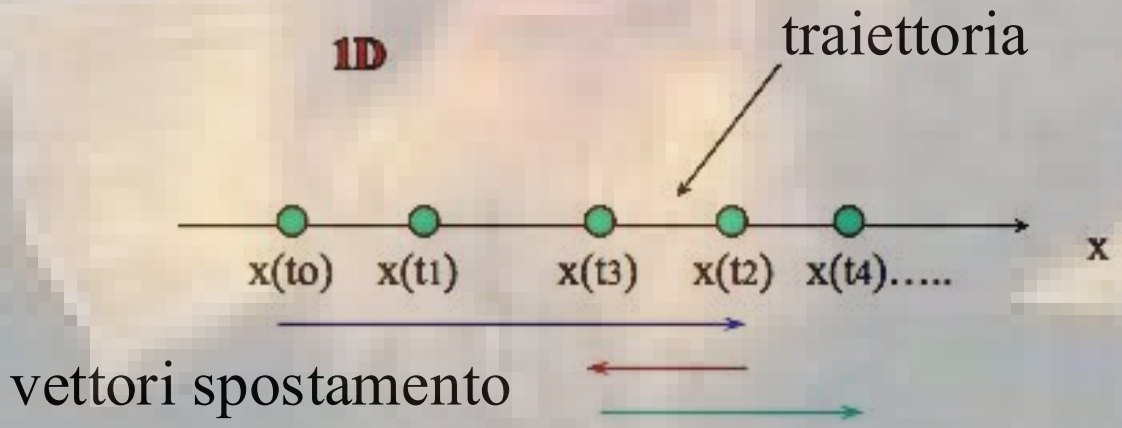
LA CINEMATICA in UNA DIMENSIONE



Moto uniforme . . . . . .

Equazione del moto uniforme
($v=v_o$=costante, $a=0$)

$$x(t) = x_0 + v_o t$$

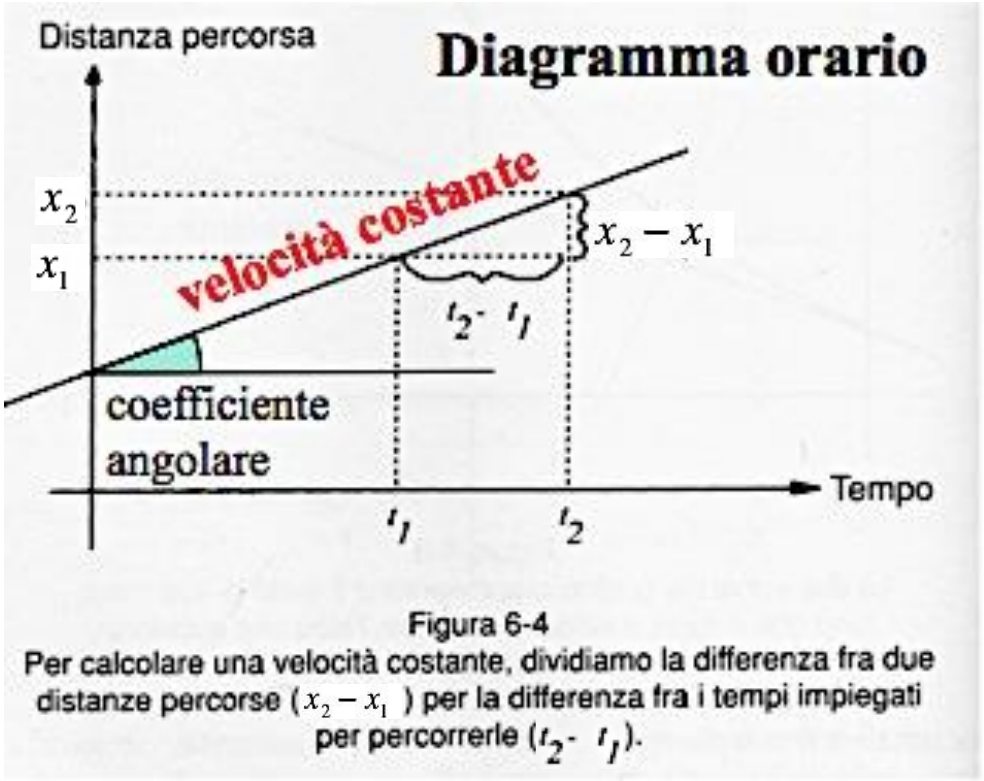


Figura 6-4
Per calcolare una velocità costante, dividiamo la differenza fra due distanze percorse ($x_2 - x_1$) per la differenza fra i tempi impiegati per percorrerle ($t_2 - t_1$).

. . . . . e moto uniformemente accelerato in 1D

Equazioni del moto uniformemente accelerato (a=cost)

(I) $v = v_0 + at$

(II) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

(III) $v^2 = v_0^{\,2} + 2a(x - x_0)$

Diagramma orario

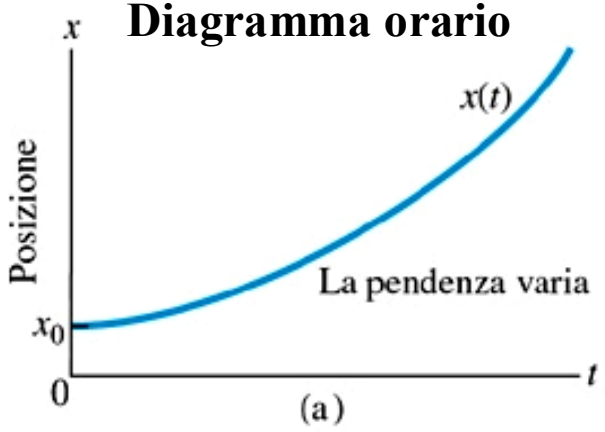


Diagramma della velocità

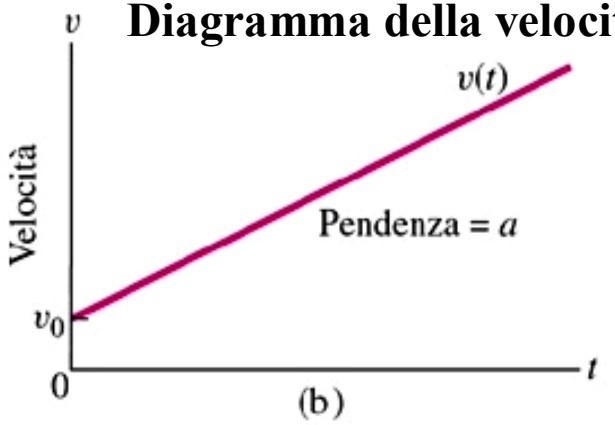
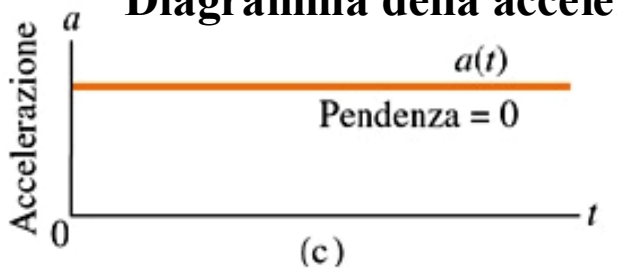


Diagramma della accelerazione

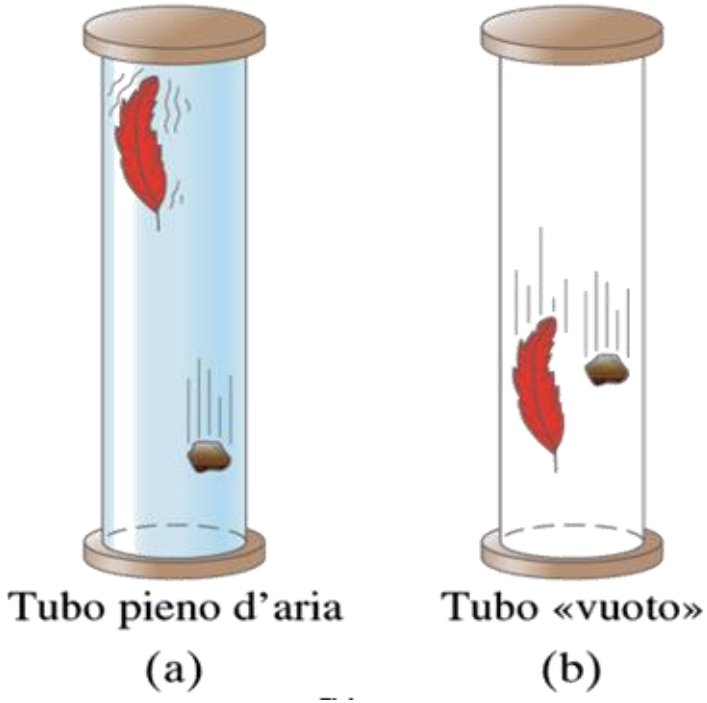


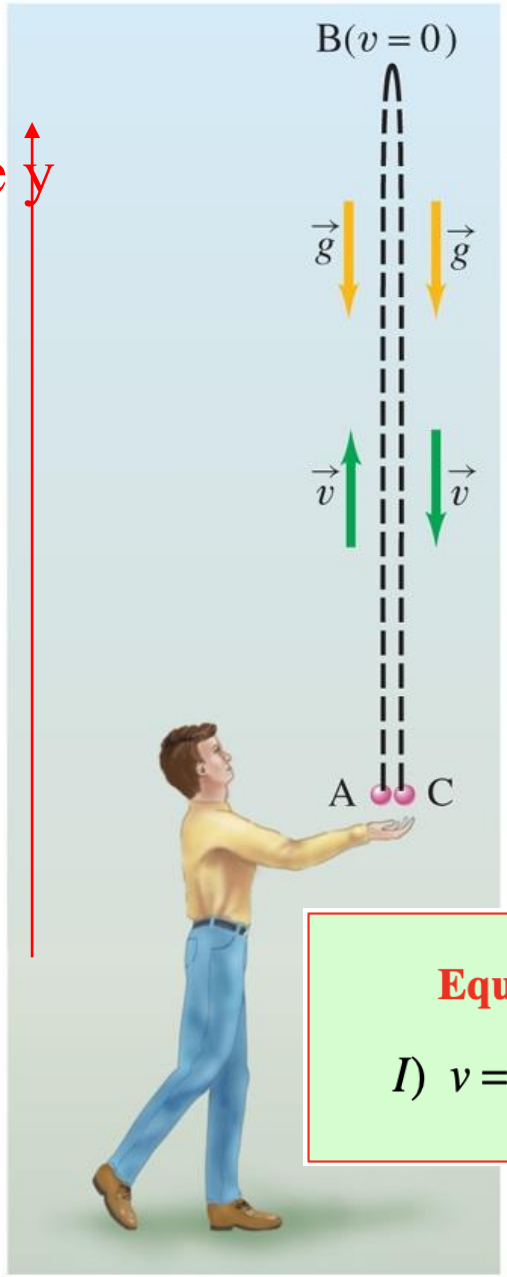
Accelerazione di gravità nel moto di caduta libera in 1D

Equazioni del moto di oggetti in caduta libera (a = – g = cost)

$$I)\ v = v_0 - gt \qquad II)\ y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad III)\ v^2 = v_0^{\,2} - 2g(y - y_0)$$







Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

Esempio 3:

Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: **(1) quanto in alto arriva la palla;** (2) quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C).

