impiegato dal proiettile per colpire il punto P a livello del terreno.

(b) Determinate la gittata X del proiettile, misurata a partire dalla base della rupe.

(c) Trovate la massima altezza sopra la cima della rupe raggiunta dal proiettile.

Torniamo alla Parte 1 (origine del sistema di riferimento 2D nel punto O: $x_o = 0, y_o = 0$ **)**

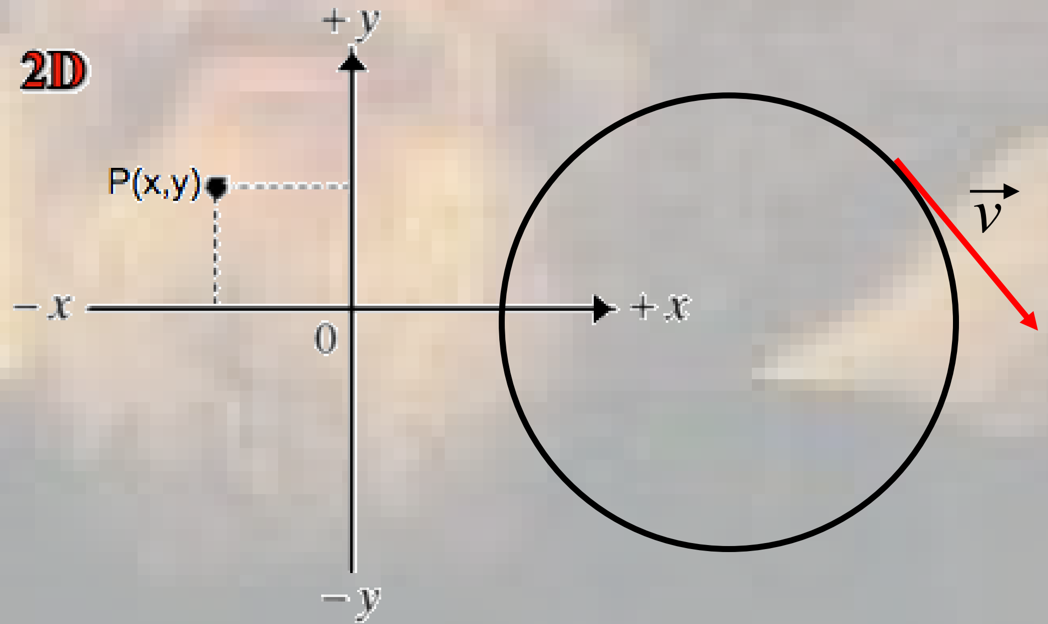
Nella prima parte dell'esercizio avevamo trovato il tempo necessario al proiettile per raggiungere il punto A:

$$t_A = \frac{v_{y0}}{g} = 3.99\ s$$

Basta quindi sostituire questo valore nell'equazione II-y del moto uniformemente accelerato (con $y_0 = 0$) per ottenere l'ordinata y_A del punto A:

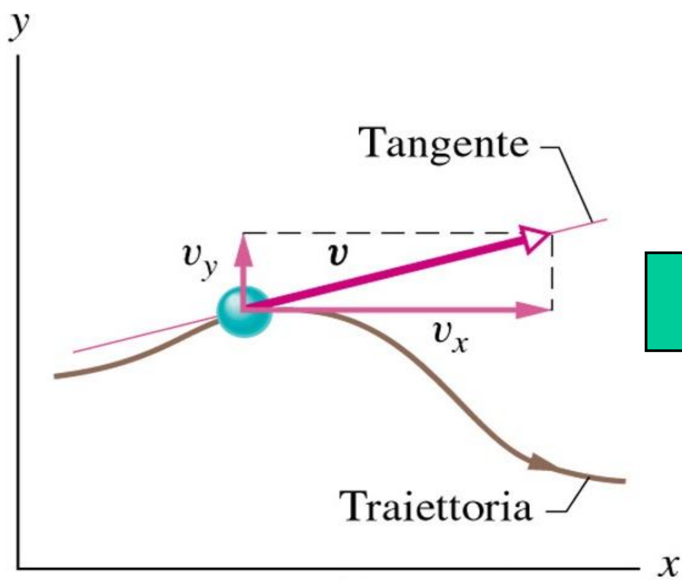
$$y_A = v_{y0} t_A - \frac{1}{2} g {t_A}^2 \ \rightarrow y_A = \left(39.12\,\frac{m}{s}\right) 3.99\ s - \frac{1}{2}\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)(3.99\ s)^2 = 78.08\ m$$