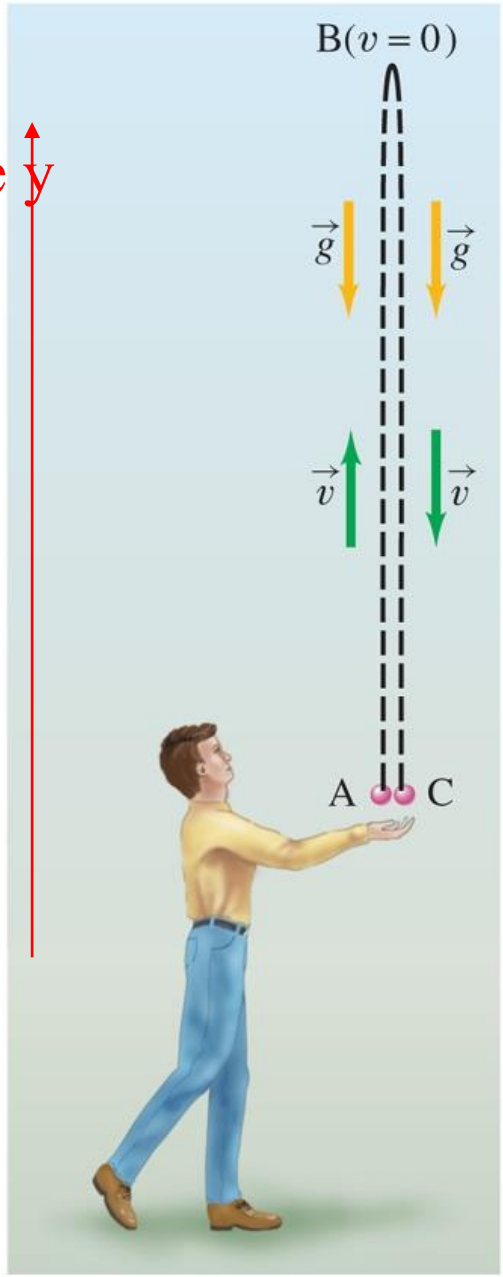
(1) Avendo scelto stavolta come verso positivo dell'asse y quello verso l'alto, l'accelerazione sarà pari ad $a = -g =$ $= -9.80$ m/s^2. Conviene adesso utilizzare l'**equazione III** del moto uniformemente accelerato di un oggetto sottoposto alla sola accelerazione di gravità:

$$v^2 = v_0^{\,2} - 2g(y - y_0)$$

dove sappiamo che $y_0 = 0$, $v_0 = 15.0$m/s e $v = 0$ (nel punto B), mentre l'incognita è y.

Equazioni del moto di oggetti in caduta libera ($a = -g = $ cost)

$$I)\ v = v_0 - gt \qquad II)\ y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad III)\ v^2 = v_0^{\,2} - 2g(y - y_0)$$



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

Esempio 3:

Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: **(1) quanto in alto arriva la palla;** (2) quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C).

(1) Avendo scelto stavolta come verso positivo dell'asse y quello verso l'alto, l'accelerazione sarà pari ad $a = -g = -9.80$ m/s^2. Conviene adesso utilizzare l'**equazione III** del moto uniformemente accelerato di un oggetto sottoposto alla sola accelerazione di gravità:

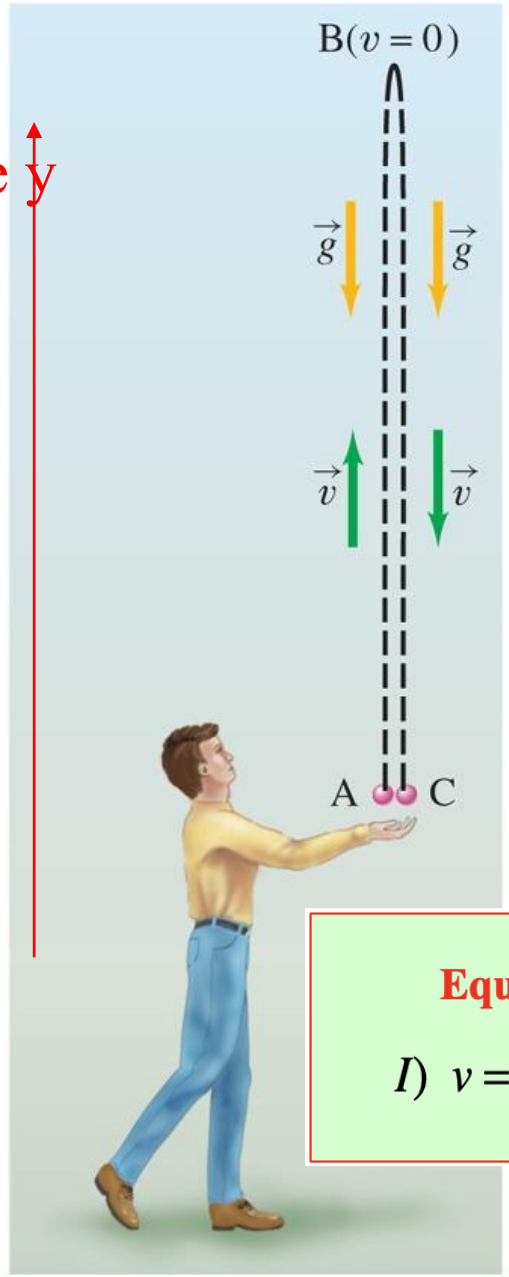
$$v^2 = v_0^{\,2} - 2g(y - y_0)$$

dove sappiamo che $y_0 = 0$, $v_0 = 15.0$m/s e $v = 0$ (nel punto B), mentre l'incognita è y.

Risolviamo dunque l'equazione rispetto ad y e sostituiamo:

$$y = \frac{v^2 - v_0^{\,2}}{-2g} = \frac{0 - (15m/s)^2}{-2(9.8m/s^2)} = 11.5m$$

Quindi nel punto B la palla raggiunge un'altezza di 11.5m al di sopra della mano.



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

Esempio 3:

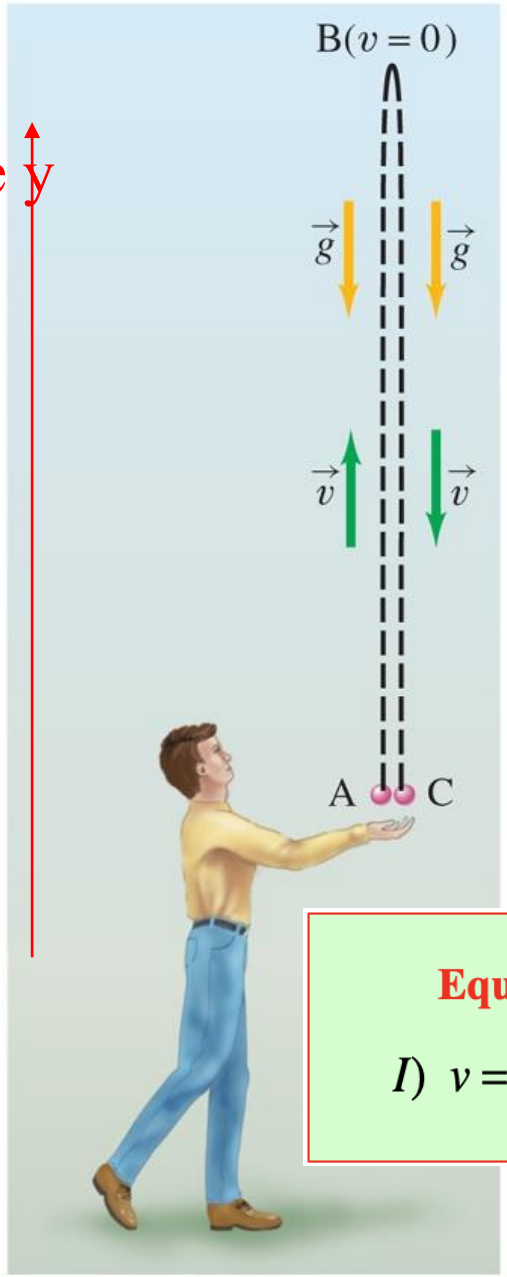
Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: (1) quanto in alto arriva la palla; (2) **quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C)**.

(2) Al secondo punto si può rispondere seguendo **due procedimenti diversi**. Potremmo ad esempio iniziare calcolando l'intervallo di tempo tra il momento del lancio (t = 0, v_0 = 15m/s) e il momento in cui la palla raggiunge il punto B (y_B = 11.5m e v = 0). La nostra incognita è in questo caso il tempo t , che possiamo agevolmente ricavare dall'**equazione I** del moto di oggetti in caduta libera:

$$v = v_0 - gt$$

Equazioni del moto di oggetti in caduta libera ($a = -g = \text{cost}$)

$$I)\ v = v_0 - gt \qquad II)\ y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad III)\ v^2 = v_0^{\,2} - 2g(y - y_0)$$



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

Esempio 3:

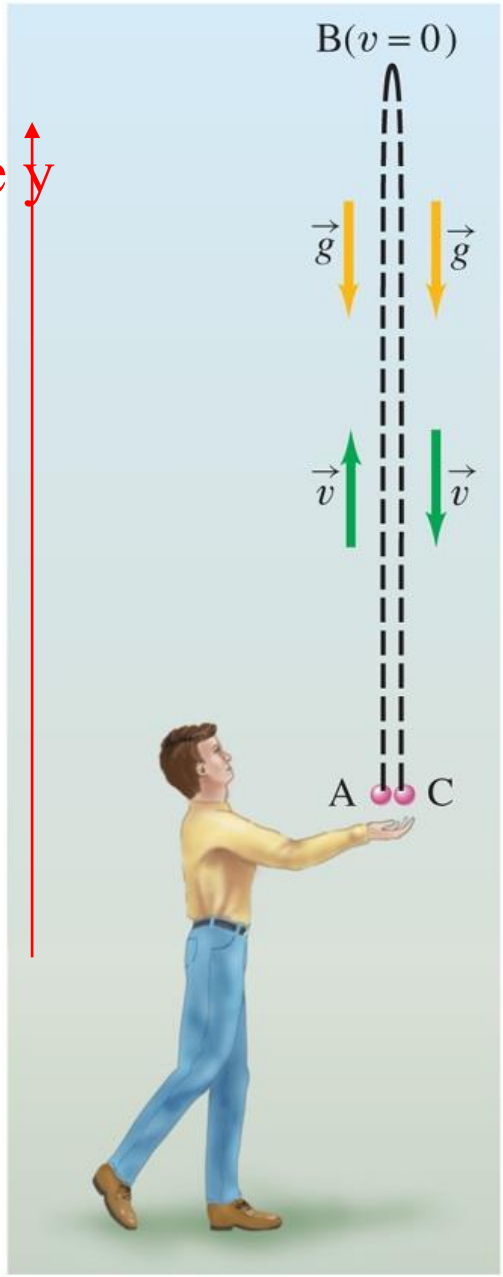
Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: (1) quanto in alto arriva la palla; (2) **quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C)**.

(2) Al secondo punto si può rispondere seguendo **due procedimenti diversi**. Potremmo ad esempio iniziare calcolando l'intervallo di tempo tra il momento del lancio (t = 0, v_0 = 15m/s) e il momento in cui la palla raggiunge il punto B (y_B = 11.5m e v = 0). La nostra incognita è in questo caso il tempo t , che possiamo agevolmente ricavare dall'**equazione I** del moto di oggetti in caduta libera:

$$v = v_0 - gt \quad \square \quad t = \frac{v - v_0}{-g} = \frac{0 - 15 m/s}{-9.80 m/s^2} = 1.53 s$$

Equazioni del moto di oggetti in caduta libera ($a = -g$ = cost)

$$I)\ v = v_0 - gt \qquad II)\ y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad III)\ v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

Esempio 3:

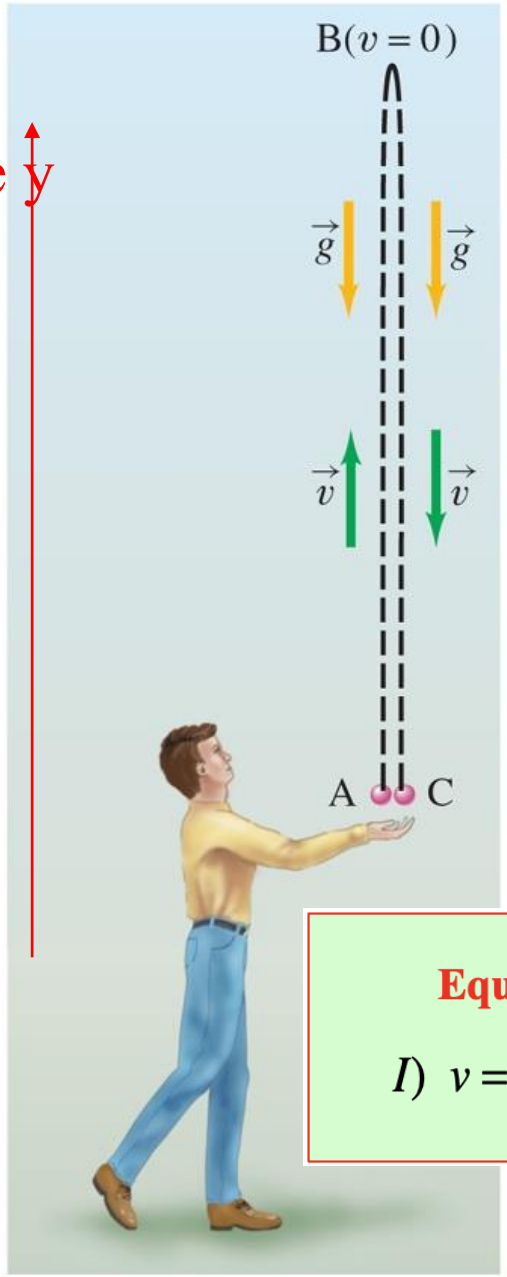
Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: (1) quanto in alto arriva la palla; (2) **quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C)**.

(2) Al secondo punto si può rispondere seguendo **due procedimenti diversi**. Potremmo ad esempio iniziare calcolando l'intervallo di tempo tra il momento del lancio (t = 0, v_0 = 15m/s) e il momento in cui la palla raggiunge il punto B (y_B = 11.5m e v = 0). La nostra incognita è in questo caso il tempo t , che possiamo agevolmente ricavare dall'**equazione I** del moto di oggetti in caduta libera:

$$v = v_0 - gt \quad \square \quad t = \frac{v - v_0}{-g} = \frac{0 - 15m/s}{-9.80m/s^2} = 1.53s$$

...da cui, moltiplicando per due, si ricava il tempo totale in cui resta in aria la palla prima di ritornare in mano al lanciatore:

$$t = 1.53s \ \square 2 = 3.06s$$



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

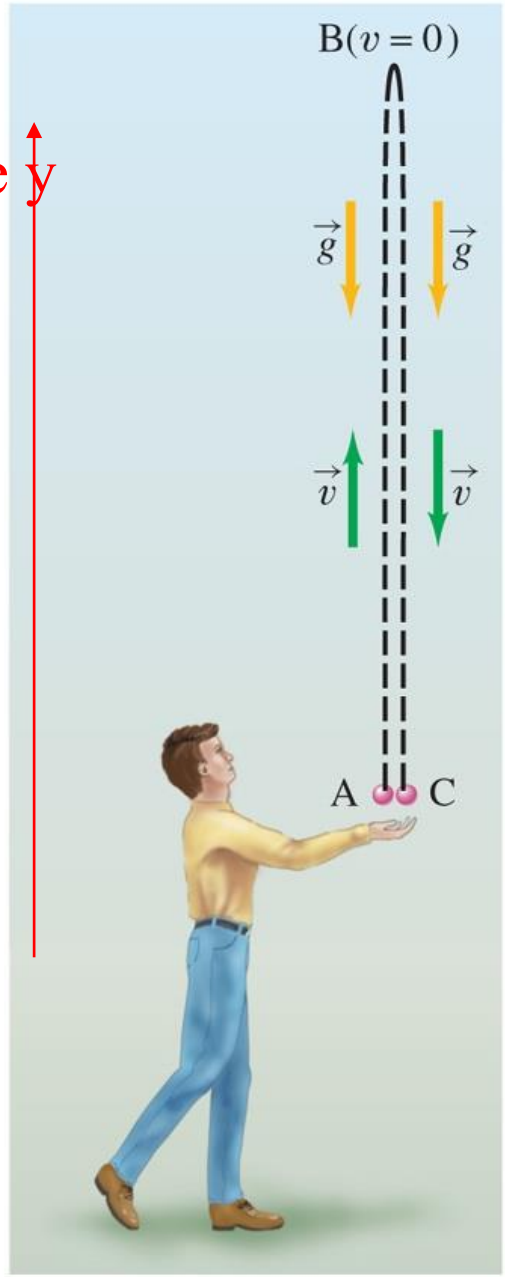
Esempio 3:

Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: (1) quanto in alto arriva la palla; (2) **quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C)**.

(2) **In alternativa**, potremmo invece considerare l'intervallo di tempo per l'intero moto da A a B e poi di nuovo a C in un unico passaggio usando **l'equazione II** del moto di oggetti in caduta libera, dato che y rappresenta la posizione della palla e non la distanza da essa percorsa. Essendo y = 0 nei punti A e C, avremo allora:

Equazioni del moto di oggetti in caduta libera ($a = -g = \text{cost}$)

$$I)\ v = v_0 - gt \qquad II)\ y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad III)\ v^2 = v_0^{\,2} - 2g(y - y_0)$$



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

Esempio 3:

Consideriamo adesso una palla lanciata verso l'alto con una velocità iniziale v_0=15.0m/s e calcoliamo: (1) quanto in alto arriva la palla; (2) **quanto a lungo rimane in aria la palla prima di ricadere in mano al lanciatore (punto C)**.

(2) **In alternativa**, potremmo invece considerare l'intervallo di tempo per l'intero moto da A a B e poi di nuovo a C in un unico passaggio usando **l'equazione II** del moto di oggetti in caduta libera, dato che y rappresenta la posizione della palla e non la distanza da essa percorsa. Essendo y = 0 nei punti A e C, avremo allora:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

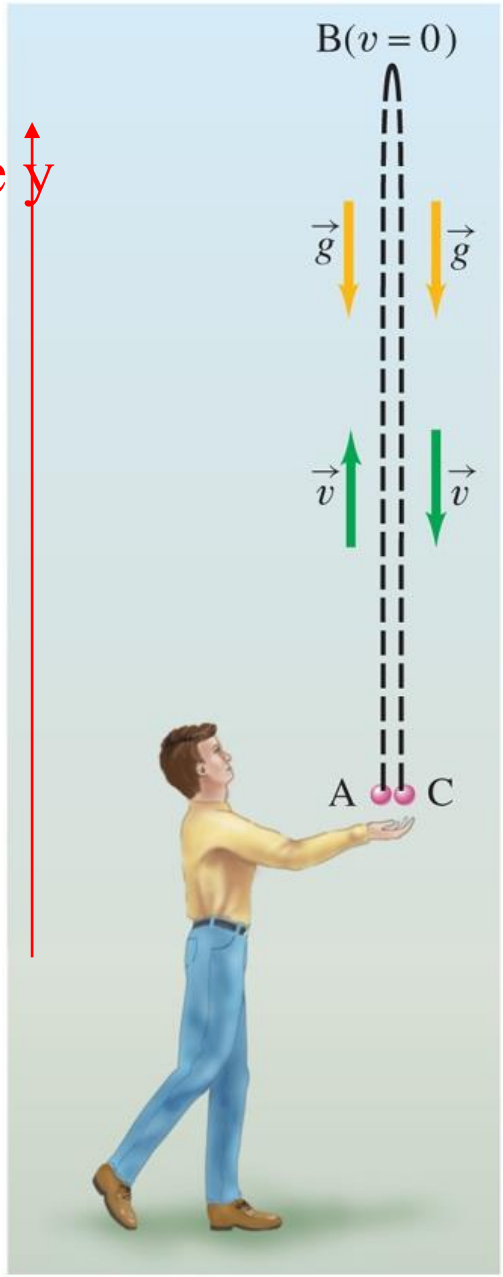
$$0 = 0 + (15 m/s)t - \frac{1}{2}(9.80 m/s^2)t^2$$

...che è un'equazione di secondo grado incompleta 'spuria', cioè del tipo $bx + ax^2 = 0 \rightarrow (b + ax)\, x = 0$ e che dunque, sostituendo i nostri valori, possiamo riscrivere come: $(15 m/s - 4.90 m/s^2 \, t)t = 0$

Dalla legge di annullamento del prodotto si ricavano dunque le due soluzioni:

$t_1 = 0$ che corrisponde al punto iniziale A

$t_2 = \frac{15.0 m/s}{4.90 m/s^2} = 3.06 s$ che corrisponde al punto finale C e che è quindi quella cercata!