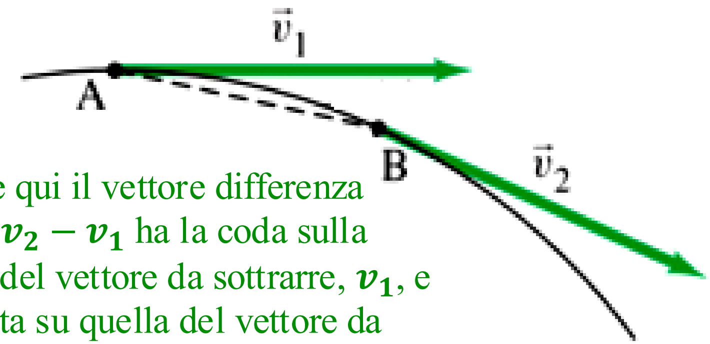
CINEMATICA del Moto Circolare Uniforme



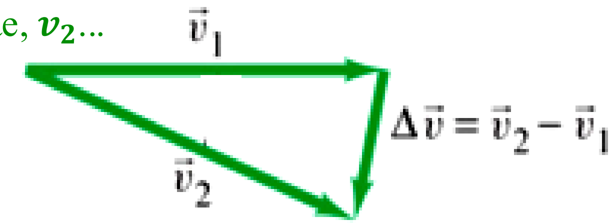
Velocità e Accelerazione in due dimensioni

Abbiamo visto che, in due dimensioni, la **velocità vettoriale istantanea** è sempre **tangente** in ogni punto alla traiettoria del punto materiale in movimento. Dunque, su **traiettorie curve**, il vettore velocità cambia continuamente direzione durante il moto del corpo considerato.

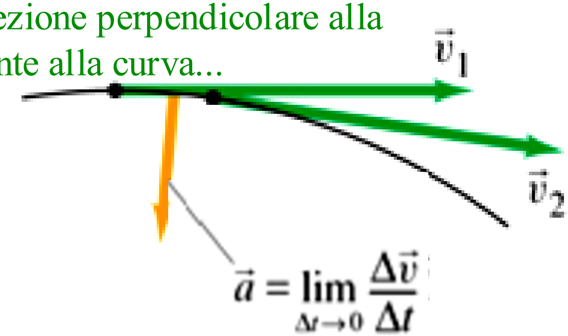




Anche qui il vettore differenza $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}$ ha la coda sulla punta del vettore da sottrarre, $\boldsymbol{v_1}$, e la punta su quella del vettore da cui si sottrae, $\boldsymbol{v_2}$...