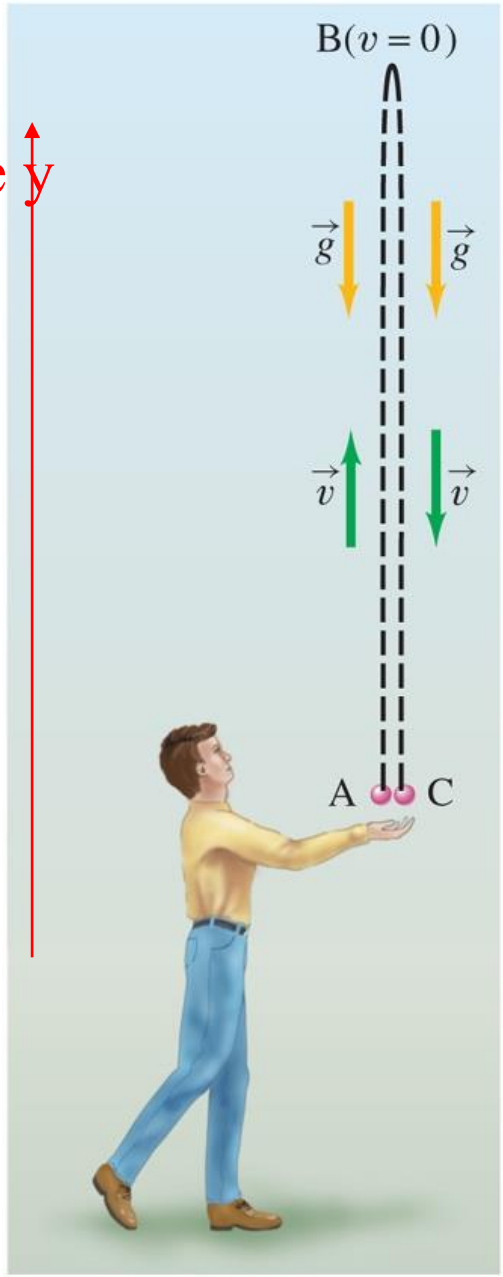


Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

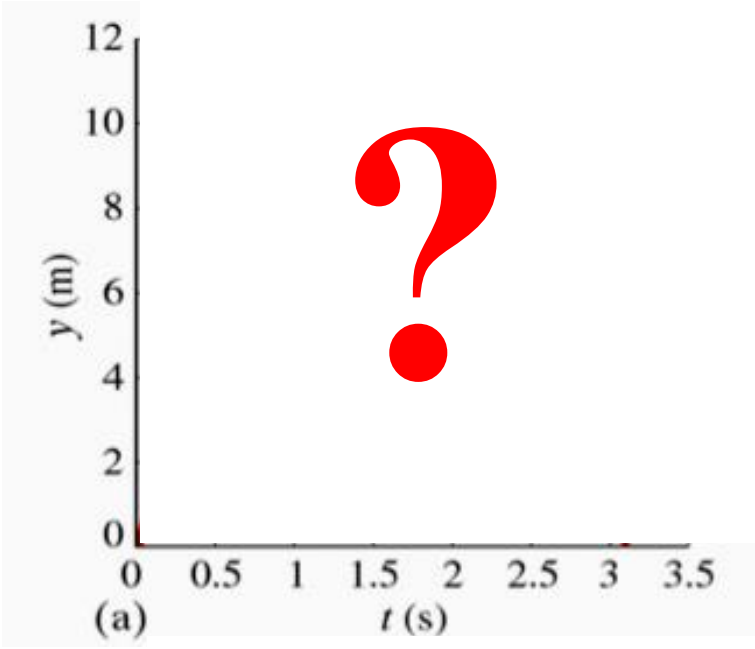
Proviamo a disegnare il diagramma orario e il diagramma della velocità relativi all'esempio appena visto…

asse y

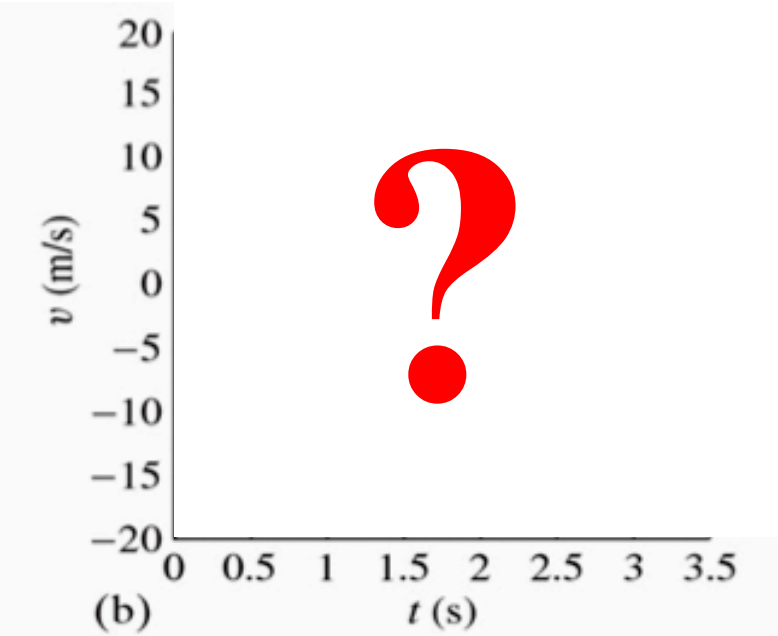


Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana



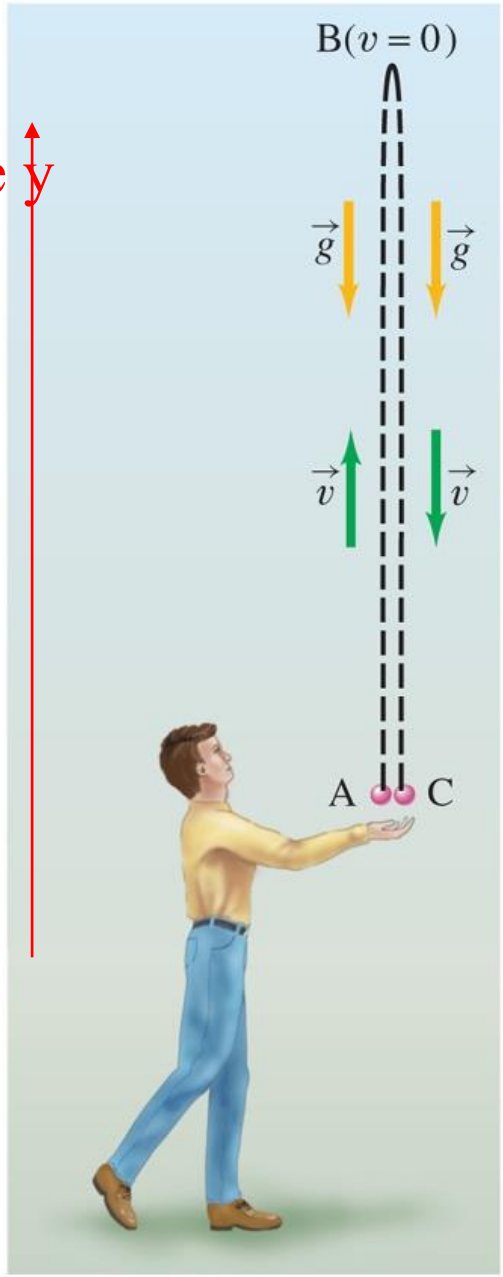
?



?

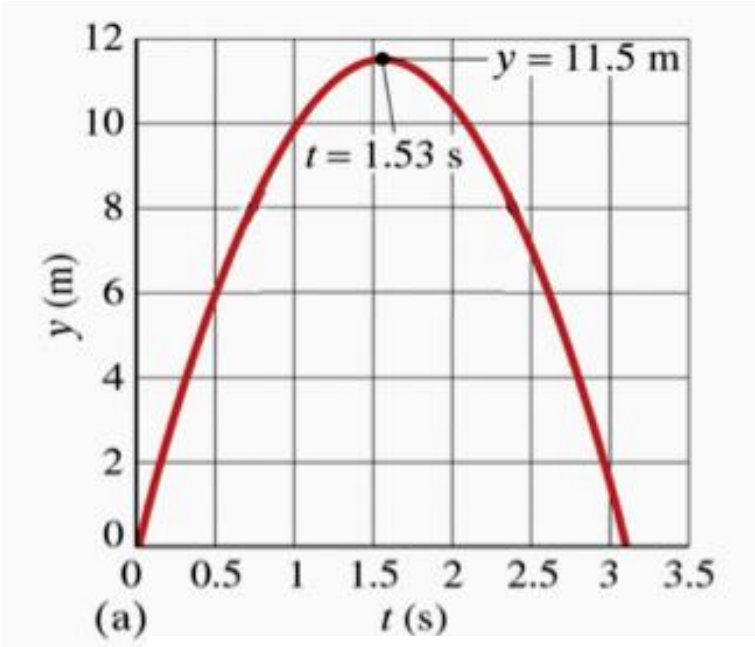
Fisica

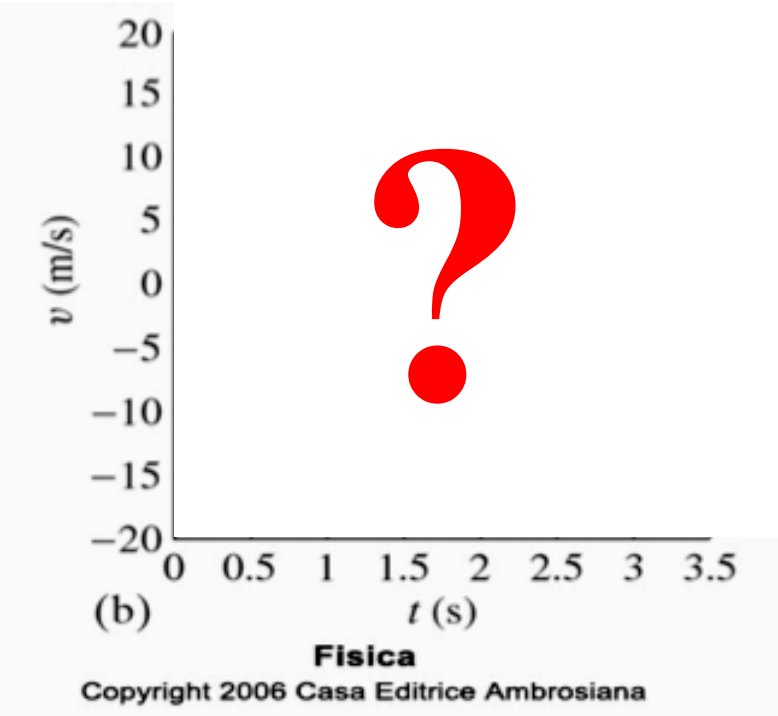
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana



Fisica

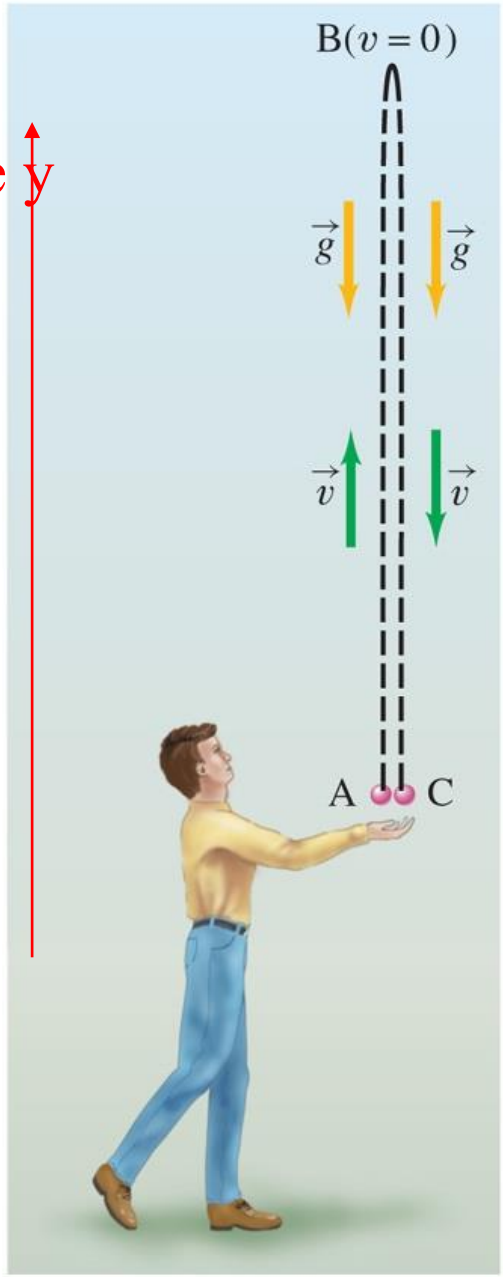
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana





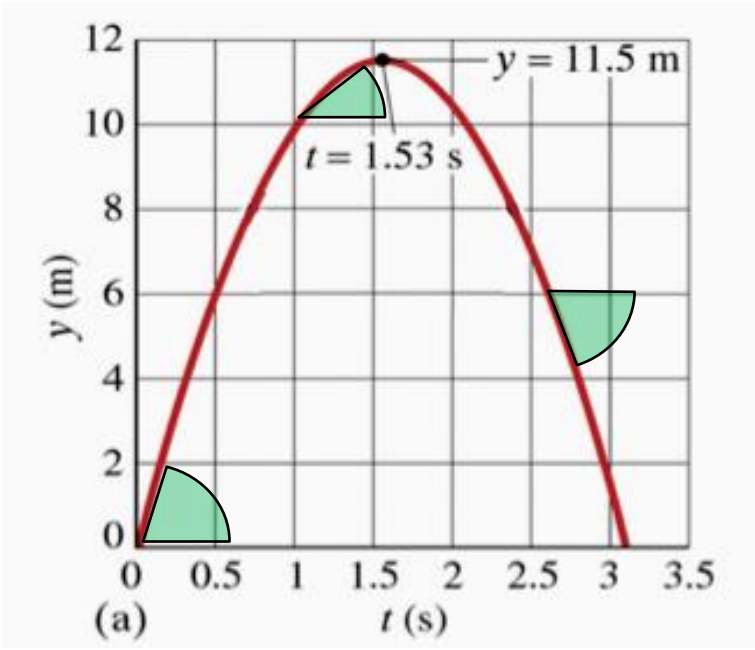
Fisica

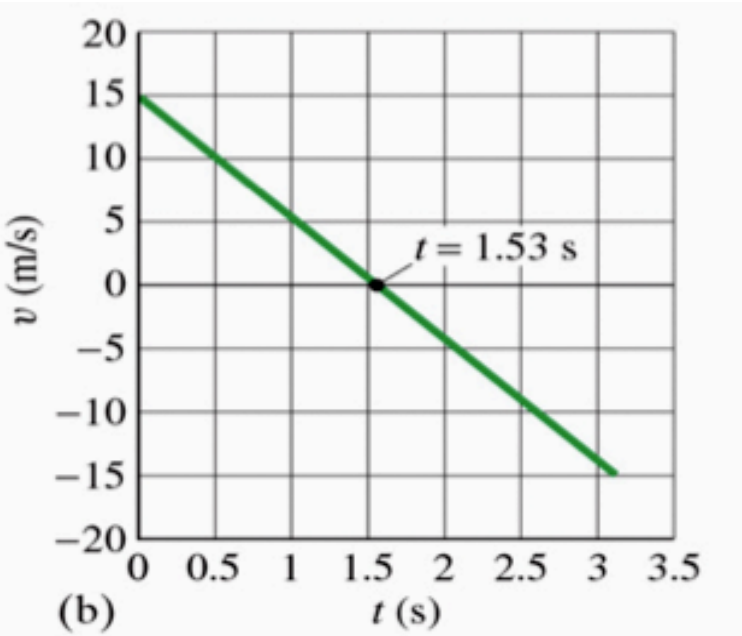
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

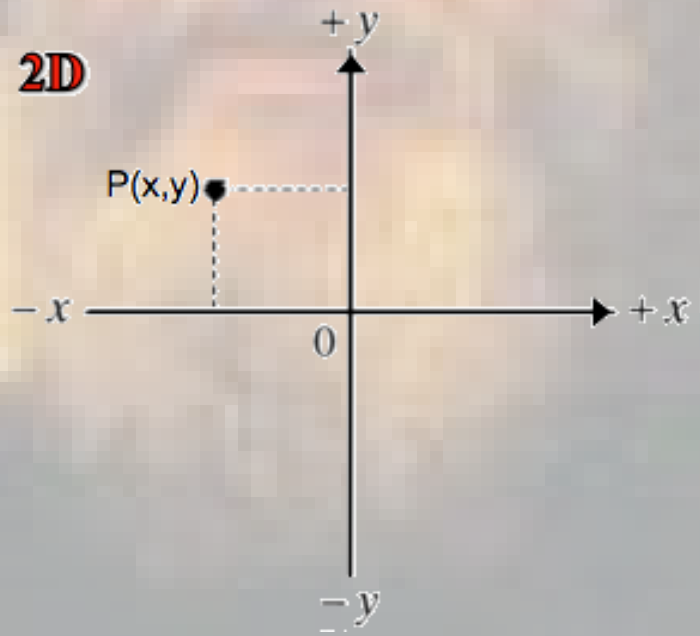




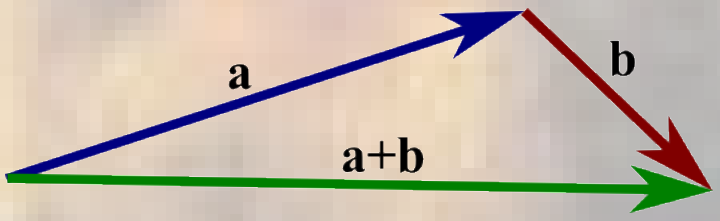
Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

VERSO LA CINEMATICA in 2D…



I Vettori



Grandezze scalari e grandezze vettoriali



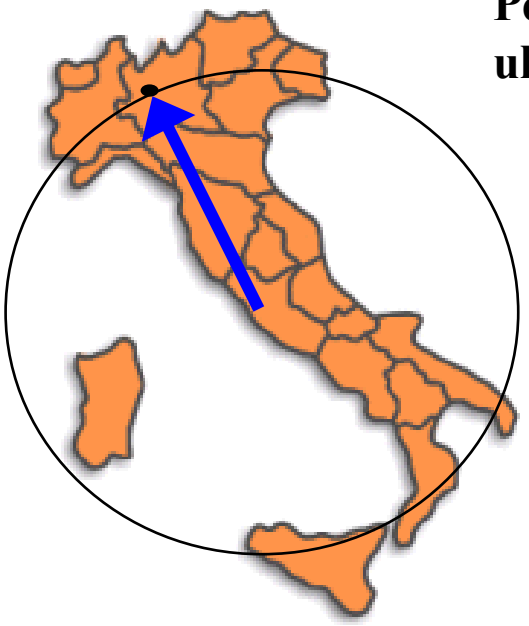
La distanza tra Roma e Milano è di 600 km.
Se parto da Roma e percorro 600 km mi troverò a Milano?