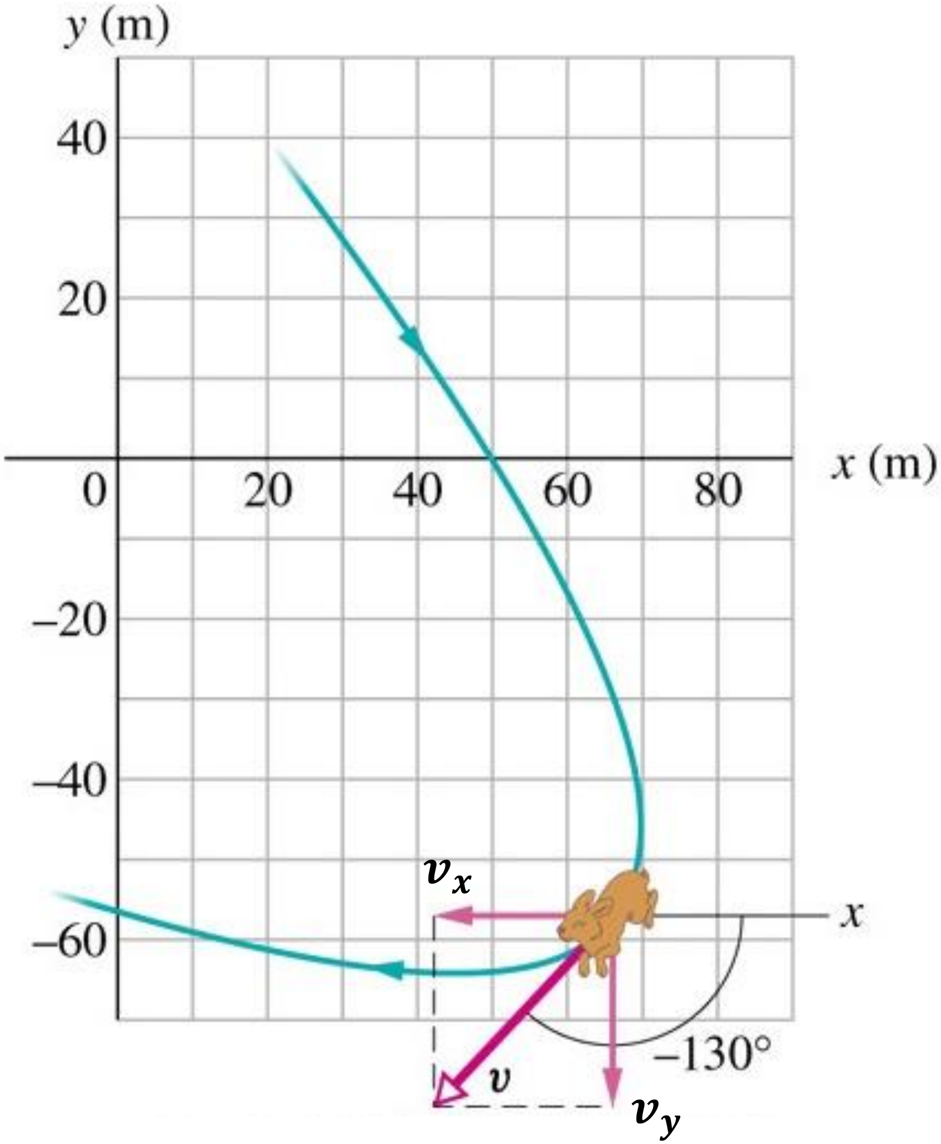


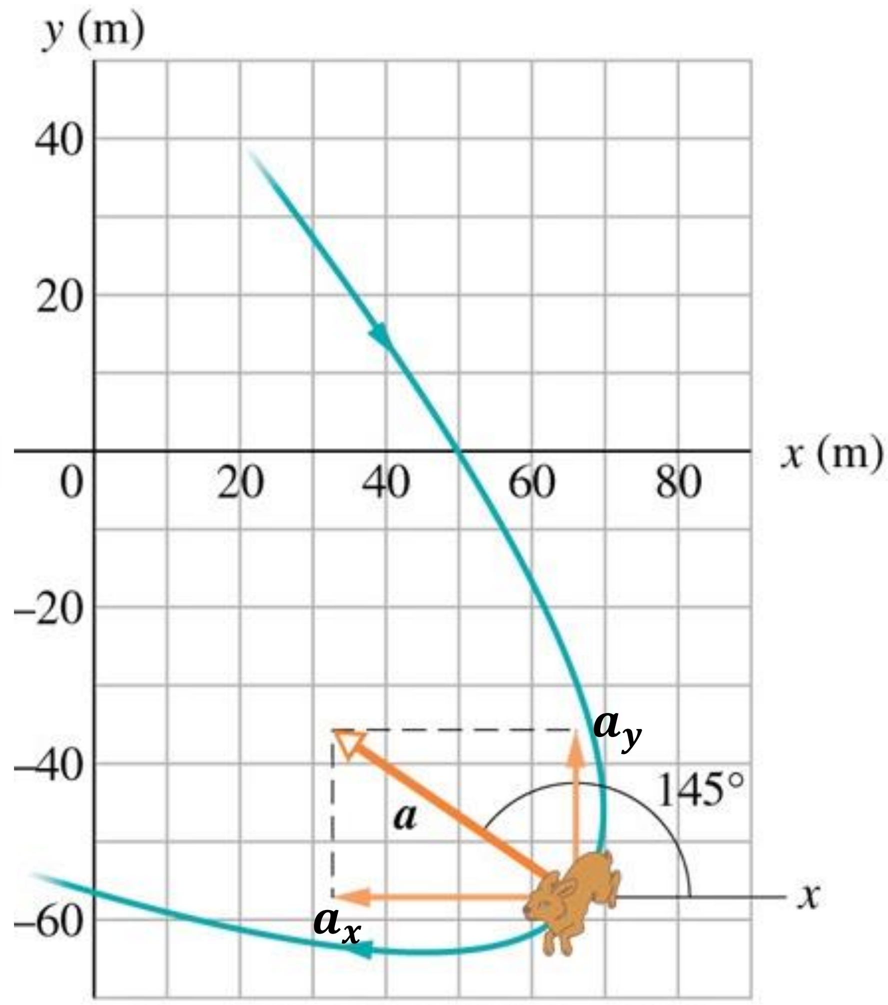
Per $\Delta t \to 0$ il vettore $\Delta \boldsymbol{v}$ assume la direzione perpendicolare alla tangente alla curva...



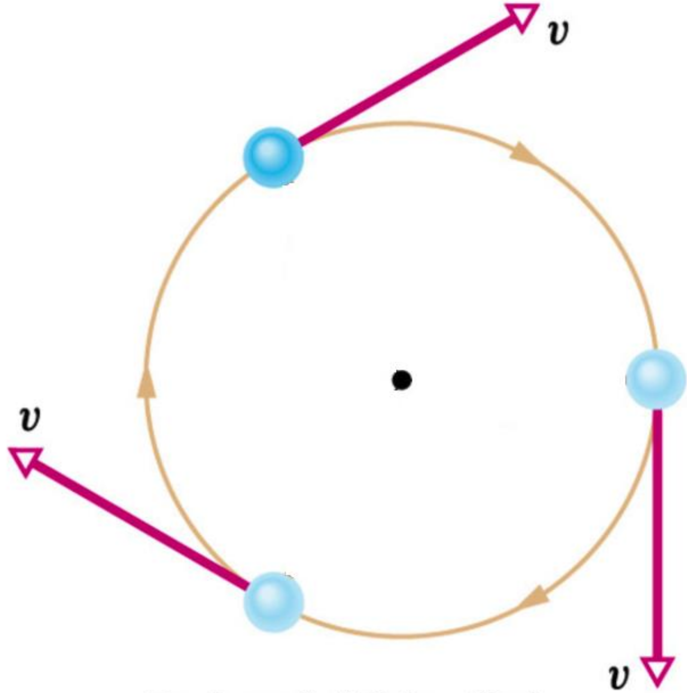
Possiamo concludere quindi che questo cambiamento di direzione della velocità è **causato da una accelerazione vettoriale istantanea** che risulta essere rappresentata da un vettore **perpendicolare alla velocità e diretto sempre verso l'interno della curva**.