NO, non è detto… infatti, mentre la *distanza* tra due punti o la *lunghezza* di un oggetto sono completamente definite da un numero e dalla sua unità di misura, una grandezza come lo ***spostamento*** ha bisogno di ulteriori informazioni. E' facile capire che percorrendo 600 km da Roma in linea retta ci si può trovare in qualsiasi punto di una circonferenza di centro Roma e raggio 600 km: **dipende dalla direzione che abbiamo scelto**! Il motivo è che **lo spostamento – come già sappiamo – è una *grandezza vettoriale*, mentre la distanza è una *grandezza scalare*.**

Una ***grandezza scalare*** è completamente definita da un valore numerico (con la sua unità di misura).
Ecco alcuni esempi di scalari:
•distanza = 600 km
•massa = 250 kg
•intervallo di tempo = 23 s
•energia cinetica = 40 J *(Joule, che come vedremo è l'unità di misura dell'energia nel SI)*

La somma di grandezze scalari (omogenee) si esegue come la normale somma tra numeri reali.

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

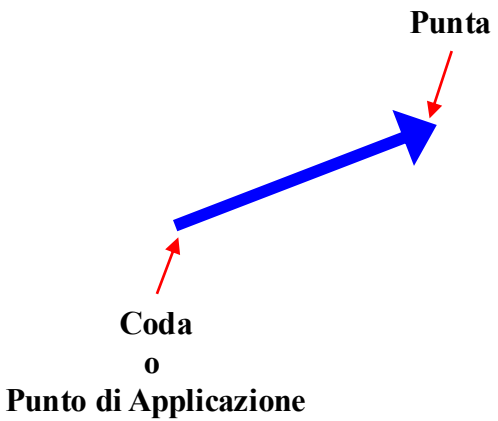


Per spostarmi correttamente da Roma a Milano ho bisogno di ulteriori informazioni, espresse da una grandezza vettoriale

Generalmente le tre informazioni che individuano una ***grandezza vettoriale*** (e dunque il vettore ad essa corrispondente) sono:

* **l'intensità o modulo** (un numero reale con unità di misura)
* **la direzione** (l'insieme delle rette parallele al vettore dato)
* **il verso** (uno dei due versi di percorrenza, data una direzione)

I **vettori**, utile strumento matematico per trattare queste grandezze, sono rappresentati da **segmenti orientati** che visualizzano in modo grafico le tre informazioni.
Il punto indicato dalla freccia si chiama **punta** del vettore, mentre il punto iniziale si chiama **coda**, o anche **punto di applicazione** del vettore. Un vettore si indica ad esempio con $\vec{v}$ mentre il suo modulo si scrive $|\vec{v}|$ o semplicemente v .



Ecco alcuni esempi di grandezze vettoriali:

- Spostamento = 600 km in **direzione** Nord-Sud, **verso** Nord
- Velocità = 50 km/h **verso** Sud
- Accelerazione = 4.2 m/s^2 **verso** Nord-Est
- Forza = 100 N in **direzione** verticale**, verso** l'alto

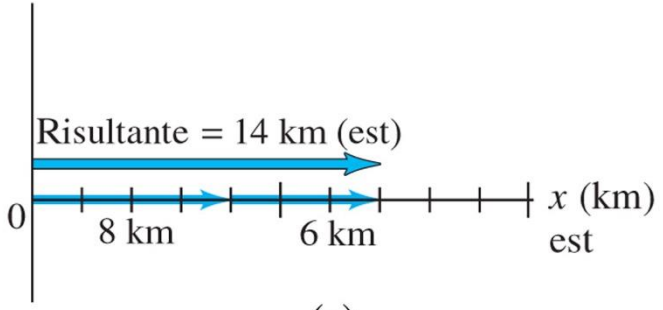
Operazioni con le grandezze vettoriali



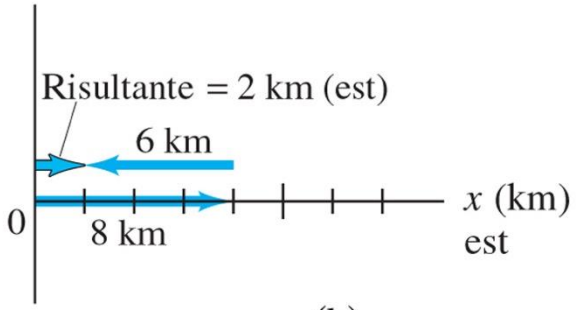
La freccia che rappresenta un vettore $\vec{v}$ è ovviamente sempre disegnata in modo tale da indicarne la **direzione** e il **verso**, mentre spesso la **lunghezza** della freccia è proporzionale al **modulo** del vettore (vedi ad esempio i vettori velocità disegnati in figura).

La **somma** di grandezze vettoriali (omogenee) **non** si esegue in generale come la normale somma tra numeri reali ma necessita di un metodo specifico per ottenere il vettore **risultante**.

In realtà si può usare la semplice aritmetica **solo** per sommare algebricamente vettori che abbiano la **stessa direzione,** come accade quando si lavora, come abbiamo fatto finora, su sistemi di riferimento ad una dimensione:



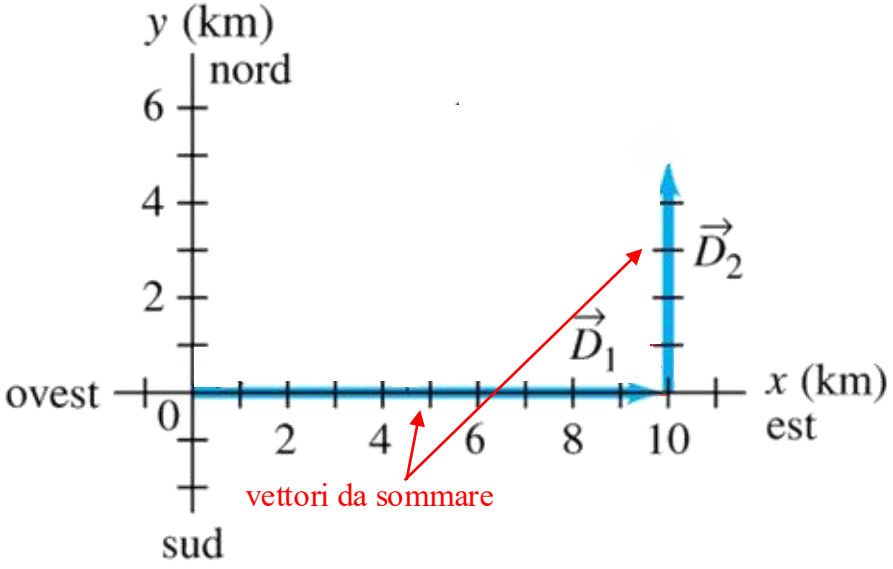
(a)



(b)

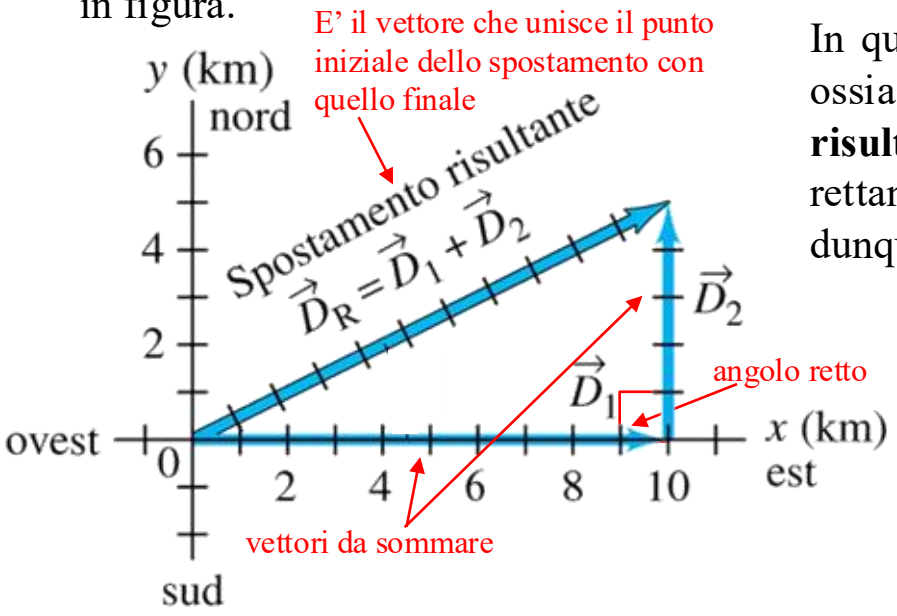
Somma di vettori in 2 dimensioni

Le cose cambiano, invece, se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (ad es. di modulo 10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.

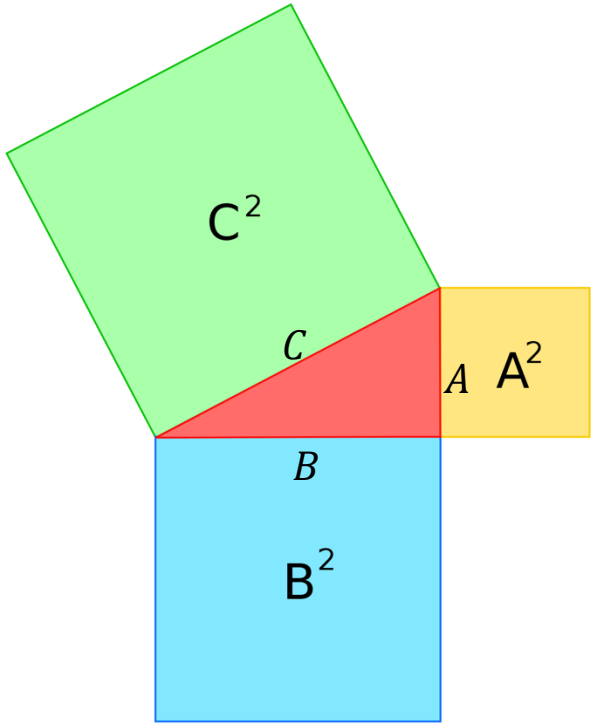


Somma di vettori in 2 dimensioni

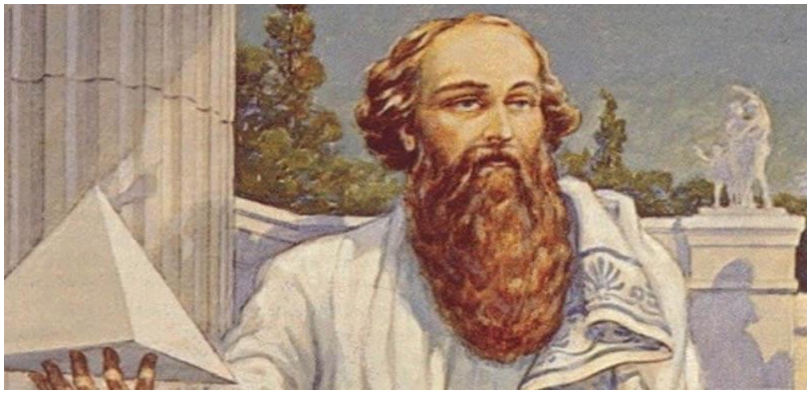
Le cose cambiano, invece, se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (ad es. di modulo 10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.