Velocità e Accelerazione in due dimensioni



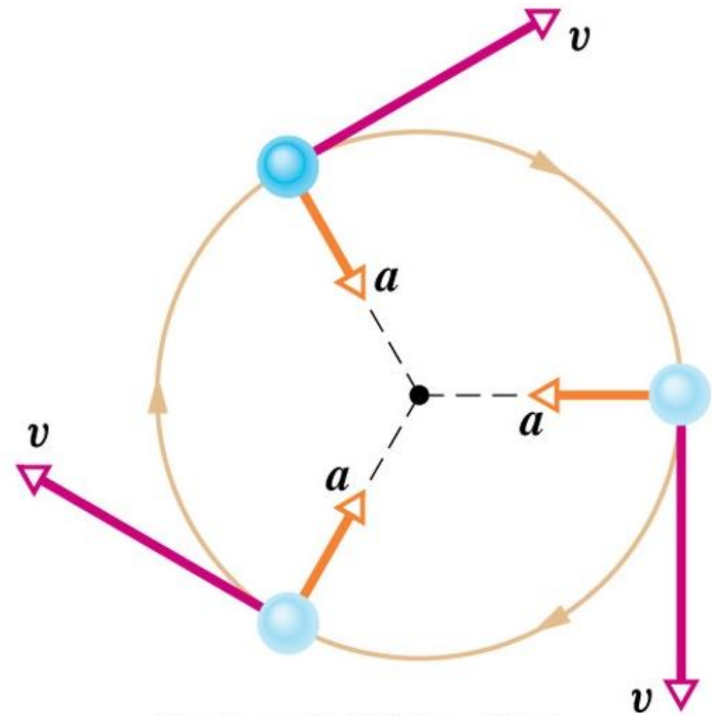


Moto circolare uniforme



Un oggetto (particella) si definisce in **moto circolare uniforme** se si muove lungo una circonferenza con una velocità scalare costante *v*.
Poichè il **vettore velocità *v*** è tangente in ogni punto alla traiettoria, **anche se il suo modulo resta costante** (e pari appunto alla velocità scalare *v*) **la sua direzione cambia ad ogni istante!**

Questo cambiamento uniforme di direzione del **vettore velocità** deve essere prodotto, come abbiamo visto, da una **accelerazione vettoriale** costante, perpendicolare in ogni punto al vettore della velocità istantanea: dunque, in questo caso, il vettore accelerazione sarà diretto verso il centro del cerchio considerato, per cui si parla di **accelerazione centripeta**.



Accelerazione Centripeta

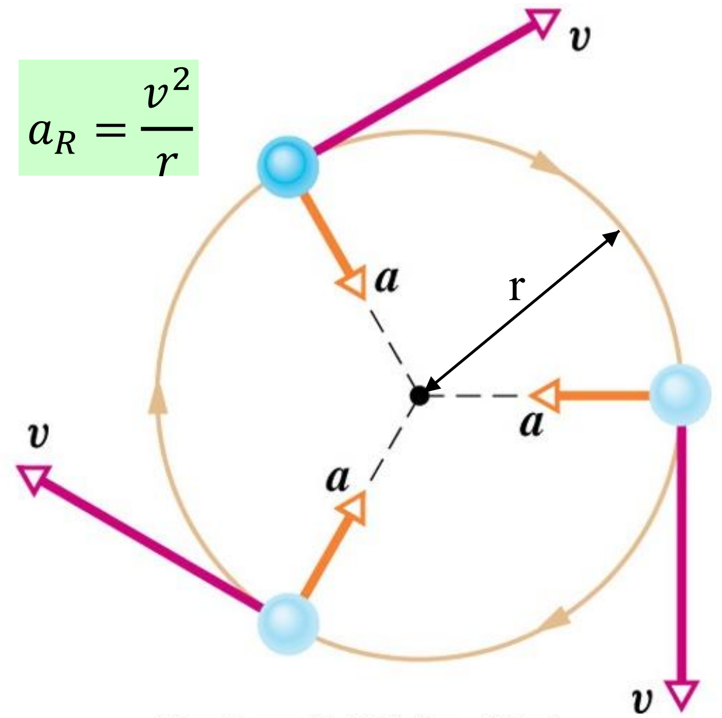
Si può dimostrare che *per un oggetto che si muove lungo una circonferenza di raggio r, con velocità scalare costante v, l'accelerazione centripeta – costante e diretta verso il centro del cerchio – ha* **modulo $a_R = v^2 / r$.**

Osservazioni

1) Nel moto circolare uniforme i vettori velocità e accelerazione sono **perpendicolari** tra di loro in ogni punto della traiettoria: questo è un ulteriore esempio che illustra l'errore che si compie pensando che velocità e accelerazione debbano avere sempre la stessa direzione.

2) Non sorprende il fatto che il **modulo** dell'accelerazione centripeta sia *direttamente proporzionale* a *v* (al quadrato) e *inversamente proporzionale* a r: infatti, maggiore è la velocità scalare *v*, più rapidamente il vettore velocità cambia direzione, mentre all'aumentare del raggio questo cambiamento di direzione avviene sempre più lentamente.

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$



Periodo e frequenza nel moto circolare uniforme

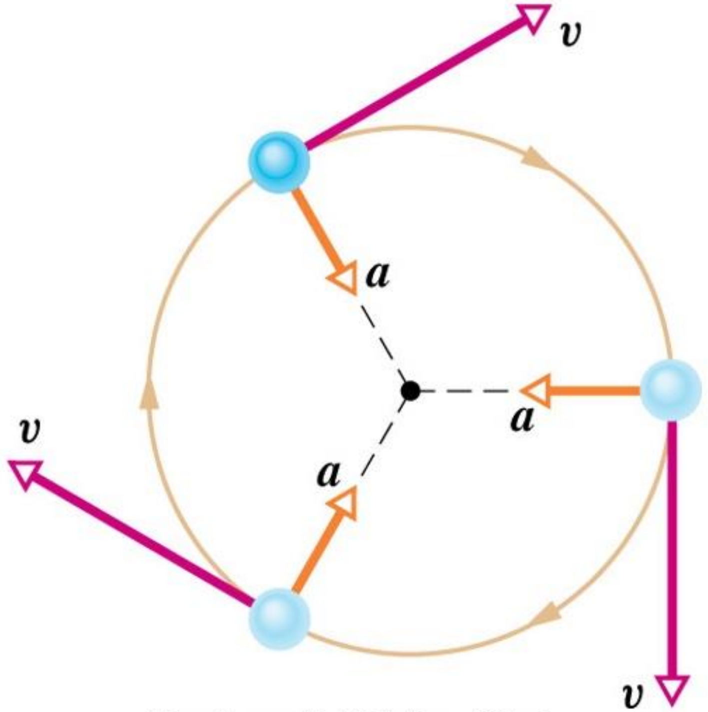
Il moto circolare uniforme è spesso descritto in termini di **frequenza** f, intesa come numero di giri al secondo (Hertz) compiuti dall'oggetto che ruota, e di **periodo** T, che rappresenta invece il tempo necessario affinchè l'oggetto compia un giro completo della circonferenza.

Periodo e frequenza sono legati dall'ovvia relazione: $T = \dfrac{1}{f}$

Se infatti, ad esempio, l'oggetto ruota con una frequenza di 3Hz (cioè di 3 giri al secondo, o 3 s^{-1}), il suo periodo sarà evidentemente pari a 1/3 s.

Osserviamo inoltre che per un oggetto che ruoti a velocità scalare costante su una circonferenza di lunghezza $C = 2\pi r$, la **velocità scalare** v sarà legata al periodo di rotazione T o alla frequenza f dalla importante relazione:

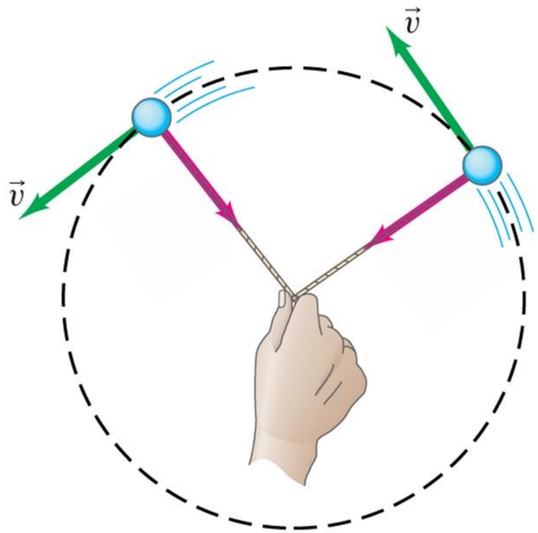
$$v = \frac{C}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$