In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora:*



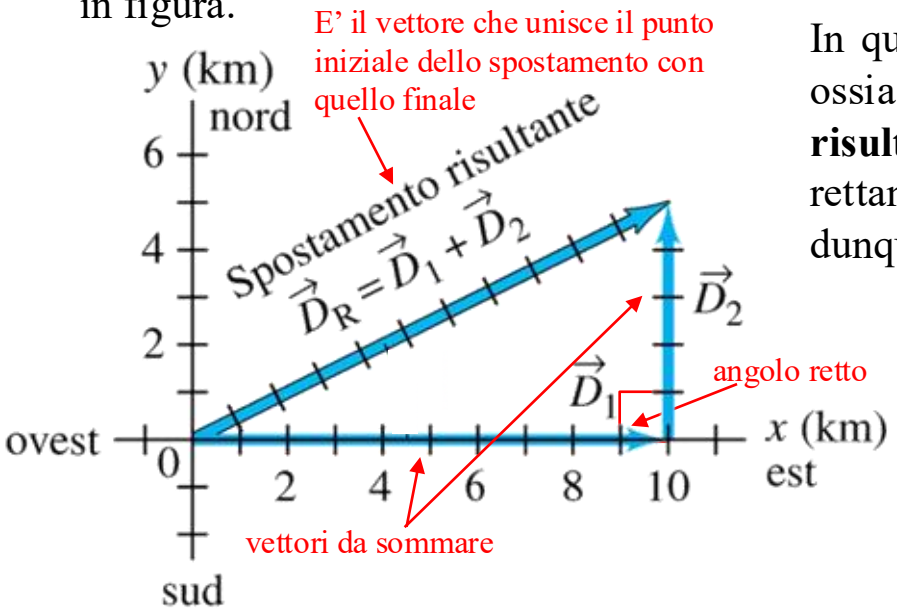
$C^2 = B^2 + A^2 \rightarrow C = \sqrt{B^2 + A^2}$



Pitagora (Samo, 580 a.C. circa - Metaponto, 495 a.C. circa)

Somma di vettori in 2 dimensioni

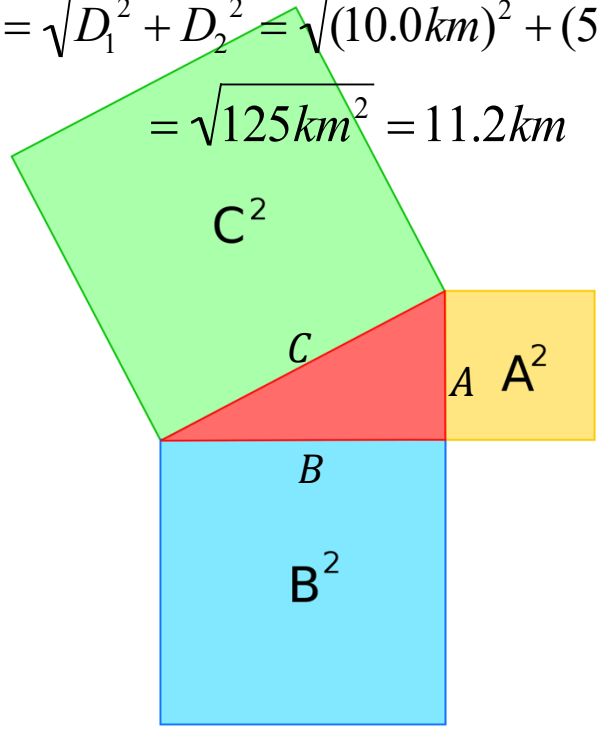
Le cose cambiano, invece, se si lavora in **sistemi di riferimento a due dimensioni** e se i due vettori da sommare (ad es. di modulo 10 Km e 5 Km) non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.



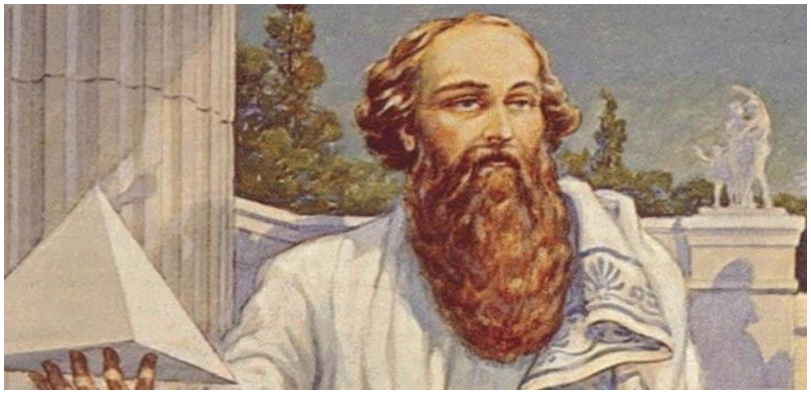
In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora:*

$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10.0km)^2 + (5.0km)^2} =$$

$$= \sqrt{125km^2} = 11.2km$$



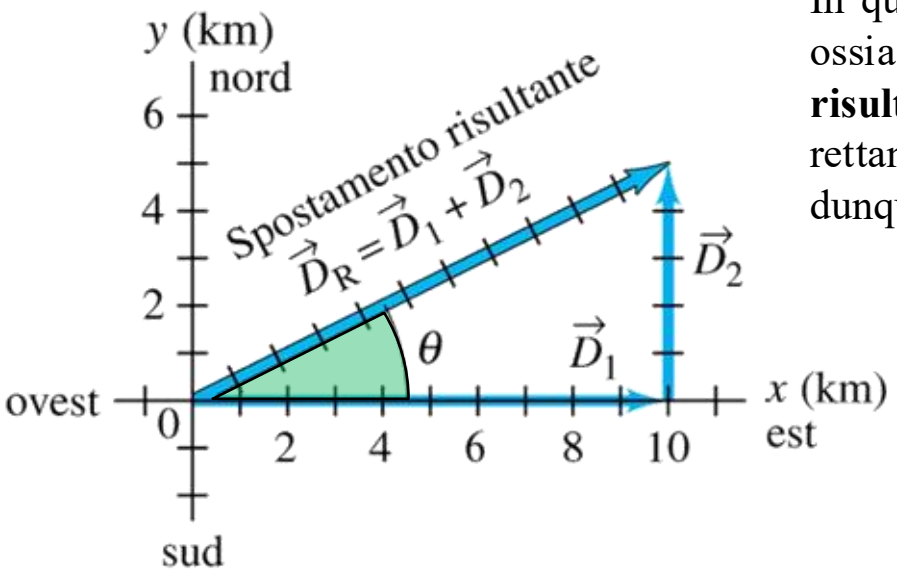
$C^2 = B^2 + A^2 \rightarrow C = \sqrt{B^2 + A^2}$



Pitagora (Samo, 580 a.C. circa - Metaponto, 495 a.C. circa)

Somma di vettori perpendicolari in 2 dimensioni

Consideriamo un **sistema di riferimento a due dimensioni** e due vettori da sommare (ad es. di modulo 10 Km e 5 Km) che non giacciono lungo la stessa retta, come in figura.



In questo caso i vettori da sommare sono **ortogonali**, ossia formano un angolo retto, e il **modulo del vettore risultante**, che rappresenta *l'ipotenusa* del triangolo rettangolo che ha per *cateti* i due vettori originali, può dunque essere calcolato con il *teorema di Pitagora:*

$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10.0km)^2 + (5.0km)^2} =$$

$$= \sqrt{125km^2} = 11.2km$$

Notiamo anche che il vettore risultante $\vec{D}_R$ forma un certo **angolo** θ con l'asse x positivo (vedremo dopo come ricavarlo).

Importante: osserviamo che il modulo del vettore risultante ottenuto con la somma vettoriale appena vista è **minore** della somma dei moduli dei due vettori sommati (pari a 15km): è questa la famosa "**disuguaglianza triangolare**" ($D_R < D_1 + D_2$).

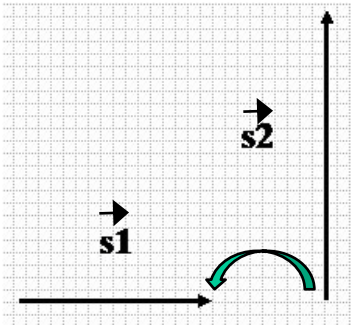
Osserviamo inoltre che, nell'esempio precedente, non sarebbe corretto scrivere: $\vec{D}_R = 11.2\ km$ perchè il numero 11.2 km si riferisce solo al modulo del vettore $\vec{D}_R$ (si sarebbe invece potuto scrivere, in alternativa, $|\vec{D}_R| = 11.2\ km$).