https://www.youtube.com/watch?v=tgZ1O5wbL6E

Esempio 1: accelerazione di una palla che rotea

Esempio
Una **palla** di 150 g, legata all'estremità di una corda, rotea uniformemente lungo una **circonferenza** orizzontale di raggio 0.600 m. Sapendo che la palla compie 2.00 giri al secondo, determinare la sua **accelerazione centripeta**.



Approccio
L'accelerazione centripeta è $a_R = v^2 / r$, ma noi conosciamo r ed f, quindi possiamo partire ricavando la velocità scalare della palla da questi due dati...

Essendo, come sappiamo, la velocità scalare di rotazione pari a $v = 2\pi r f$, avremo:

$$v = 2\pi r f = 2\pi(0.600m)(2\ s^{-1}) = 7.54\ m/s$$

Dunque l'accelerazione centripeta sarà:

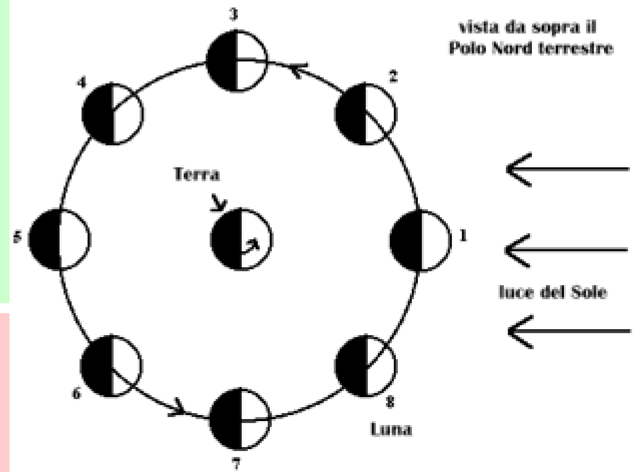
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(7.54\ m/s)^2}{0.600\ m} = 94.7\ m/s^2$$

Nota
Come si poteva sospettare, trattandosi di cinematica l'informazione sulla **massa** della palla, 150 grammi, era **inutile** ed evidentemente è stata inserita nell'esercizio solo come **distrattore**...;-)

Esempio 2: accelerazione centripeta della Luna

Esempio
La Luna gira attorno alla Terra seguendo una traiettoria (orbita) approssimativamente circolare con un raggio di circa 384.000 km, e impiega un tempo T=27.3 giorni (periodo) a percorrere un'orbita completa a velocità scalare uniforme.
Determinare l'accelerazione della Luna rispetto alla Terra.

Suggerimento
Occorre servirsi della velocità di rotazione *v*, convertendo le grandezze disponibili in unità del Sistema Internazionale (SI).



La **lunghezza** dell'orbita lunare è pari a $C = 2\pi r, \quad con \quad r = 3.84 \times 10^8 m$

Il **periodo** di rotazione, espresso in secondi, è $T = (27.3 giorni)\dfrac{24.0h}{giorno}\dfrac{3600s}{h} = 2.36 \times 10^6 s$

Dunque, essendo la velocità scalare di rotazione $v = 2\pi r / T$, avremo una **accelerazione centripeta** di modulo pari a :

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(3.84 \times 10^8 m)}{(2.36 \times 10^6 s)^2} = 0.00272 \quad m/s^2 = 2.72 \times 10^{-3} m/s^2$$

Riscrivendo questo risultato in termini della **accelerazione di gravità** g=9.80m/s^2, avremo:

$$a_R = 2.72 \cdot 10^{-3} m/s^2 \left(\frac{g}{9.80 m/s^2} \right) = 2.78 \cdot 10^{-4} g << g$$