Somma grafica di vettori qualunque in 2 dimensioni

L'esempio appena visto suggerisce una regola generale per l'addizione grafica di due vettori, indipendentemente dall'angolo che formano. E' il cosiddetto **metodo coda-punta** per la somma vettoriale:

1) In un grafico si traccino in scala i due vettori da sommare, $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$, ponendo la coda del secondo sulla punta del primo (**importante**: è possibile **traslare** qualunque vettore sul piano, spostando il suo punto di applicazione, cioè la sua coda, ma **senza ruotarlo**, cioè senza cambiarne modulo, direzione e verso)

2 vettori:



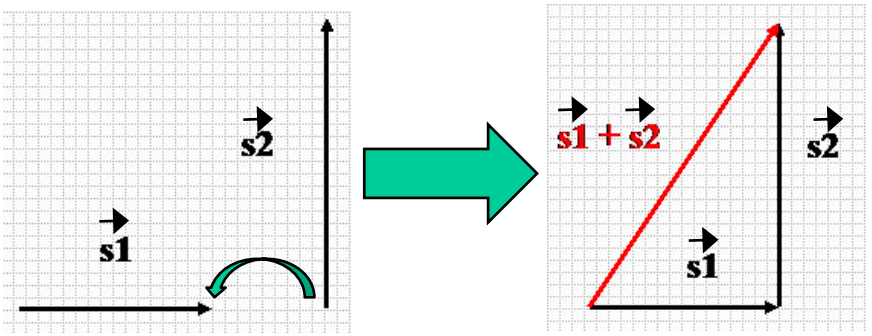
Somma grafica di vettori qualunque in 2 dimensioni

L'esempio appena visto suggerisce una regola generale per l'addizione grafica di due vettori, indipendentemente dall'angolo che formano. E' il cosiddetto **metodo coda-punta** per la somma vettoriale:

1) In un grafico si traccino in scala i due vettori da sommare, $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$, ponendo la coda del secondo sulla punta del primo (**importante**: è possibile **traslare** qualunque vettore sul piano, spostando il suo punto di applicazione, cioè la sua coda, ma **senza ruotarlo**, cioè senza cambiarne modulo, direzione e verso)

2) Il **vettore risultante** dalla somma vettoriale $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$ sarà un vettore (in rosso) che ha la **coda** sulla coda del primo e la **punta** sulla punta del secondo.;

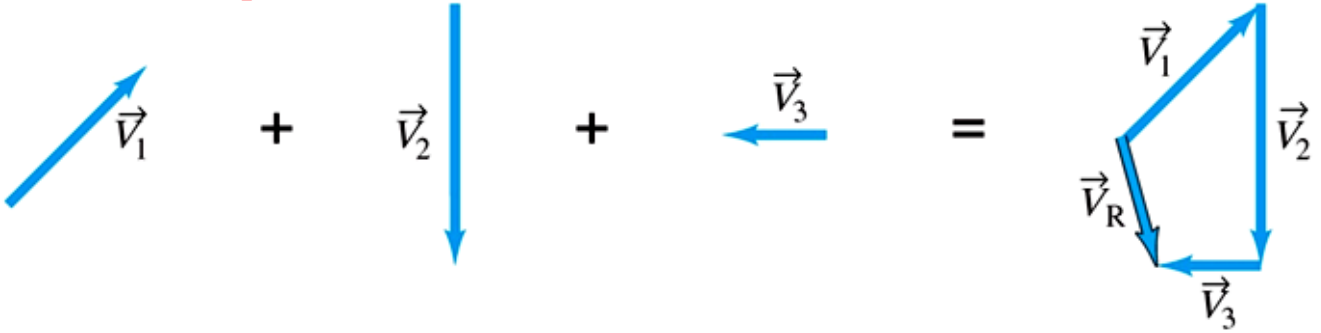
2 vettori:



Non è importante, quando si usa questo metodo, in che **ordine** vengono sommati i vettori, cioè in generale si ha: $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}_2 + \vec{S}_1$ (*proprietà commutativa della somma vettoriale*)

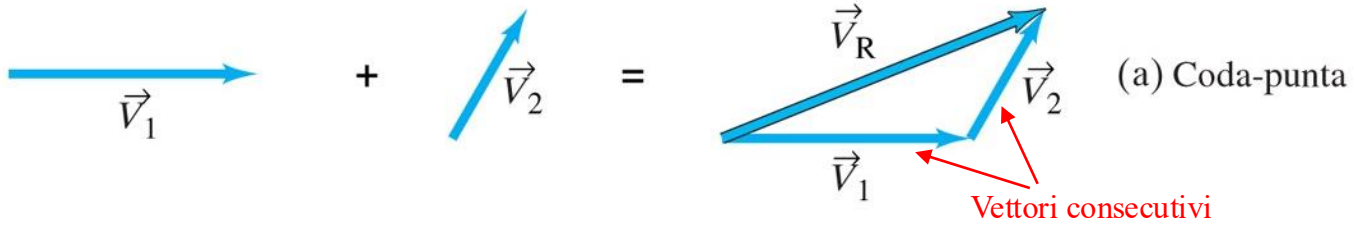
Il metodo coda-punta può essere facilmente **esteso** anche a tre o più vettori, ed è utile ad esempio quando si tratta di sommare spostamenti successivi:

3 o più vettori:



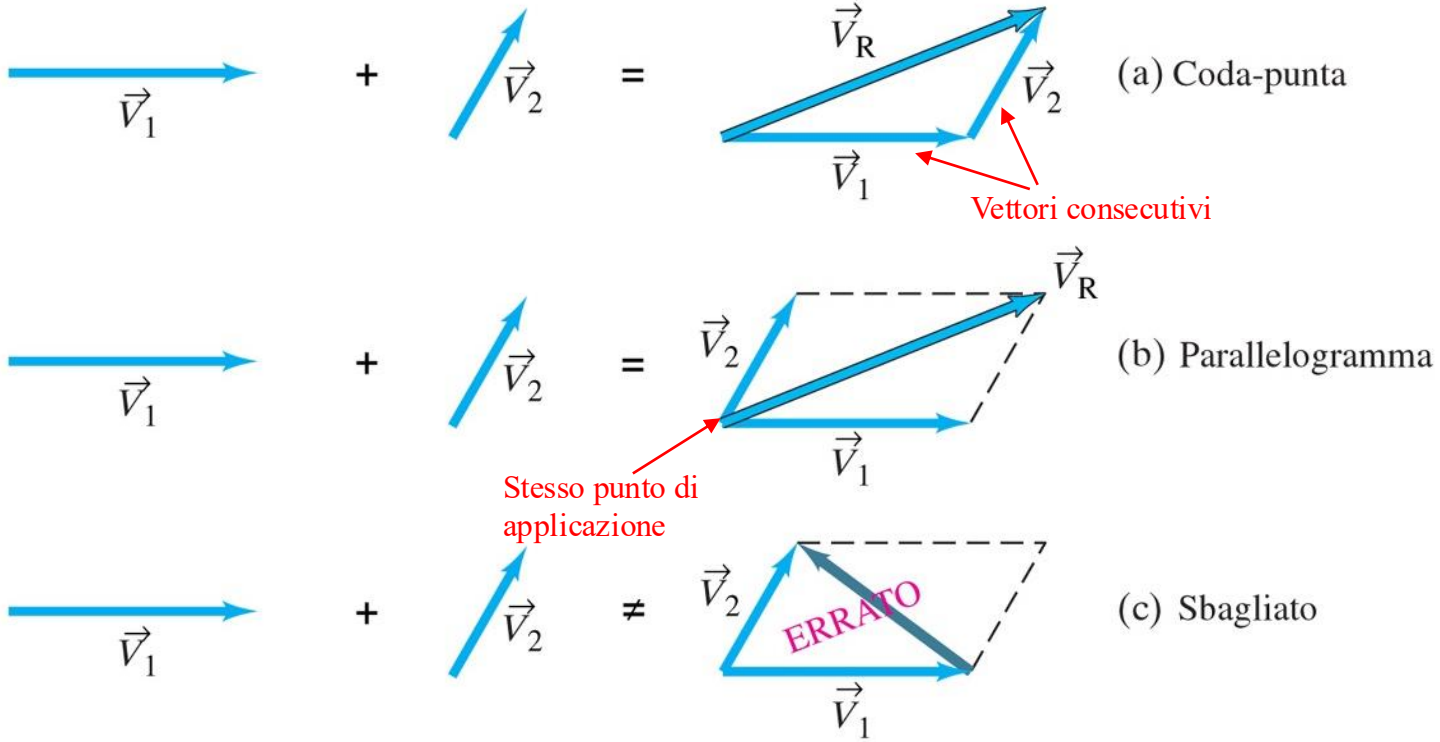
Somma grafica di vettori in 2 dimensioni

Quindi il **metodo coda-punta** è utile per sommare graficamente due o più vettori consecutivi, come quelli che indicano degli spostamenti (a).



Somma grafica di vettori in 2 dimensioni

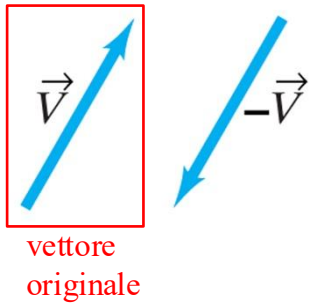
Quindi il **metodo coda-punta** è utile per sommare graficamente due o più vettori consecutivi, come quelli che indicano degli spostamenti (a).
Un metodo alternativo, ma equivalente, è il cosiddetto **metodo del parallelogramma** (b), **più conveniente quando si tratta di sommare vettori che non sono consecutivi ma hanno lo stesso punto di applicazione (ad es. nel caso di forze applicate ad uno stesso corpo, come vedremo più avanti).** In questo caso i due vettori vengono tracciati a partire da una stessa origine (ossia **facendo coincidere i loro punti di applicazione**), dopodiché si costruisce il parallelogramma che ha questi vettori come lati consecutivi: il vettore risultante sarà dato dalla **diagonale** del parallelogramma tracciata a partire dalla comune origine.



Altre operazioni con i vettori

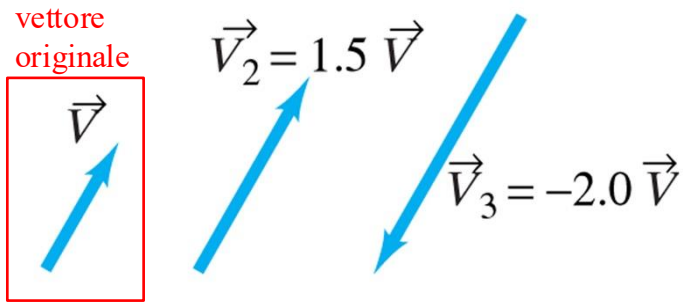
Vettore opposto

Il negativo (o opposto) di un vettore è un vettore che ha la stessa lunghezza (stesso modulo), la stessa direzione, ma verso opposto:



Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

La moltiplicazione di un vettore per uno scalare *b* dà un vettore il cui modulo è dato dal prodotto di *b* per il modulo del primo vettore, che ha la stessa direzione e che ha lo stesso verso se *b* è positivo, verso opposto se *b* è negativo:



Sottrazione di vettori

La differenza tra due vettori è definita come la somma del primo vettore con l'opposto del secondo:

