

Applicazioni: il modello HMF

L'**Hamiltonian Mean Field (HMF) model** è un modello XY a rotatori planari (di massa e modulo unitari, equivalenti a pendoli rigidi) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche: $\{\theta_i, p_i\}$

Sistema di N rotatori accoppiati



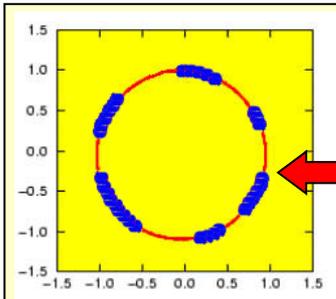
M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j)]$$



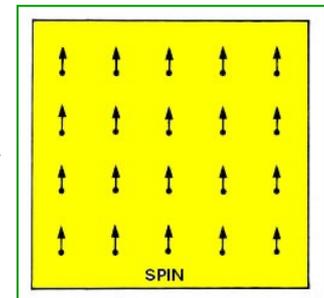
S. Ruffo

Antoni and Ruffo PRE 52 (1995) 2361



L'HMF può essere visto come un semplice reticolo di spin accoppiati...

...o come un sistema di particelle interagenti in moto (senza collisioni) su un cerchio unitario.



L'importanza di HMF sta nel fatto che si tratta di un toy-model il cui comportamento sembra essere **paradigmatico di una ampia classe di sistemi con interazioni a lungo range**, come per esempio sistemi nucleari o astrofisici (self-gravitating systems) e riveste un interesse particolare per lo studio della multiframmentazione e dei clusters atomici.

Applicazioni: il modello HMF

L'**Hamiltonian Mean Field (HMF) model** è un modello XY a rotatori planari (di massa e modulo unitari, equivalenti a pendoli rigidi) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche: $\{\theta_i, p_i\}$

Sistema di N rotatori accoppiati



M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



S. Ruffo

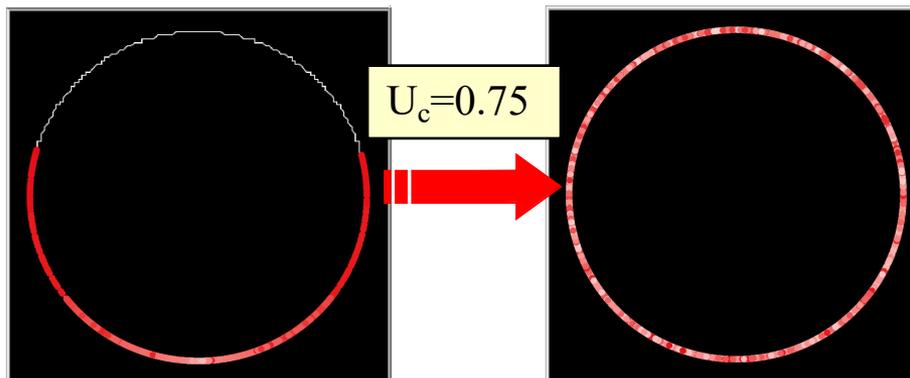
$$\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i) \Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \Rightarrow$$

$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}$$

Magnetizzazione

La soluzione in **Ensemble Canonico** del modello mostra una **transizione** da una fase **Condensata** (ferromagnetica con $M > 0$) ad una fase **Omogenea** (paramagnetica, con $M \sim 0$) in corrispondenza di un valore critico $U_c=0.75$ della **Densità di Energia** ($U=H/N$):

$0 < M < 1$
 $U < U_c$
Fase Condensata



$M \sim 0$
 $U > U_c$
Fase Omogenea

Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (di massa e modulo unitari, equivalenti a pendoli rigidi) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche: $\{\theta_i, p_i\}$

Sistema di N rotatori accoppiati

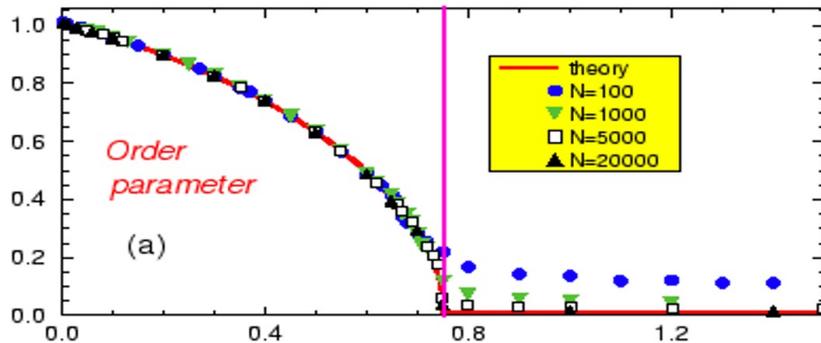


M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



S. Ruffo



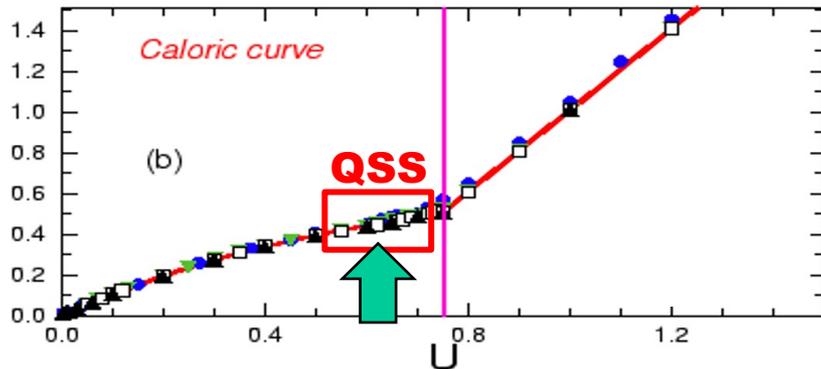
$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}$$

Magnetizzazione

Curva Calorica (in ensemble canonico)

$$U = \frac{T}{2} + \frac{1}{2} (1 - M^2)$$

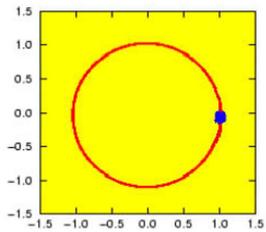
$$T = \frac{2\langle K \rangle}{N}$$



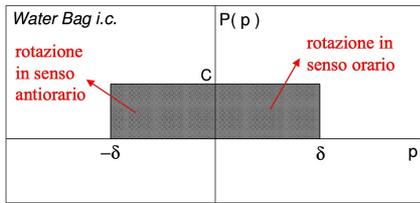
Eq. del moto (in ensemble micro canonico)

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = p_i \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} = -M_x \sin \theta_i + M_y \cos \theta_i \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta}_i = M \sin(\Phi - \theta_i)$$

Stati metastabili (QSS)

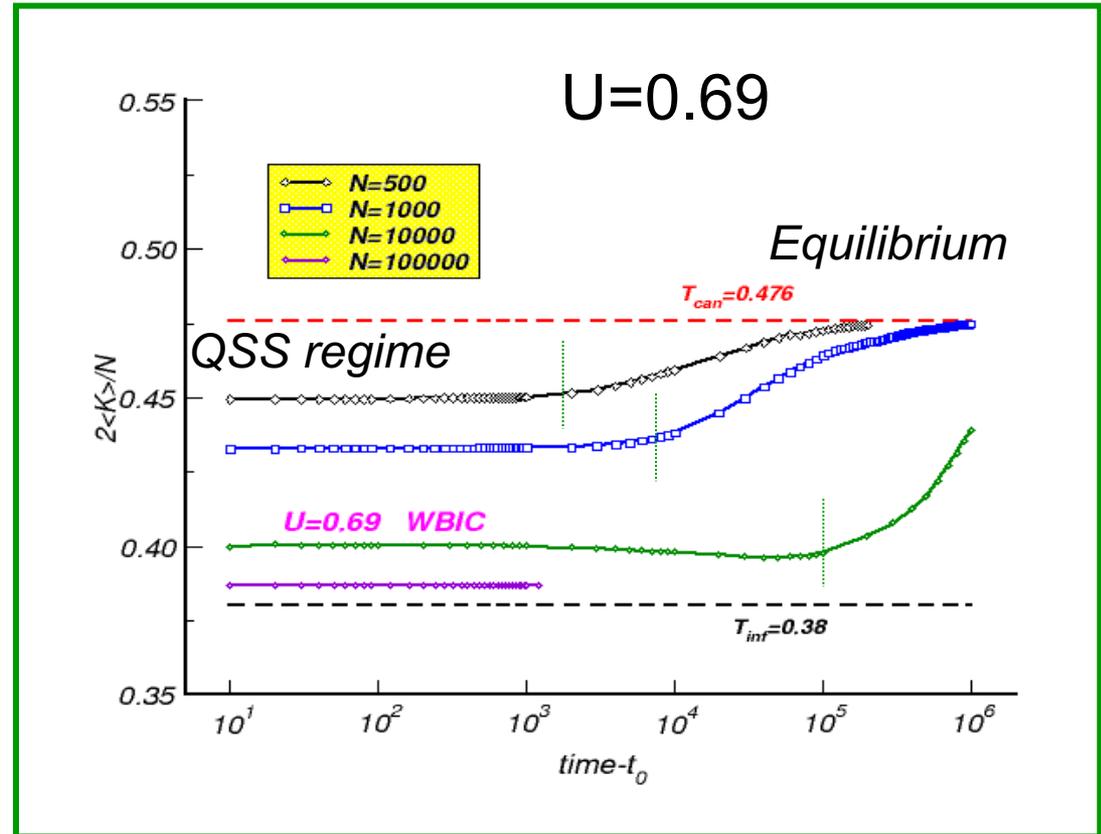
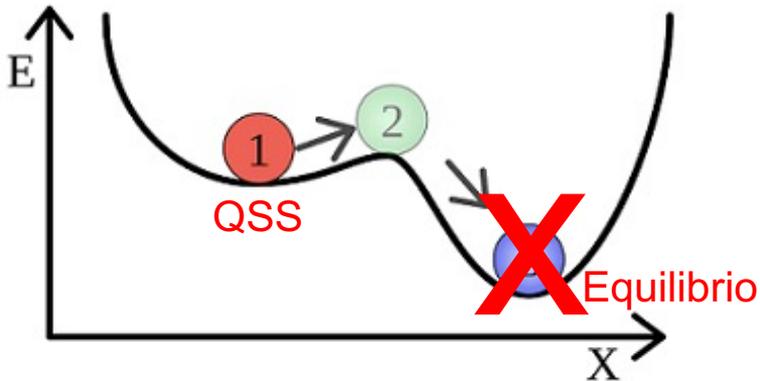


Tutti gli angoli = 0



Distribuzione uniforme delle velocità

Partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio ($M=1$), il sistema rimane intrappolato per un tempo molto lungo in **STATI QUASI-STAZIONARI (QSS) METASTABILI** dove la temperatura, è minore di quella prevista all'equilibrio ($T_{eq}=0.476$).

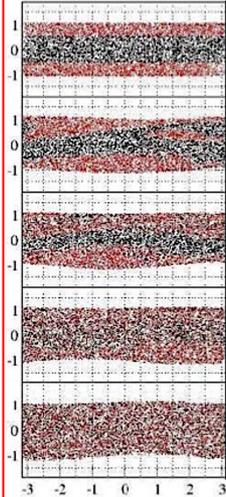


Quando $N \rightarrow \infty$, la temperatura dei QSS tende al valore limite $T_{QSS} = 0.38$ e il sistema non raggiunge MAI il regime di equilibrio!

Stati metastabili (QSS)

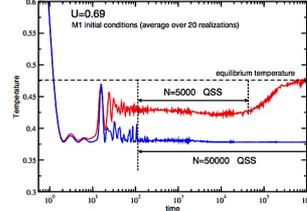
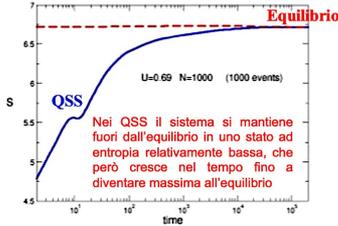
Entropia e correlazioni nel μ -space

Equilibrio (ergodicity)

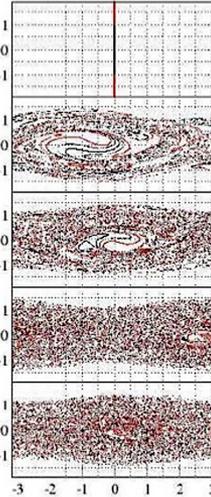


$$S(t) = - \sum_{k=1}^n f_k(t) \ln(f_k(t))$$

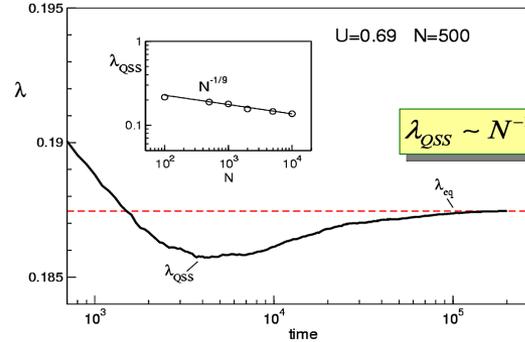
Fig. 5 - A. Fluchino, V. Latora and A. Rapisarda



QSS (NO ergodicity)



L'esponente max. di Lyapunov tende a zero nei QSS



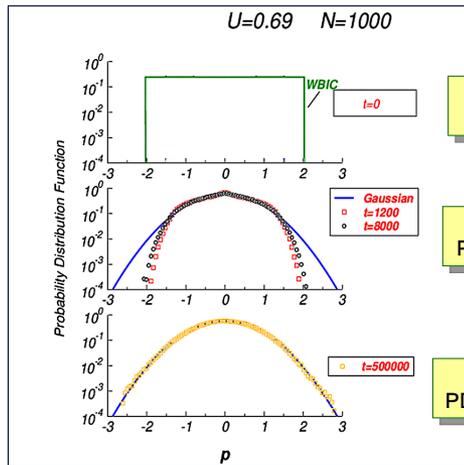
Nel regime QSS l'esponente massimale di Lyapunov tende a zero quando la size N del sistema tende all'infinito, rivelando così una situazione di "WEAK MIXING".

Questo scaling può essere ottenuto dalla relazione...

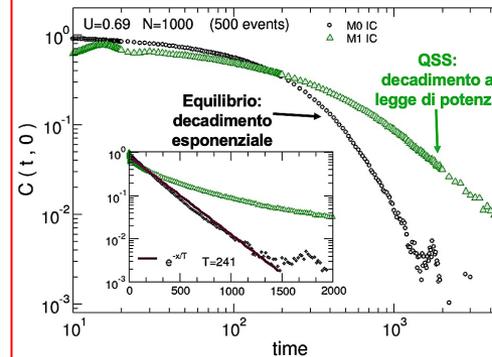
$$\lambda \propto M^{2/3} \propto (N^{-1/3})^{1/3} = N^{-1/9}$$

See Latora, Rapisarda, Tsallis Physica A 305 (2002) 129

Distribuzione di probabilità delle velocità non Gaussiana nei QSS



Correlazioni delle velocità



Funzione di auto-correlazione delle velocità

$$C(t,0) = \frac{\langle P(t)P(0) \rangle - \langle P(t) \rangle \langle P(0) \rangle}{\sigma(t)\sigma(0)}$$

dove:

$$P(t) = (p_1, p_2, \dots, p_N)$$

è il vettore velocità, le parentesi angolari indicano una media sugli eventi, e $\sigma(t)$ è la deviazione standard al tempo t.

La Legge di Potenza

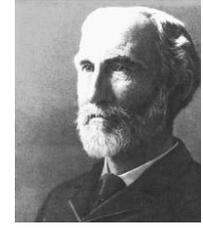
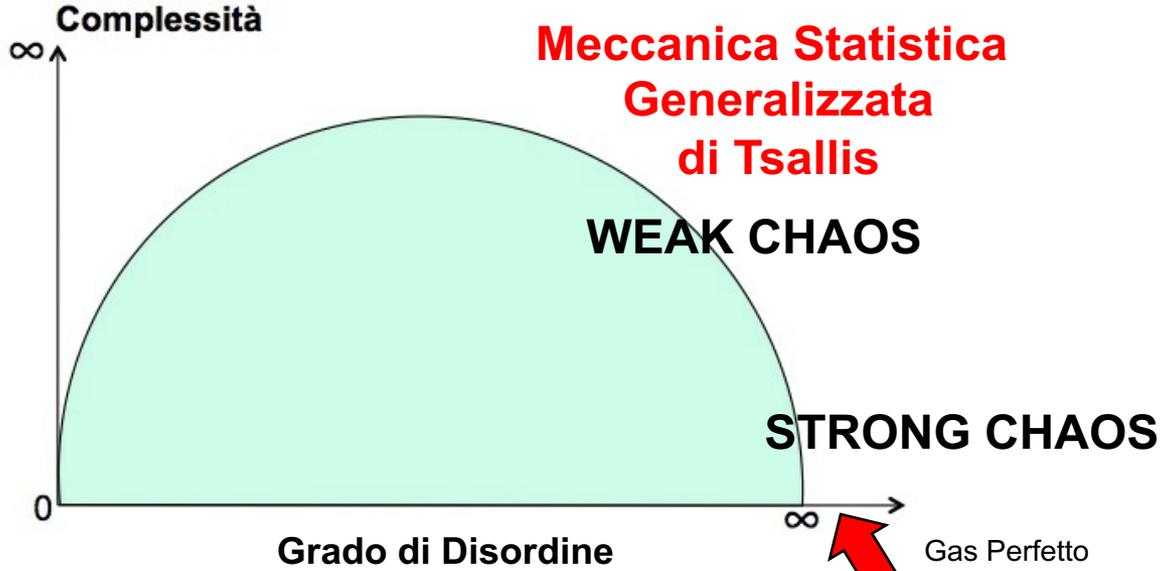
Tutti gli indizi conducono verso verso una Meccanica Statistica generalizzata....



**Meccanica Statistica
Generalizzata
di Tsallis**

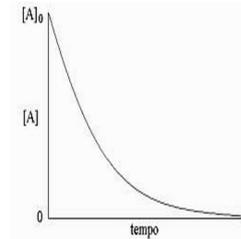
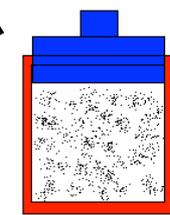
WEAK CHAOS

STRONG CHAOS

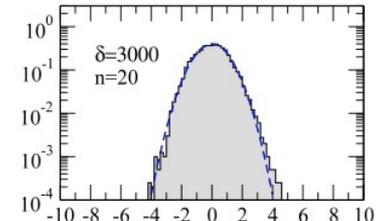


**Meccanica Statistica di
Boltzmann-Gibbs**

Gas Perfetto



ESPONENZIALE



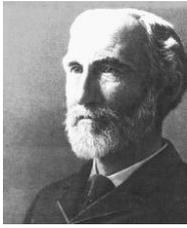
GAUSSIANA

Meccanica Statistica di Tsallis

Nell'ultima decade molti sforzi sono stati compiuti per capire se e fino a che punto la Meccanica Statistica di Boltzmann Gibbs (BG) possa essere **generalizzata** ed estesa ai sistemi lontani dall'equilibrio, nei casi in cui le ipotesi di **strong chaos ed ergodicità** siano violate e la **dinamica** del sistema giochi un ruolo fondamentale...

In particolare, uno di questi tentativi è stato compiuto da **Constantino Tsallis** a partire dalla fine degli anni '80 con la sua **MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA o NON-ESTENSIVA**

J. Stat. Phys. 52 (1988) 479



Entropia di Boltzmann-Gibbs

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i)$$

con $\sum_i p_i = 1$.

dove W indica il numero di microstati. Nel caso in cui valga il principio di equiprobabilità a priori $p_i = \frac{1}{W}$, allora si ritrova l'entropia microcanonica: $S = k \ln(W)$

Quella di BG è l'unica forma entropica a soddisfare gli «assiomi di Khinchin»

Si supponga di avere una funzione entropica $S(\{p_i\})$ tale che:

- 1) $S(\{p_i\})$ sia una funzione continua di $\{p_i\}$;
- 2) $S(p_i = \frac{1}{W}, \forall i)$ sia monotonicamente crescente rispetto al numero totale di possibilità W ;
- 3) $S(p_1, p_2, \dots, p_w, 0) = S(p_1, p_2, \dots, p_w)$;
- 4) $S(A + B) = S(A) + S(B|A)$, con $S(B|A) \equiv \sum_{i=1}^{W_A} p_i^A S(\{p_{ij}^{A+B} / p_i^A\})$.

A e B indipendenti: S è ADDITIVA

$$S(A + B) = S(A) + S(B)$$

Meccanica Statistica di Tsallis

Nell'ultima decade molti sforzi sono stati compiuti per capire se e fino a che punto la Meccanica Statistica di Boltzmann Gibbs (BG) possa essere **generalizzata** ed estesa ai sistemi lontani dall'equilibrio, nei casi in cui le ipotesi di **strong chaos ed ergodicità** siano violate e la **dinamica** del sistema giochi un ruolo fondamentale...

In particolare, uno di questi tentativi è stato compiuto da **Constantino Tsallis** a partire dalla fine degli anni '80 con la sua **MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA o NON-ESTENSIVA**

J. Stat. Phys. 52 (1988) 479



Entropia di Tsallis

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad \xrightarrow{p_i = \frac{1}{W}} \quad S_q = k \ln_q W \quad (S_1 = S_{BG})$$

con $\sum_i p_i = 1$,

dove
 $y = \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \equiv \ln_q x \quad (x > 0; \ln_1 x = \ln x)$
 è il q-logaritmo

Quella di Tsallis è l'unica forma entropica a soddisfare gli «assiomi di Abe»

Si supponga di avere una funzione entropica $S(\{p_i\})$ tale che:

- 1) $S(\{p_i\})$ sia una funzione continua di $\{p_i\}$;
- 2) $S(p_i = \frac{1}{W}, \forall i)$ sia monotonicamente crescente rispetto al numero totale di possibilità W ;
- 3) $S(p_1, p_2, \dots, p_w, 0) = S(p_1, p_2, \dots, p_w)$;
- 4) $\frac{S(A+B)}{k} = \frac{S(A)}{k} + \frac{S(B|A)}{k} + (1 - q) \frac{S(A)}{k} \frac{S(B|A)}{k}$

A e B indipendenti: S_q è NON ADDITIVA (per $q \neq 1$)

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}$$

La Meccanica Statistica è q-invariante!

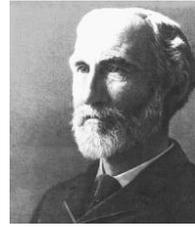
Nell'ultima decade molti sforzi sono stati compiuti per capire se e fino a che punto la Meccanica Statistica di Boltzmann Gibbs (BG) possa essere **generalizzata** ed estesa ai sistemi lontani dall'equilibrio, nei casi in cui le ipotesi di **strong chaos ed ergodicità** siano violate e la **dinamica** del sistema giochi un ruolo fondamentale...

In particolare, uno di questi tentativi è stato compiuto da **Constantino Tsallis** a partire dalla fine degli anni '80 con la sua **MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA o NON-ESTENSIVA**

J. Stat. Phys. 52 (1988) 479



L'entropia di Tsallis si riduce all'entropia di Boltzmann-Gibbs quando l'indice entropico **q** tende al valore **1**



La quantità $|q - 1|$ misura dunque le correlazioni presenti nel sistema!

L'entropia di BG è sempre **additiva** ed è **estensiva per sistemi all'equilibrio** privi di correlazioni (**strong mixing**, $q=1$)

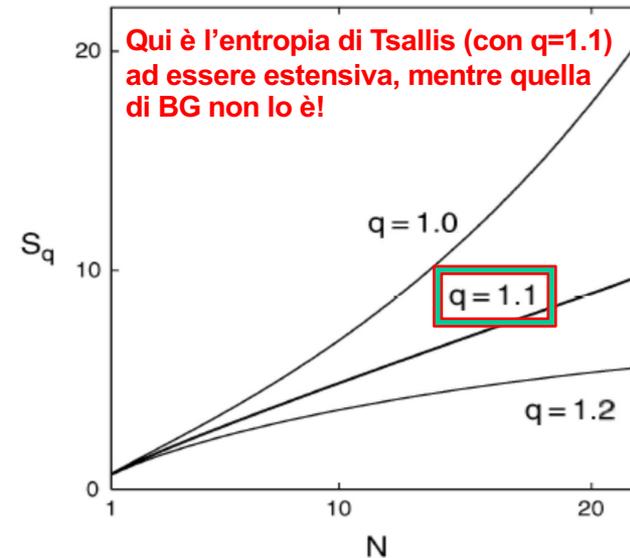
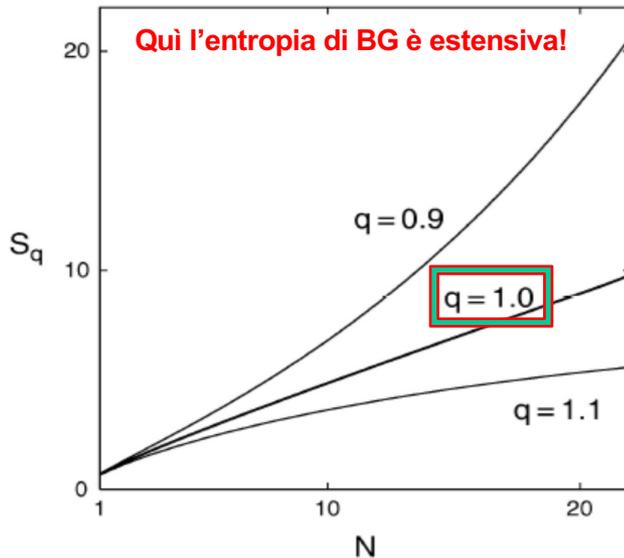
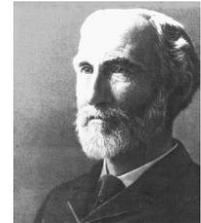
$$S(A + B) = S(A) + S(B)$$

L'entropia di Tsallis è sempre **non additiva** ed è **estensiva per sistemi fuori equilibrio** con correlazioni (**weak mixing**, $q>1$)

$$\frac{S_q(A + B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}$$

Test di Estensività: è il sistema a «scegliere»

QUINDI E' IL SISTEMA A «DECIDERE» QUAL'E' L'ENTROPIA PIU' CORRETTA DA UTILIZZARE PER DESCRIVERLO: SARA' QUELLA CHE SODDISFA L'ESTENSIVITA', OSSIA QUELLA CHE SCALA LINEARMENTE CON N NEL LIMITE TERMODINAMICO (TEST DELL'ESTENSIVITA').



La massimizzazione della S_q permette di ottenere una generalizzazione del peso di Boltzmann che si può esprimere attraverso una funzione q -esponenziale, che per $q > 1$ è una legge di potenza:

$$e_q\left(-\frac{E}{kT}\right) = \left[1 - (1-q)\frac{E}{kT}\right]^{\frac{1}{1-q}} \rightarrow e^{-\frac{E}{kT}} \text{ per } q \rightarrow 1$$

La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

TYPICAL SIMPLE SYSTEMS:

$$W(N) \propto \mu^N \quad (\mu > 1)$$

Short-range space-time correlations

Markovian processes (short memory), Additive noise

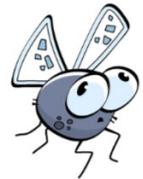
Strong chaos (positive maximal Lyapunov exponent), **Ergodic**, Riemannian geometry

Short-range many-body interactions, weakly quantum-entangled subsystems

Linear and homogeneous Fokker-Planck equations, Gaussians

→ Boltzmann-Gibbs entropy (additive)

→ Exponential dependences (Boltzmann-Gibbs weight, ...)



TYPICAL COMPLEX SYSTEMS:

$$\text{e.g., } W(N) \propto N^\rho \quad (\rho > 0)$$

Long-range space-time correlations

Non-Markovian processes (long memory), Additive and multiplicative noises

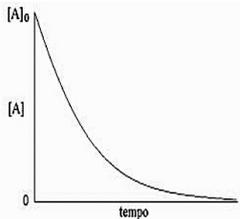
Weak chaos (zero maximal Lyapunov exponent), **Nonergodic**, Multifractal geometry

Long-range many-body interactions, strongly quantum-entangled subsystems

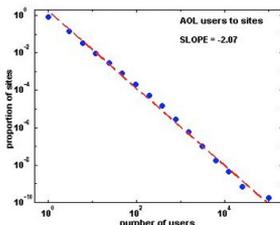
Nonlinear and/or inhomogeneous Fokker-Planck equations, q -Gaussian

→ Entropy S_q (nonadditive)

→ q -exponential dependences (asymptotic power-laws)

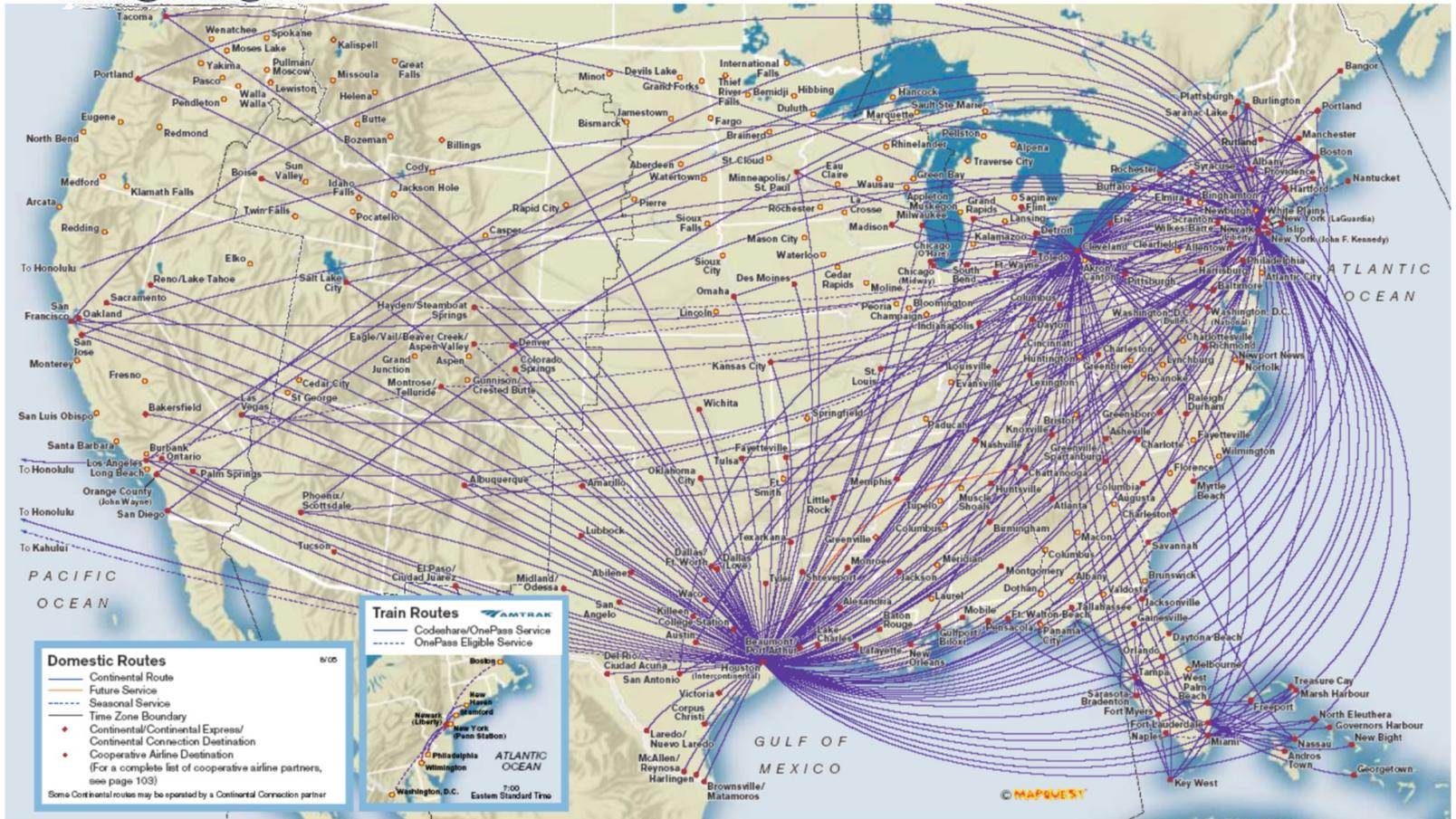


ESPONENZIALE



LEGGE DI POTENZA

La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi





La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

CONTRIBUTORS

(6347 MANUSCRIPTS)

USA	2237	AUSTRIA	93	SLOVENIA	19	URUGUAY	5
ITALY	1035	AUSTRALIA	89	SAUDI ARABIA	17	VIETNAM	5
GERMANY	965	PORTUGAL	89	IRELAND	14	BOLIVIA	4
BRAZIL	885	ROMANIA	81	VENEZUELA	14	INDONESIA	4
UNITED KINGDOM	781	NORWAY	75	LITHUANIA	12	SENEGAL	4
CHINA	697	SWEDEN	69	CYPRUS	11	BELARUS	3
FRANCE	685	TAIWAN	63	MOROCCO	11	MACEDONIA	3
SWITZERLAND	643	UKRAINE	57	ARMENIA	10	MOLDOVA	2
RUSSIA	539	EGYPT	48	BELARUS	10	NORTH CYPRUS	2
JAPAN	488	PAKISTAN	47	PUERTO RICO	10	PANAMA	2
INDIA	402	SLOVAKIA	45	SINGAPORE	10	PHILIPINES	2
SPAIN	360	DENMARK	43	NEW ZEALAND	9	UN. ARAB EMIRATES	2
POLAND	208	SERBIA	37	FRENCH GUIANA	8	BAHRAIN	1
GREECE	190	FINLAND	35	GEORGIA	8	BENIN	1
CANADA	179	SOUTH AFRICA	33	KHAZHAKSTAN	8	ECUADOR	1
NETHERLANDS	149	BELGIUM	32	AZERBAIJAN	7	ETHIOPIA	1
CZECH REPUBLIC	141	COLOMBIA	32	ESTONIA	7	IRAQ	1
IRAN	136	BANGLADESH	31	JORDAN	7	LUXENBOURG	1
ARGENTINA	132	CHILE	31	ALBANIA	6	OMAN	1
TURKEY	128	ALGERIA	26	CAMEROON	6	QATAR	1
SOUTH KOREA	113	CROATIA	25	ICELAND	5	SRI LANKA	1
ISRAEL	112	BULGARIA	20	NIGERIA	5	TUNISIA	1
MEXICO	110	CUBA	19	PERU	5	UZBEKISTAN	1
HUNGARY	94	MALAYSIA	19	THAILAND	5	YEMEN	1

12820 SCIENTISTS 96 COUNTRIES

[Updated 7 October 2017]



La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

BOOKS AND SPECIAL ISSUES ON NONEXTENSIVE STATISTICAL MECHANICS



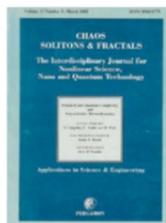
1999



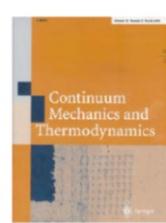
2001



2002



2002



2004



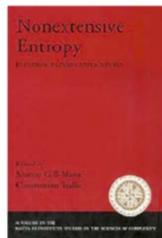
2004



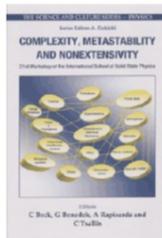
2004



2004



2004



2005



2005



2006



2006



2007



2009



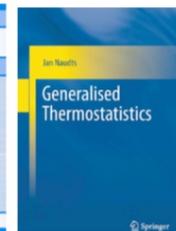
2009



2009



2010



2011



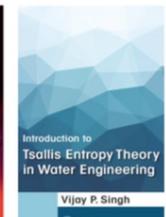
2011



2012



2013



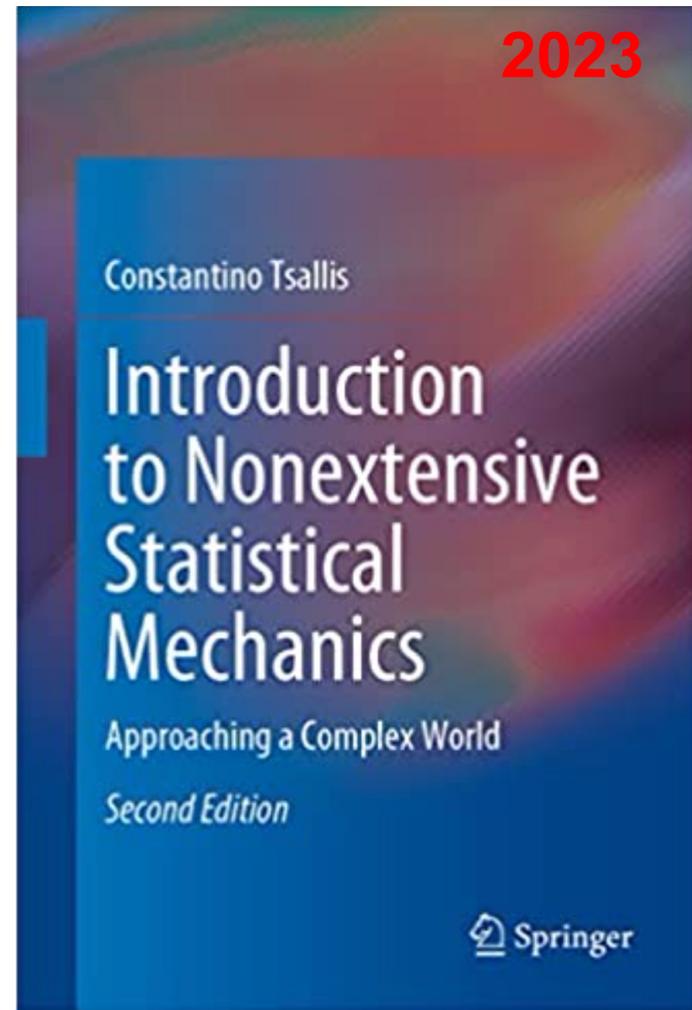
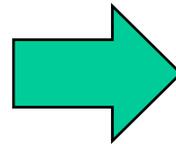
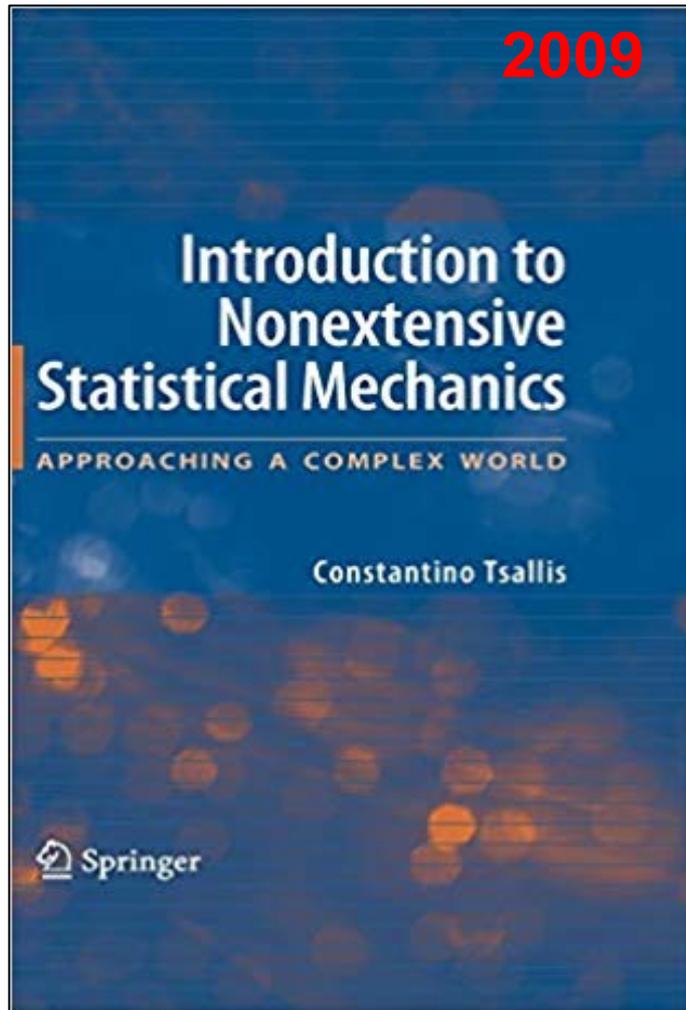
2016

Generalized Entropies:
C.T., E.M.F. Curado and F.D. Nobre, Cambridge Univ. Press, in preparation

~2017



La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi





La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi





La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi



Anomalie nei sistemi con interazioni a lungo raggio

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 13, NUMBER 2

15 JANUARY 1976

Black holes and thermodynamics*

S. W. Hawking †

California Institute of Technology, Pasadena, California 91125

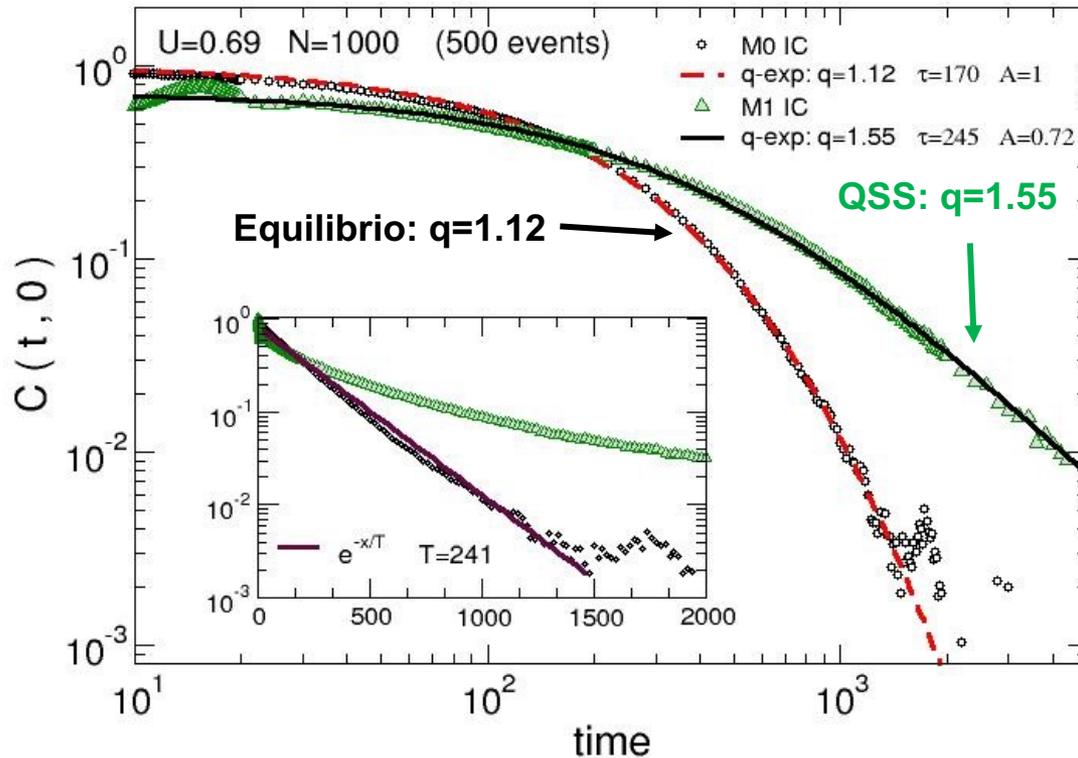
and Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England

(Received 30 June 1975)

A black hole of given mass, angular momentum, and charge can have a large number of different unobservable internal configurations which reflect the possible different initial configurations of the matter which collapsed to produce the hole. The logarithm of this number can be regarded as the entropy of the black hole and is a measure of the amount of information about the initial state which was lost in the formation of the black hole. If one makes the hypothesis that the entropy is finite, one can deduce that the black holes must emit thermal radiation at some nonzero temperature. Conversely, the recently derived quantum-mechanical result that black holes do emit thermal radiation at temperature $\kappa h/2\pi kc$, where κ is the surface gravity, enables one to prove that the entropy is finite and is equal to $c^3 A/4Gh$, where A is the surface area of the event horizon or boundary of the black hole. Because black holes have negative specific heat, they cannot be in stable thermal equilibrium except when the additional energy available is less than $1/4$ the mass of the black hole. This means that the standard statistical-mechanical canonical ensemble cannot be applied when gravitational interactions are important. Black holes behave in a completely random and time-symmetric way and are indistinguishable, for an external observer, from white holes. The irreversibility that appears in the classical limit is merely a statistical effect.



Decadimento q-exp delle correlazioni nel modello HMF



Pluchino, Latora, Rapisarda, Physica D 193 (2004) 315;

Ad esempio il decadimento della funzione di correlazione delle velocità nel modello HMF sembra essere ben riprodotto per mezzo di funzioni di tipo q-esponenziale:

$$Ae_q(x) = A[1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}$$

con $x = -t/\tau$.

Tsallis

Nel regime QSS troviamo $q = 1.55$, valore che indica uno scaling a **legge di potenza** (power law).

Boltzmann-Gibbs

D'altra parte, all'equilibrio il decadimento è quasi esponenziale e infatti il fit dà un q prossimo ad 1.

Violazione del Teorema Centrale del Limite

Il **Teorema Centrale del Limite** (CLT) afferma che la distribuzione delle somme di n variabili stocastiche indipendenti, per n tendente a infinito, tende ad una distribuzione normale (**gaussiana**, simmetrica con code esponenziali). Tsallis, con Umarov e Steinberg è riuscito a generalizzare il CLT a sistemi che presentino un certo tipo di **correlazioni** e ha dimostrato che in questo caso l'attrattore della distribuzione delle somme di n variabili q -correlate è una **distribuzione q -gaussiana**, che è una generalizzazione della gaussiana, sempre simmetrica ma (per $q > 1$) con code «larghe», a legge di potenza (*fat tails*).

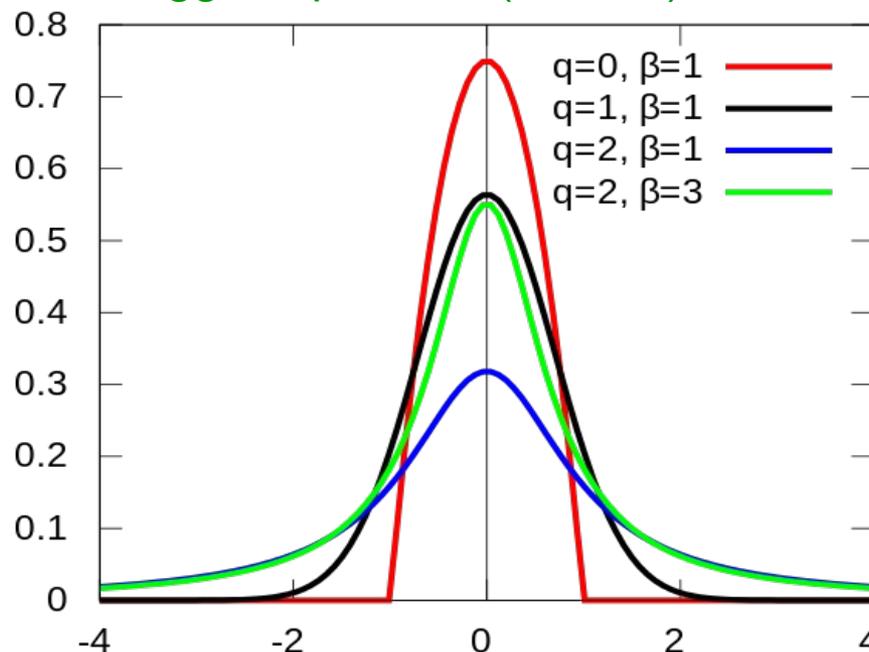
$$\bar{X}_n := X_1 + \dots + X_n$$

q-gaussiana

$$f(\bar{X}) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q(-\beta \bar{X}^2)$$

q-esponenziale

$$e_q(x) = [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}$$



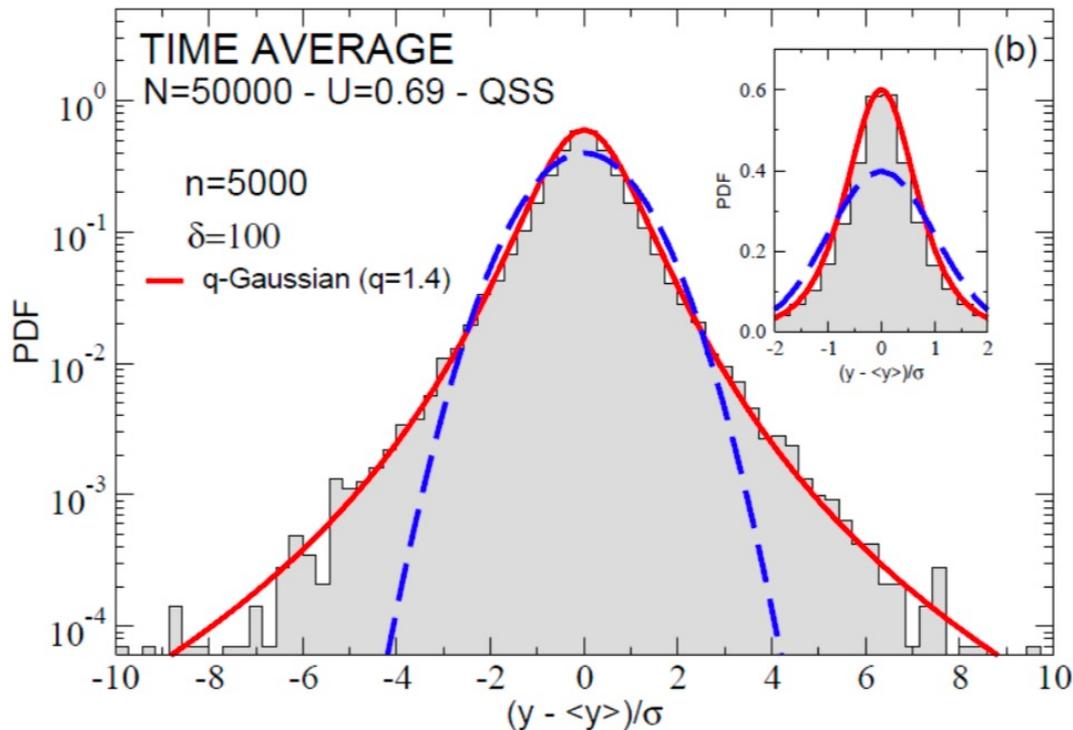
Per $q=1$
ovviamente si
ritrova la
distribuzione
gaussiana

Violazione del Teorema Centrale del Limite nel modello HMF

Se nel **modello HMF** costruiamo delle variabili y definite come somma delle velocità:

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (p_j(i) - \langle p_j \rangle) \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, N$$

si osservano delle **violazioni del CLT negli stati QSS**, dove si osservano delle distribuzioni $P(y)$ q-gaussiane, con code a legge di potenza:



La dipendenza dal range di interazione: il Modello α -XY

Il modello α -XY generalizza il modello HMF poiché adesso, data una coppia di rotatori planari i e j , tra di essi agisce una forza d'interazione che dipende dall'inverso di una certa potenza α della loro distanza reciproca in un reticolo d -dimensionale:

Anteneodo C. and Tsallis C. (1998) Phys. Rev. Lett. 80 5313

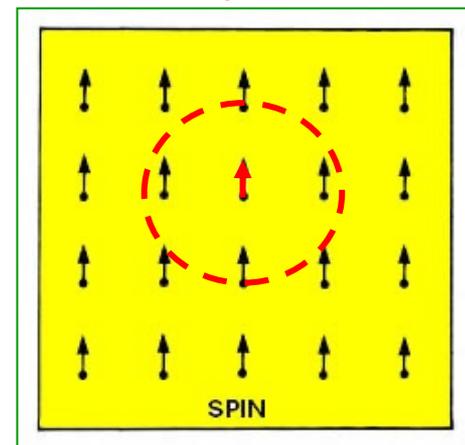
$$H_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2\tilde{N}} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{1 - \cos(\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j)}{r_{ij}^\alpha}$$

α fissa il range dell'interazione ($\alpha = 0 \rightarrow$ HMF)

- se $\alpha > d$, l'interazione è a corto raggio poiché il range di interazione assume un valore finito e ciò significa che ogni rotatore interagisce solo con pochi vicini dentro un intorno di raggio S (un cerchio in un reticolo 2D).

- se $0 \leq \alpha \leq d$, l'interazione è a lungo raggio e in particolare, per $\alpha = 0$, il range di interazione tende a divergere, e si ritrovano le condizioni del modello HMF.

Esempio: $d=2$



QSS nel Modello α -XY per $d=1$

Stati quasi-stazionari (QSS) per $U=0.69$ si osservano anche nel modello α -XY:

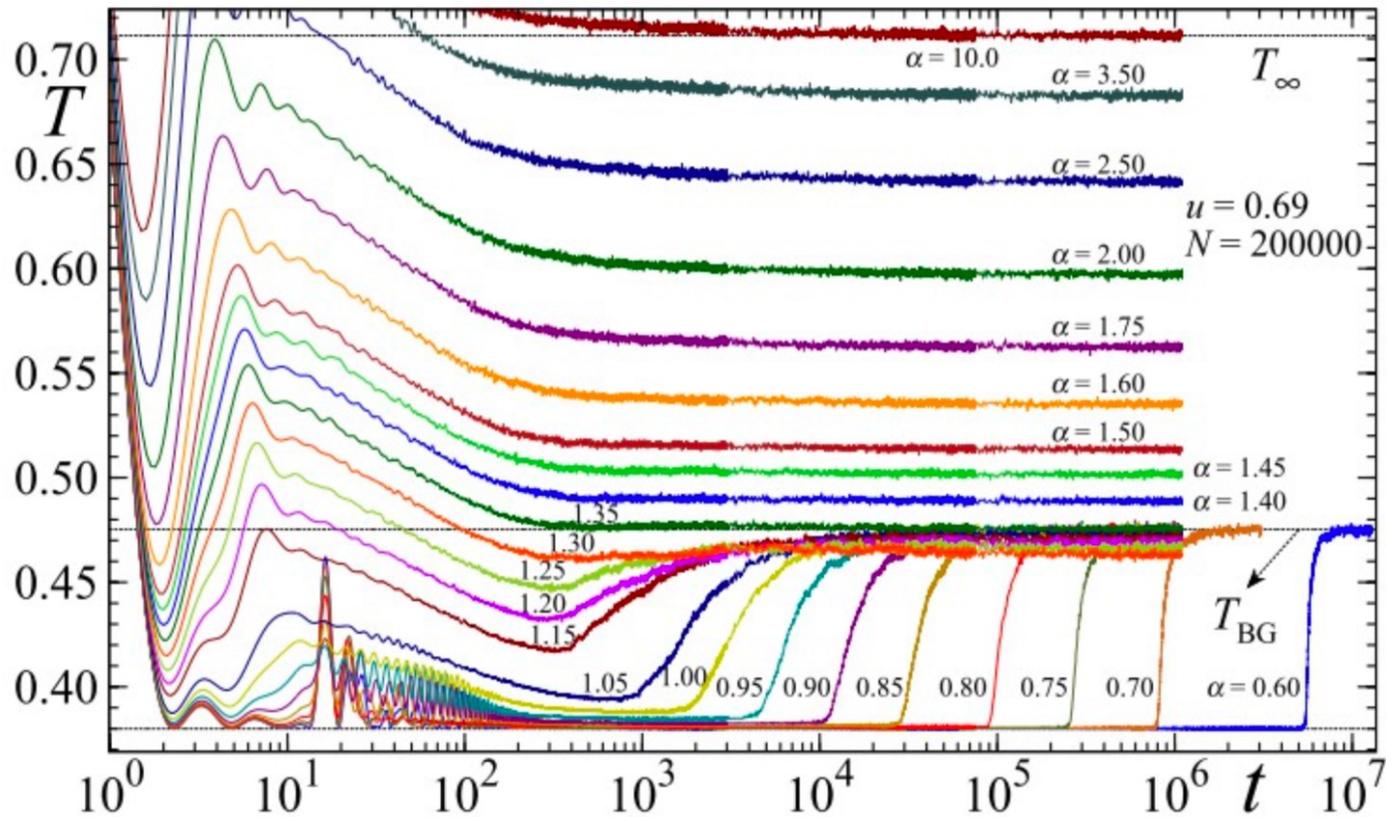
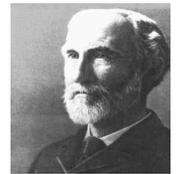
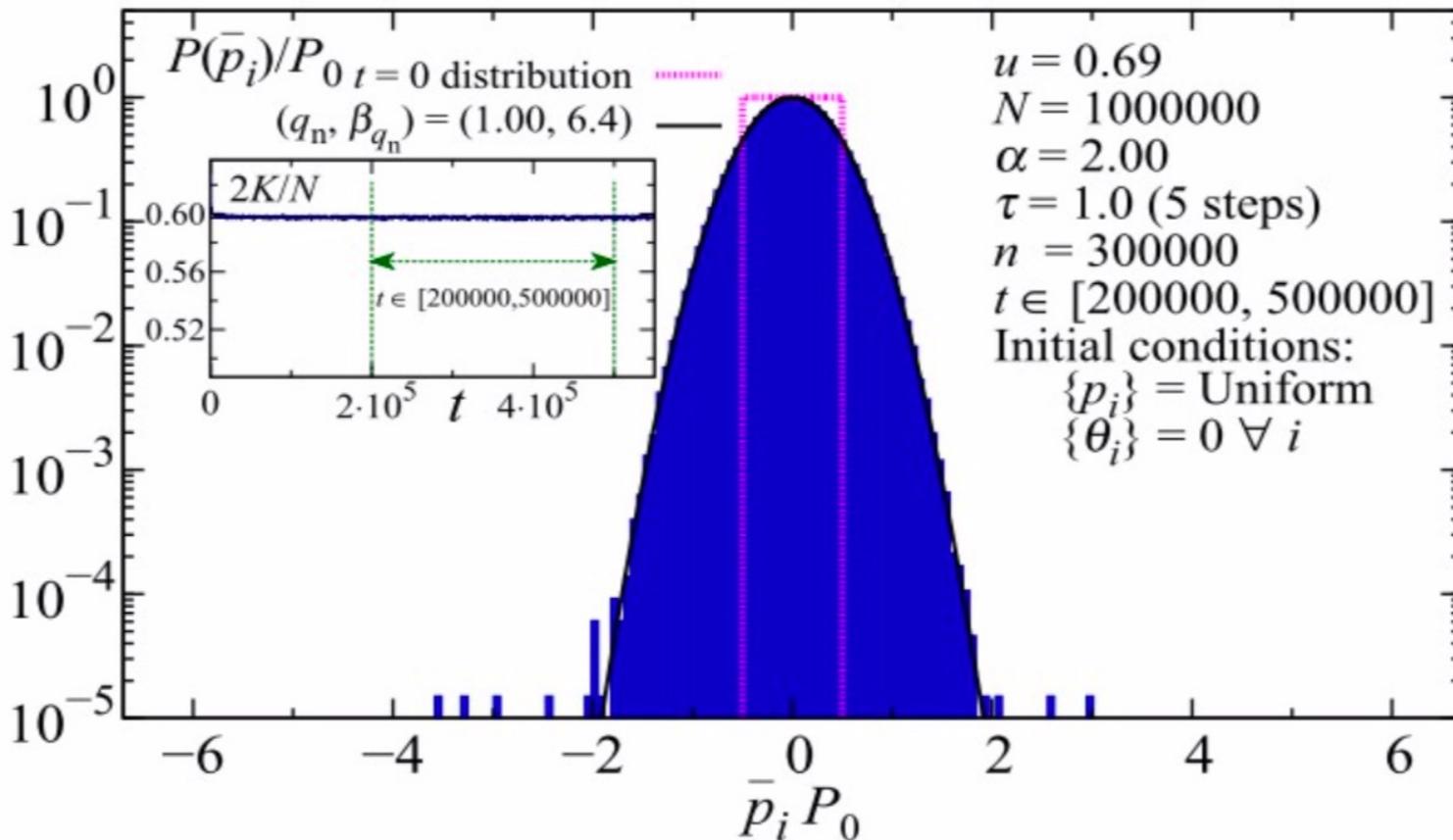


Figura 3.1.1: Dipendenza della temperatura dal tempo, $T(t)=2K(t)/N$ con valori fissati di $(u, N) = (0.69, 2000000)$, al variare del range di interazione α .

Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY ($d=1$)

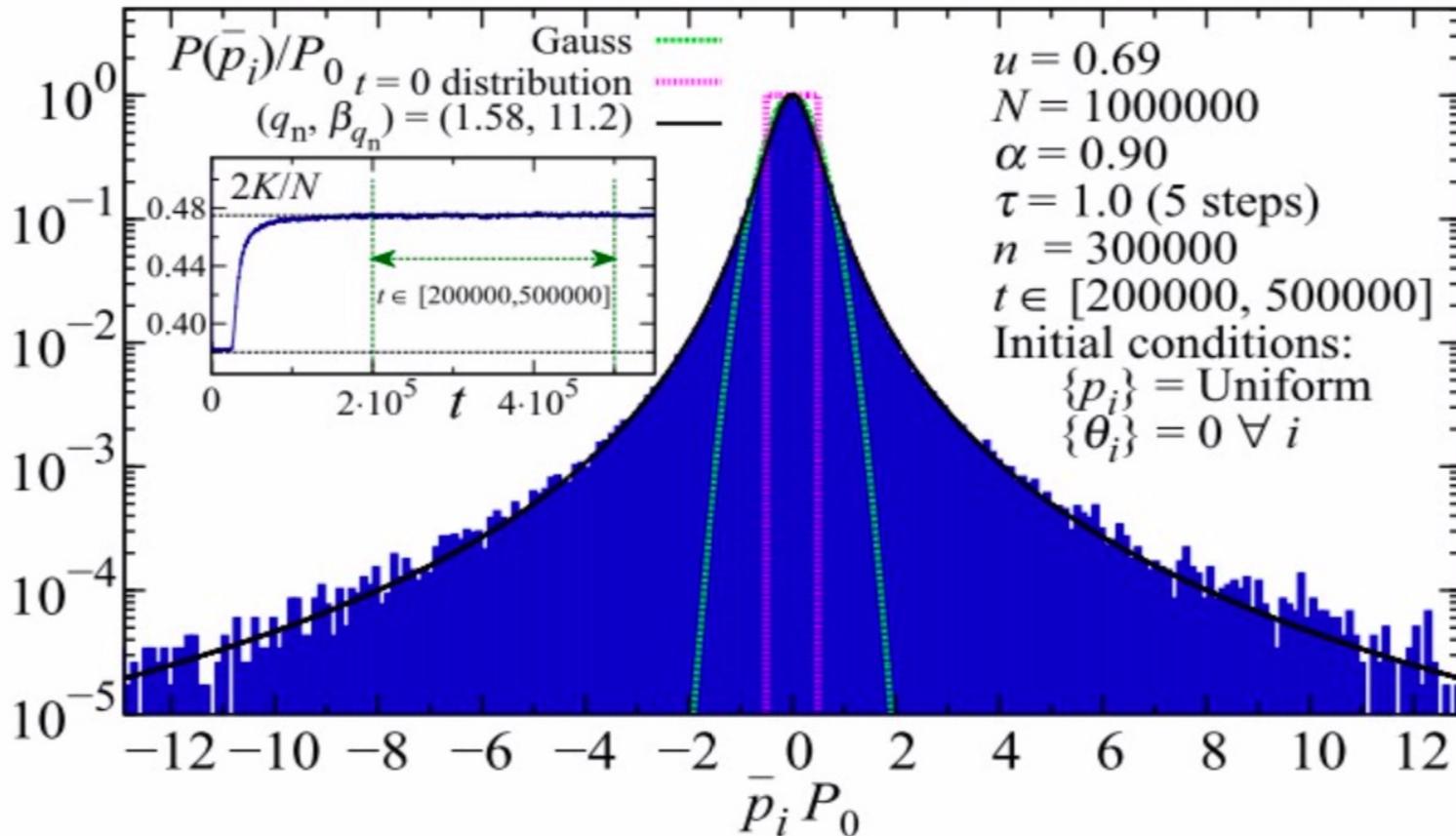
Se $d=1$, per $\alpha > 1$, ossia quando l'interazione è a corto raggio, la distribuzione delle velocità all'equilibrio è quella **gaussiana** di Boltzmann-Gibbs:



$\alpha = 2$
yields
 $q = 1$

Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY ($d=1$)

Per $\alpha < 1$, ossia quando l'interazione è a lungo raggio, il sistema resta lontano dall'equilibrio e, a parità di tutti gli altri parametri, la distribuzione delle velocità è q -gaussiana:



$\alpha = 0.9$
 yields
 $q = 1.58$

Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY ($d=1$)

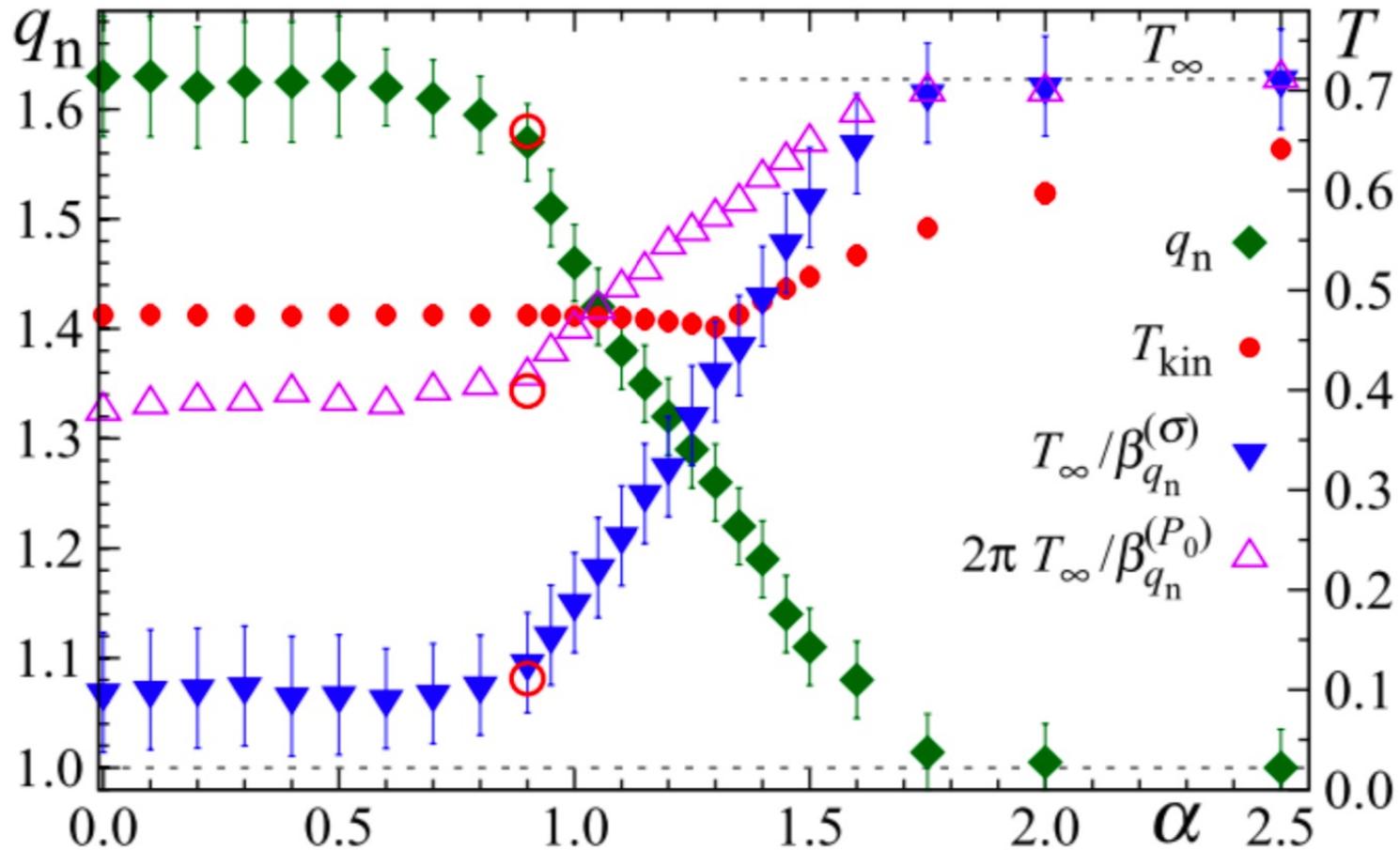
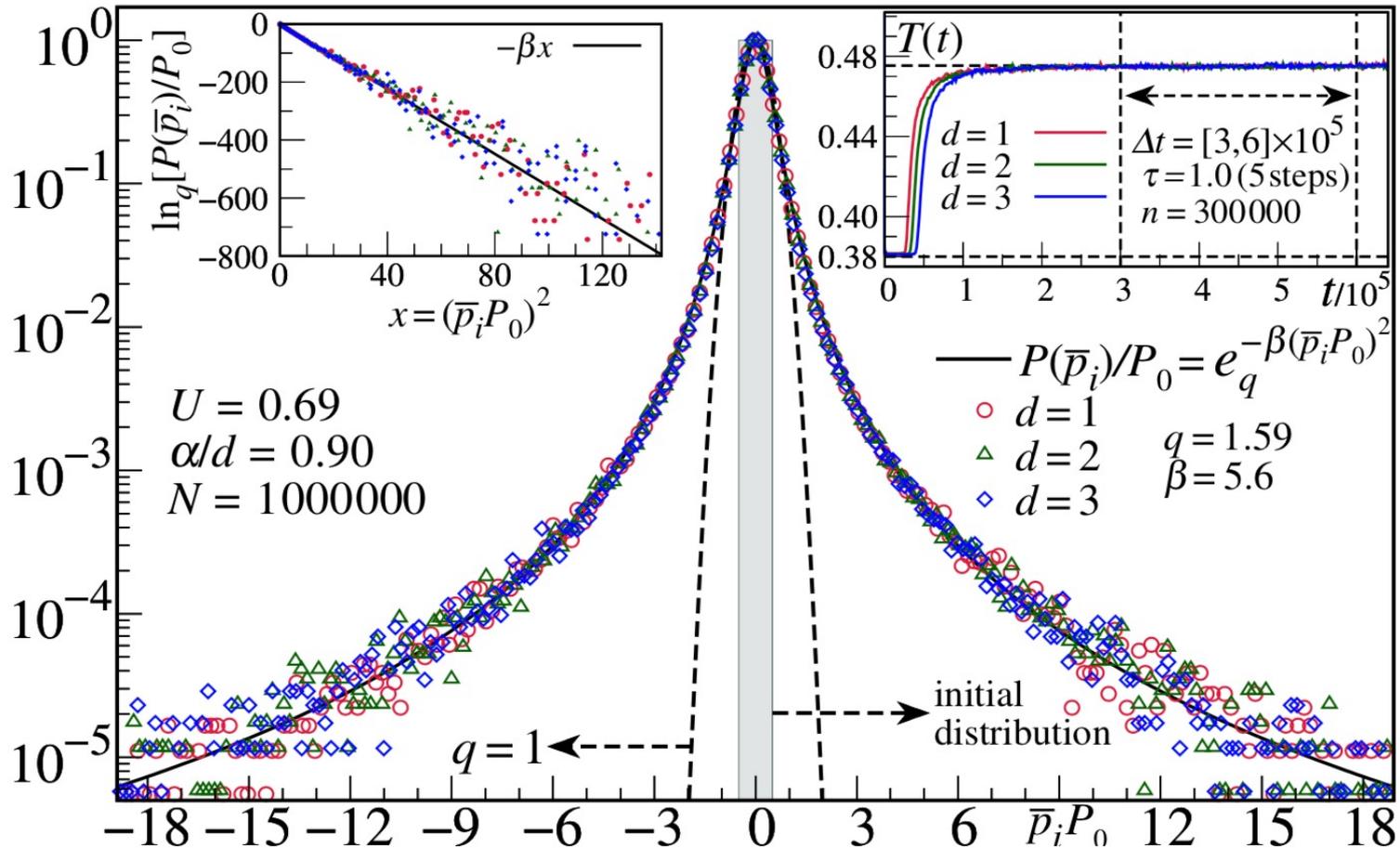


Figura 3.1.3: indice entropico q al variare del range di interazione α .

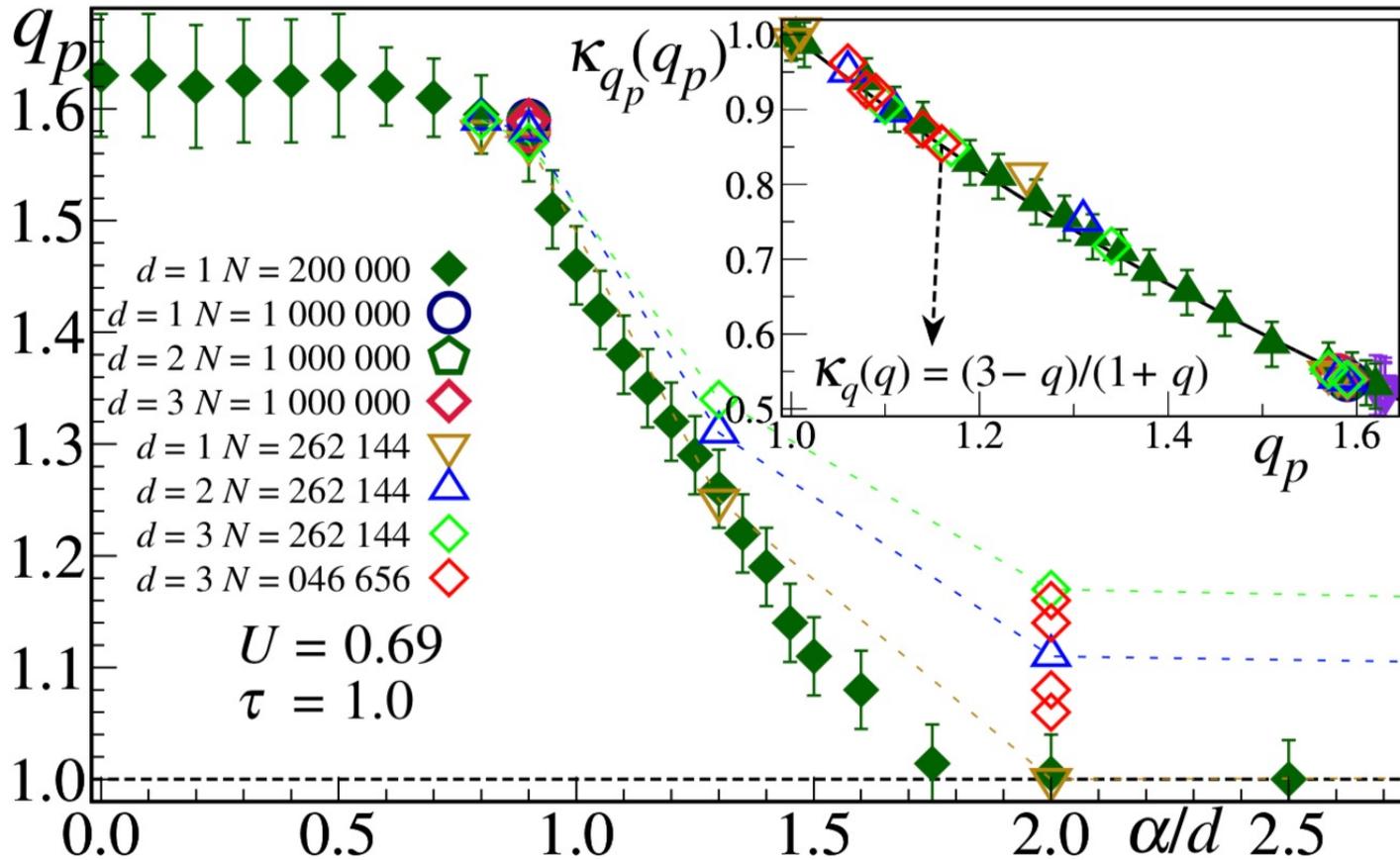
Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY (d dimensioni)

d-DIMENSIONAL XY MODEL



CLT e sua violazione nel Modello α -XY in d dimensioni

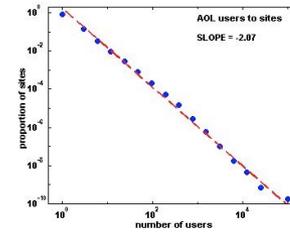
d -DIMENSIONAL XY MODEL



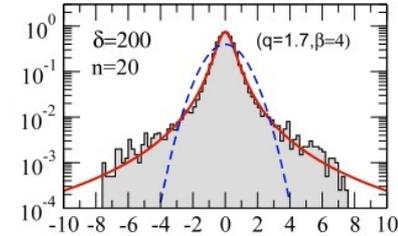
q-Statistica di Tsallis all'Edge of Chaos



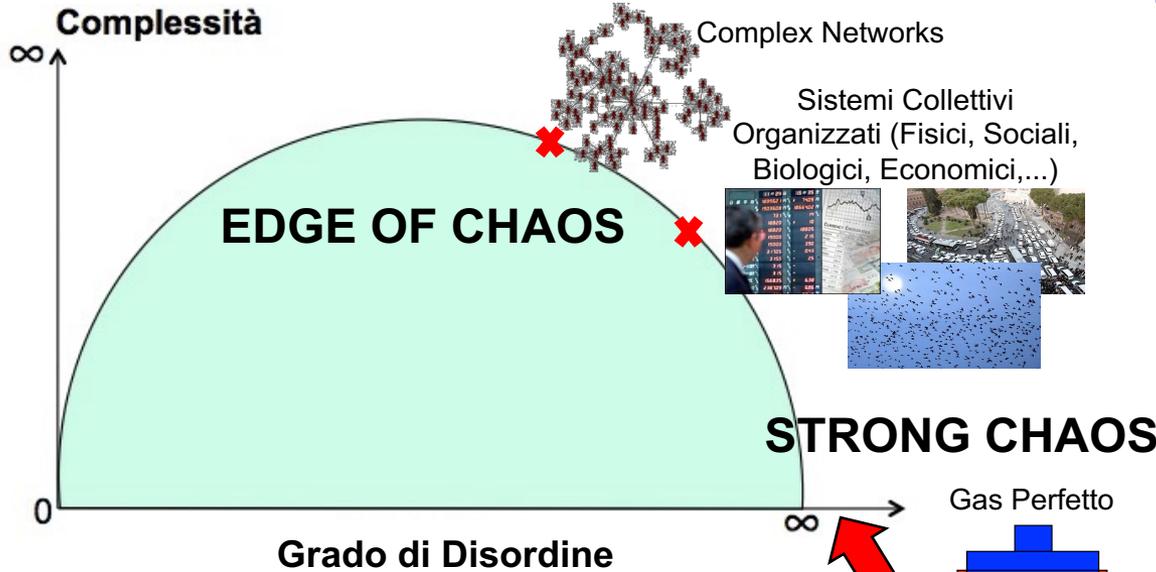
Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis



LEGGE DI POTENZA

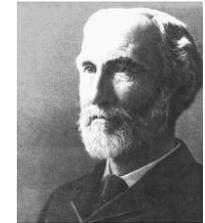


q-GAUSSIANA

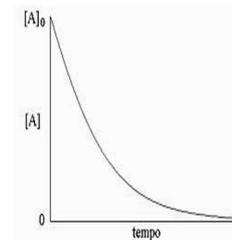


Complex Networks

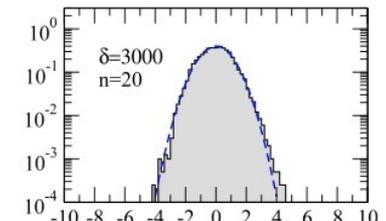
Sistemi Collettivi Organizzati (Fisici, Sociali, Biologici, Economici,...)



Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs



ESPONENZIALE



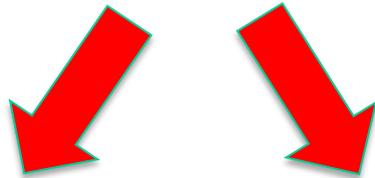
GAUSSIANA

Universo come gas perfetto di Galassie

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$



Flussi Dissipativi

Flussi Hamiltoniani

Attrattori

Orbite

1D

Punto
fisso

2D

Ciclo
Limite

3D

Caotici

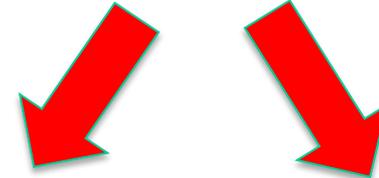
Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



Mappe Dissipative

**Mappe Conservative
(area-preserving)**

Attrattori

Orbite

Punto
fisso

Ciclo
Limite

Caotici

Periodiche

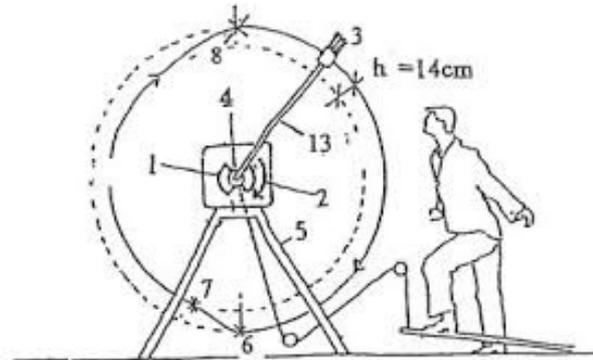
Quasi
Periodiche

Caotiche

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$



Kicked Rotator

Particle confinement in magnetic traps,
particle dynamics in accelerators,
comet dynamics,
ionization of Rydberg atoms,
electron magneto-transport

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

STANDARD MAP (Chirikov 1969)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i \pmod{2\pi}$$

$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1} \pmod{2\pi}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$



Mappe Conservative
(area-preserving)

Orbite

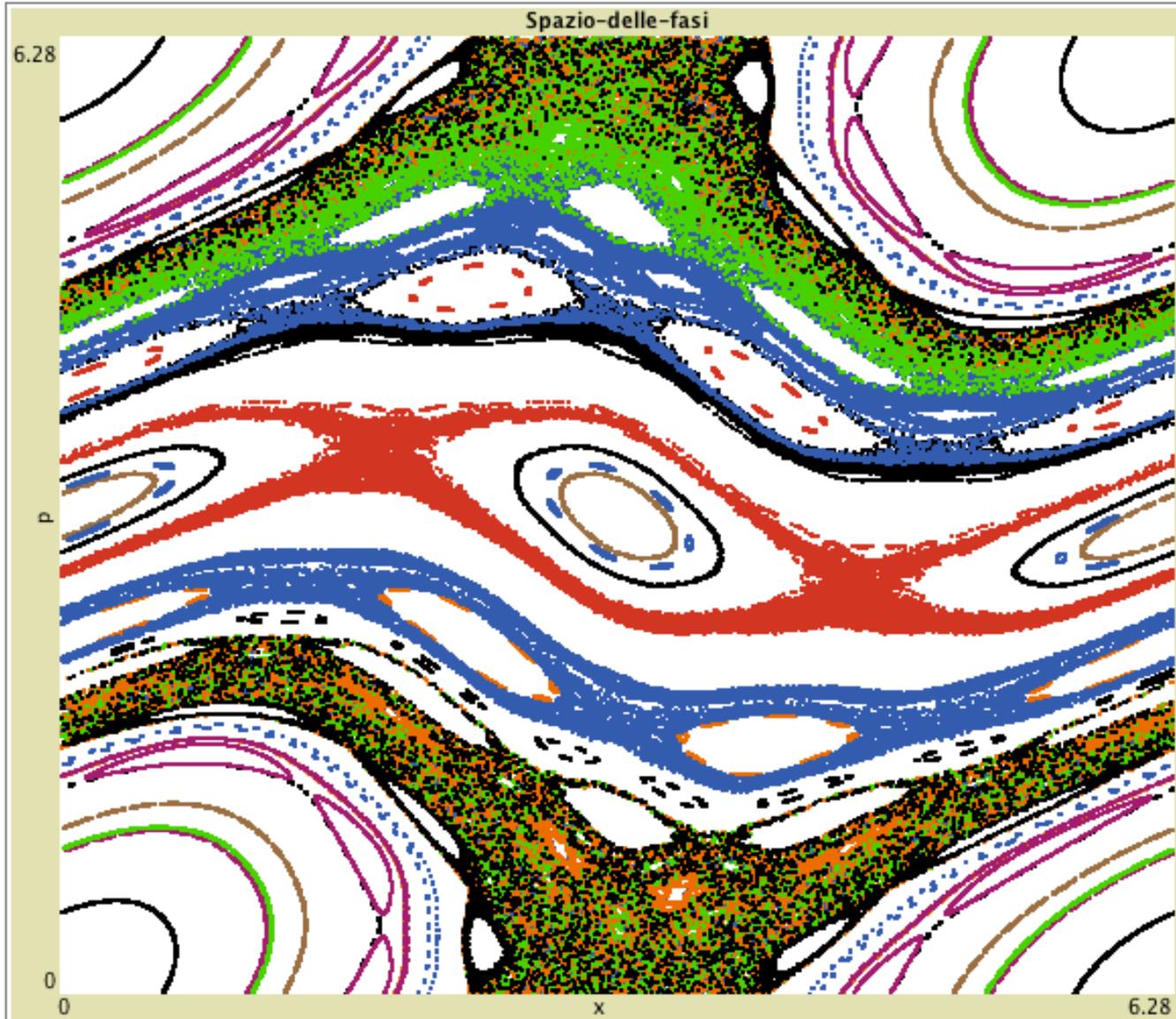
Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

Statistica di Tsallis e Mappe Conservative

MAPPA STANDARD



SETUP

GO

SETUP-NEW-IC

K

0.93

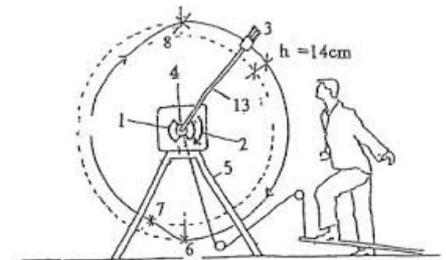
iteration

27877

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

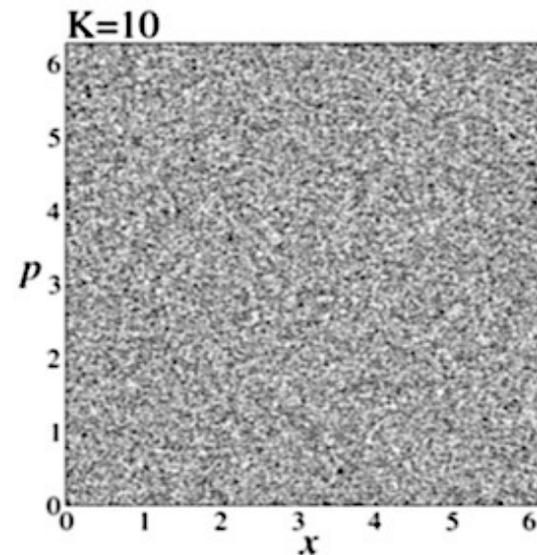
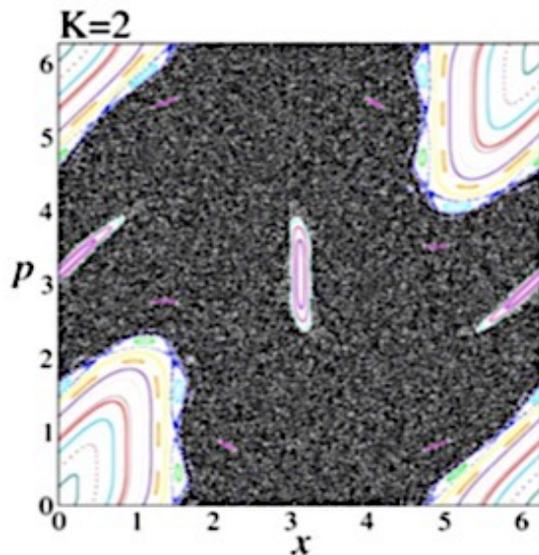
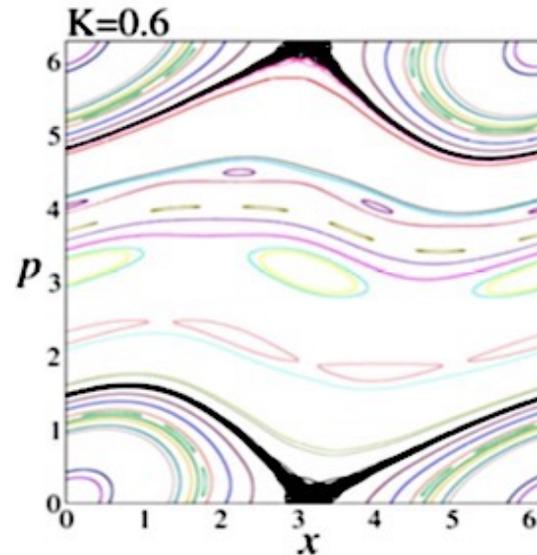
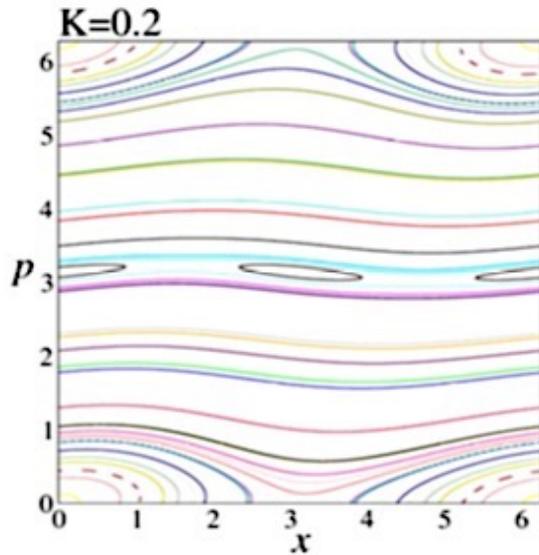
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π .



Kicked Rotator

Edge of Chaos nella Mappa Standard

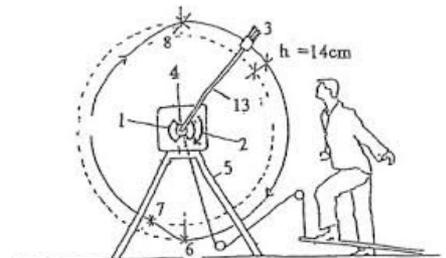


Tirnakli and Borges
Nature / Scientific Reports 6, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

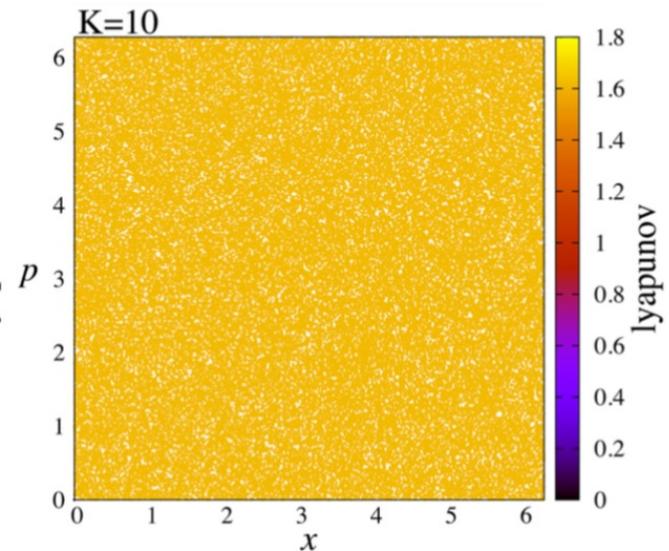
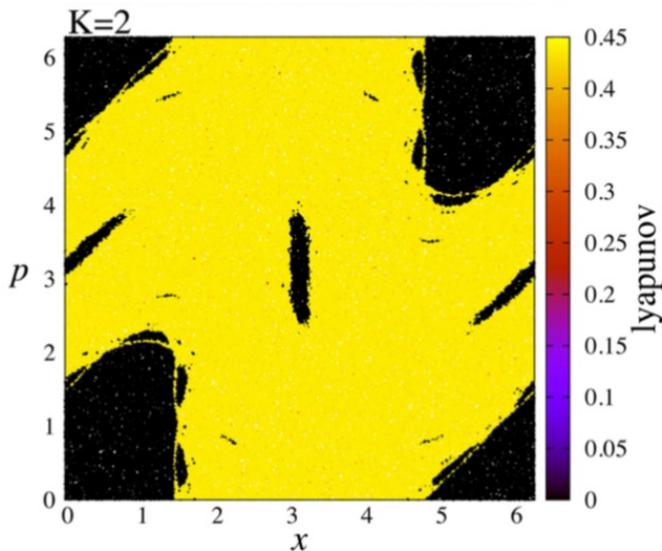
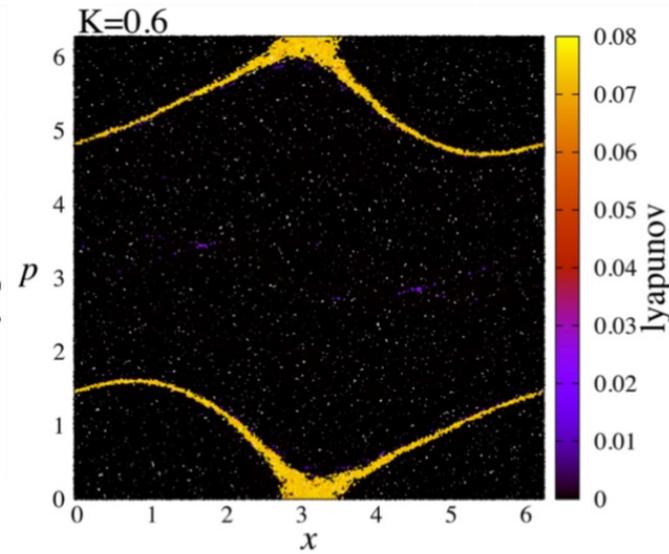
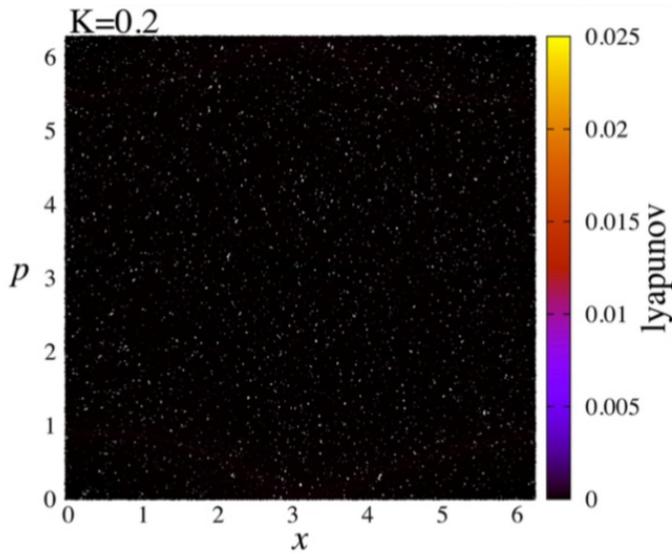
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π .



Kicked Rotator

Edge of Chaos nella Mappa Standard

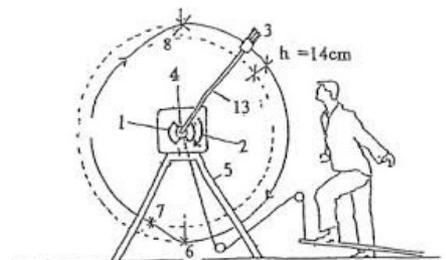


Tirnakli and Borges
Nature / Scientific Reports **6**, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π .

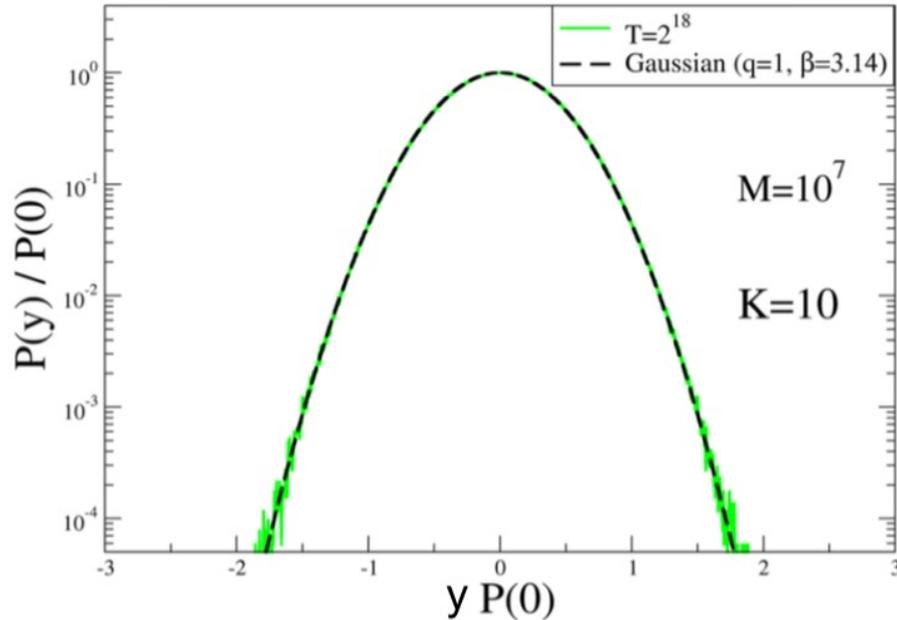


Kicked Rotator

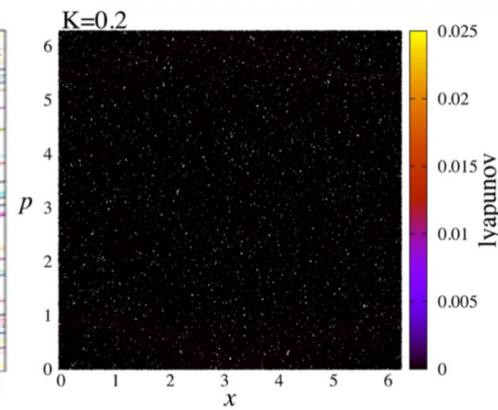
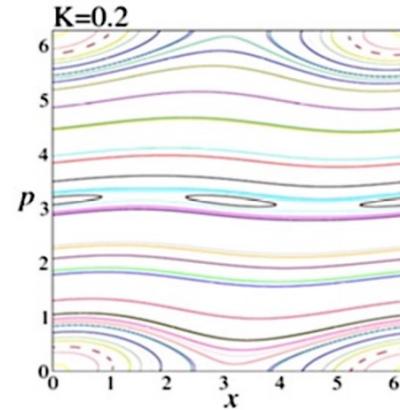
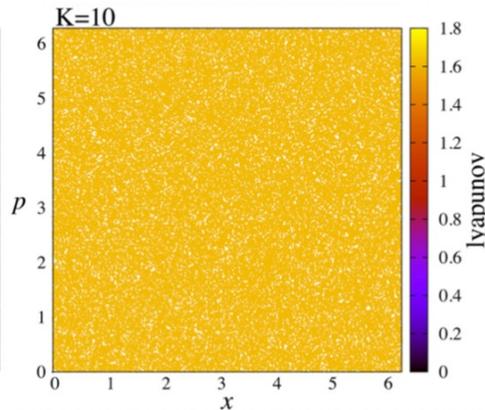
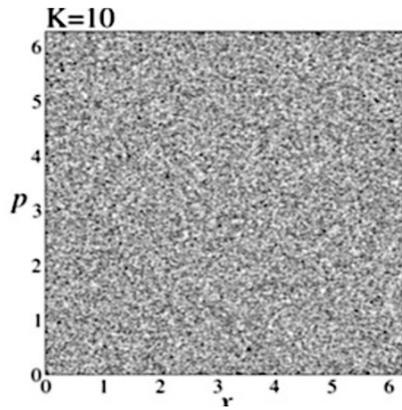
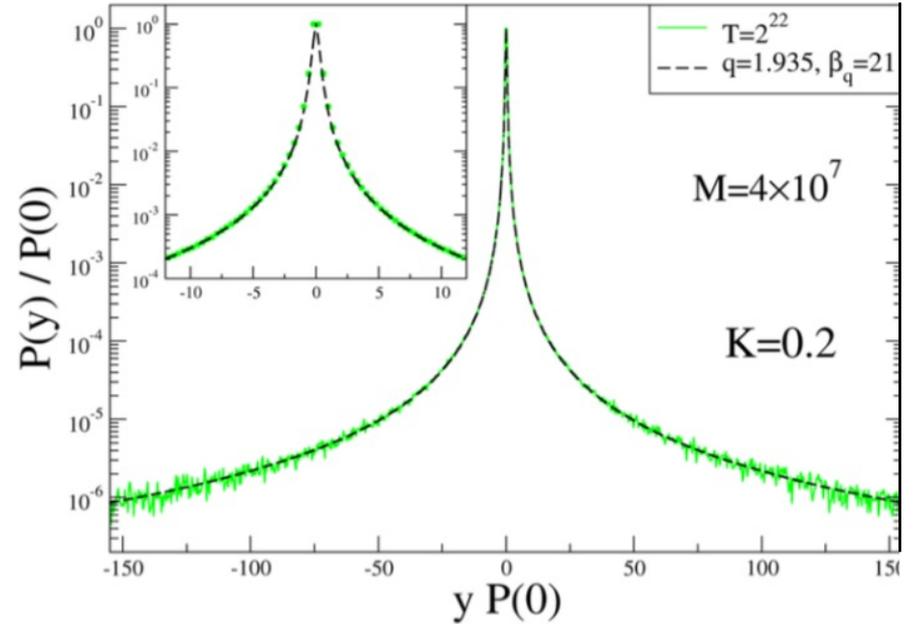
Violazione del CLT nella Mappa Standard



STRONG CHAOS



EDGE OF CHAOS





La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi



Sincronizzazione: il ruolo delle correlazioni a lungo raggio



Sincronizzazione: il ruolo delle correlazioni a lungo raggio

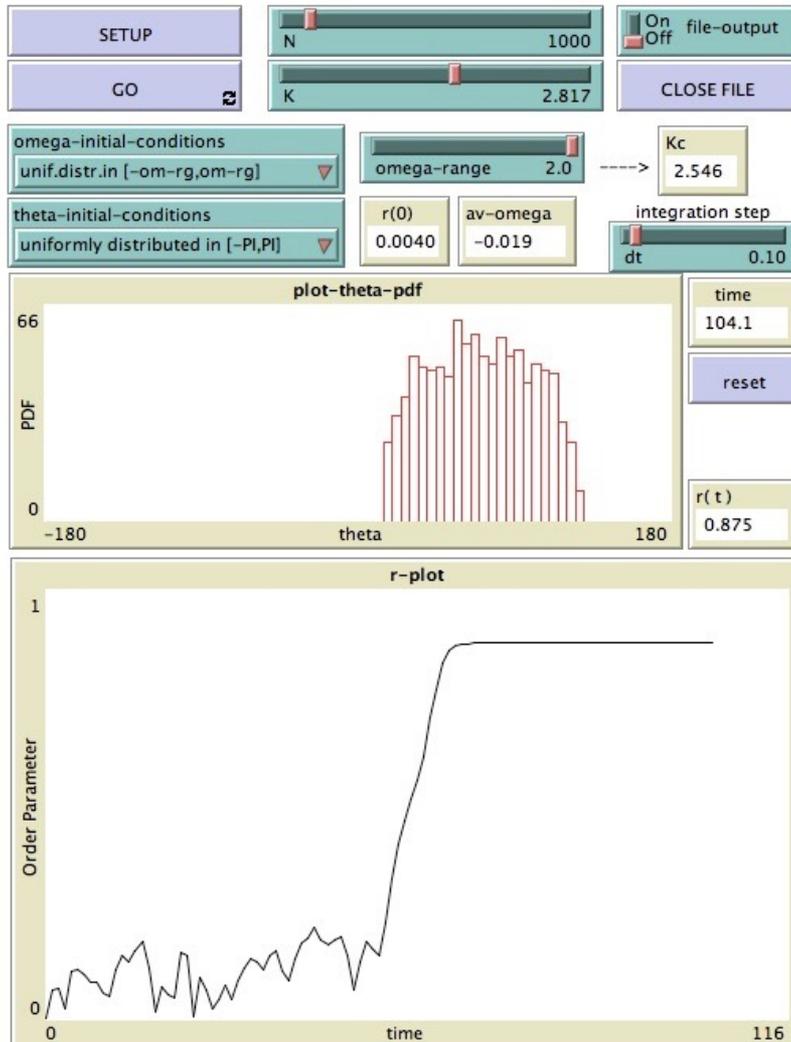
Sistema di 5 oscillatori accoppiati



Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.

Sistema di N oscillatori accoppiati



Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.

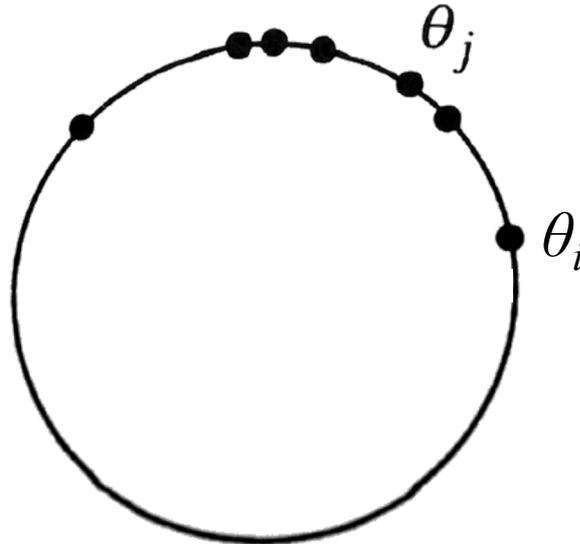


Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di N oscillatori accoppiati*, ognuno caratterizzato da una **fase** $\theta_i(t)$ al tempo t e da una **frequenza propria** ω_i , indipendente dal tempo.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

dove $K \geq 0$ è la **costante di accoppiamento** e il fattore $1/N$ assicura un corretto comportamento al limite di $N \rightarrow \infty$. Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field*, cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un **flusso dissipativo a N dimensioni**.



Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.



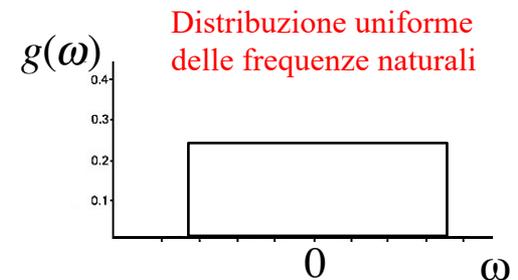
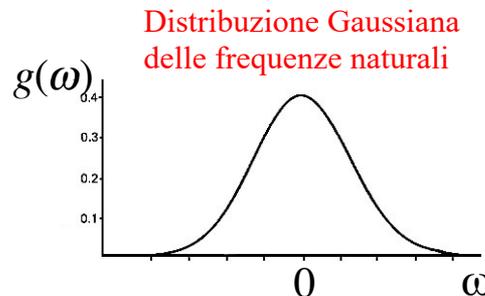
Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di N oscillatori accoppiati*, ognuno caratterizzato da una **fase** $\theta_i(t)$ al tempo t e da una **frequenza propria** ω_i , indipendente dal tempo.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

dove $K \geq 0$ è la **costante di accoppiamento** e il fattore $1/N$ assicura un corretto comportamento al limite di $N \rightarrow \infty$. Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field*, cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un **flusso dissipativo a N dimensioni**.

Nel limite di $N \rightarrow \infty$ la **distribuzione delle frequenze naturali** ω_i può essere descritta da una certa funzione di probabilità $g(\omega)$, tipicamente Gaussiana o uniforme, che per semplicità si assume simmetrica rispetto alla sua frequenza media Ω (che per la simmetria rotazionale del sistema si può considerare nulla, cioè $\Omega=0$).



Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.



Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di N oscillatori accoppiati*, ognuno caratterizzato da una **fase** $\theta_i(t)$ al tempo t e da una **frequenza propria** ω_i , indipendente dal tempo.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

dove $K \geq 0$ è la **costante di accoppiamento** e il fattore $1/N$ assicura un corretto comportamento al limite di $N \rightarrow \infty$. Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field*, cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un **flusso dissipativo a N dimensioni**.

Nel limite di $N \rightarrow \infty$ la **distribuzione delle frequenze naturali** ω_i può essere descritta da una certa funzione di probabilità $g(\omega)$, tipicamente Gaussiana o uniforme, che per semplicità si assume simmetrica rispetto alla sua frequenza media Ω (che per la simmetria rotazionale del sistema si può considerare nulla, cioè $\Omega=0$).

Secondo l'equazione (1), mentre ogni oscillatore tende a muoversi **indipendentemente** con la propria frequenza naturale ω_i , il termine di accoppiamento tende a **sincronizzarlo** con tutti gli altri. Se, quindi, per bassi valori del parametro K il sistema rimane incoerente e desincronizzato, per alti valori di K esso tenderà verso la sincronizzazione collettiva. Come vedremo più avanti, il passaggio dallo stato incoerente a quello sincronizzato può essere visto a tutti gli effetti come una **transizione di fase spontanea** al crescere del valore del parametro di accoppiamento oltre una certa **soglia critica**.

Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.

E' necessario, prima di procedere oltre, fare una breve precisazione, utile a chiarire la dinamica di sincronizzazione degli oscillatori. Il fatto che il sistema sia **dissipativo** induce a pensare che ad un certo punto la dinamica si arresti. In effetti, questo sarebbe vero se non ci fossero i termini ω_i ad agire come **forzanti esterne**. Infatti, la dinamica degli oscillatori si organizza sempre in modo tale che la media delle loro velocità, a qualsiasi istante di tempo, sia sempre costante e uguale a Ω :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\sin \theta_j \cos \theta_i - \cos \theta_j \sin \theta_i) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N^2} \left[\sum_{i,j=1}^N \sin \theta_j \cos \theta_i - \sum_{i,j=1}^N \cos \theta_j \sin \theta_i \right],\end{aligned}$$

ed invertendo gli indici nell'ultima sommatoria, cosa resa possibile dal fatto che essi sono indici muti, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N^2} \left[\sum_{i,j=1}^N \sin \theta_j \cos \theta_i - \sum_{i,j=1}^N \cos \theta_i \sin \theta_j \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i = \Omega = \text{costante}.\end{aligned}$$

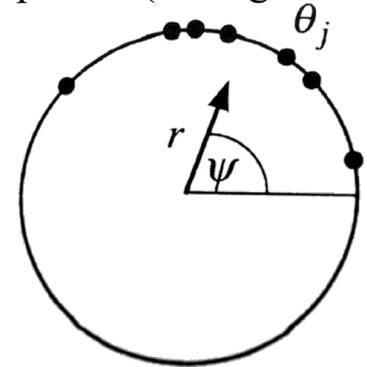
Dunque gli oscillatori si fermeranno solo nel caso in cui la distribuzione $g(\omega)$ sia tale che $\Omega = 0$. In realtà, **per N finito**, nonostante $g(\omega)$ sia simmetrica, Ω non è mai esattamente nulla e **gli oscillatori continueranno a ruotare, tanto più lentamente quanto più è grande N** .

Il parametro d'ordine del Modello di Kuramoto

Per poter caratterizzare lo stato macroscopico del sistema e dare una misura della sua sincronizzazione è conveniente introdurre il seguente **parametro d'ordine** complesso (analogo della magnetizzazione M nel modello HMF):

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (2)$$

Essendo uno stato qualunque del sistema $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ rappresentato come un set ordinato di N punti $e^{i\theta_i}$ su un cerchio unitario, di conseguenza $r e^{i\psi}$ rappresenta il centroide delle fasi degli oscillatori. **Il raggio r misura la coerenza in fase e ψ è la fase media.**



Nel caso in cui gli oscillatori si muovano come un unico gruppo, le loro fasi assumono in media lo stesso valore ψ ed $r \simeq 1$, cioè il sistema è simile ad un **oscillatore gigante**. Se invece gli oscillatori sono disposti in maniera casuale sul cerchio unitario, allora le loro fasi sono **uniformemente distribuite** e le oscillazioni individuali si sommano in maniera incoerente, dunque $r \simeq 0$. Perciò il valore di r è **una misura macroscopica della sincronizzazione del sistema.**

Tuttavia, è opportuno distinguere tra **sincronizzazione in frequenza**, che si raggiunge quando la forza esercitata dal termine di accoppiamento bilancia quella dovuta alle frequenze naturali e ogni oscillatore ruota alla stessa frequenza, pur mantenendo inalterata la fase, e **sincronizzazione totale**, in cui le frequenze degli oscillatori sono uguali ad Ω ($\dot{\theta}_i = \Omega, \forall i$) e la loro differenza di fase resta confinata in un piccolo intervallo di valori. Noi studieremo quest'ultima, anche se è bene precisare che **non si può mai avere una sincronizzazione perfetta in fase** ($r = 1$) perchè in questo caso si avrebbe $\theta_i = \theta_j \forall i, j$ e, dalla (1) seguirebbe che $\theta_i = \omega_i$, cioè ogni oscillatore ruoterebbe con la propria frequenza naturale, cosa che contraddice la stessa ipotesi di sincronizzazione totale!

Equazioni in campo medio per il Modello di Kuramoto

Una volta introdotto il parametro d'ordine, è possibile scrivere la (1) in una forma più conveniente. Infatti, moltiplicando ambo i membri della (2) per $e^{-i\theta_i}$, si ha:

$$r e^{i\psi} e^{-i\theta_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} e^{-i\theta_i} \Rightarrow r e^{i(\psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}.$$

Poiché in generale $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, uguagliando tra loro le parti immaginarie:

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i).$$

e le (1) diventano quindi un **set di equazioni disaccoppiate**:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

In questa forma è evidente il **carattere di campo medio** (*mean field*) del modello. Infatti, pur essendo le (3) disaccoppiate, la dipendenza di ogni oscillatore da tutti gli altri è implicita, in quanto sia r che ψ sono quantità medie che dipendono dal comportamento collettivo del sistema. Ogni oscillatore è accoppiato alla fase media $\psi(t)$ con un parametro di accoppiamento dato da Kr : per un certo valore di K , più aumenta la coerenza del sistema nel tempo, più cresce r e, di conseguenza, crescerà anche l'accoppiamento effettivo Kr , che tende a raggruppare tutti gli oscillatori in un unico blocco.

Dalle equazioni (3) appare anche chiaramente che il **comportamento complesso** del modello di Kuramoto emerge dalla competizione tra il termine di accoppiamento parametrizzato da Kr , che tende a «**ordinare**» (sincronizzare) gli oscillatori, e le loro frequenze naturali ω_i , che tendono a «**disordinarli**» facendoli oscillare ciascuno per conto proprio.

Modelli HMF e Kuramoto come casi limite di un sistema di pendoli accoppiati

Da un punto di vista teorico, è possibile mostrare una **analogia formale tra il modello HMF, conservativo, e il modello di Kuramoto, dissipativo**. L'idea è che le equazioni del moto di entrambi i modelli possono essere viste come casi particolari delle equazioni generali in campo medio che regolano l'evoluzione dinamica di un **set di N pendoli forzati e smorzati** con massa e lunghezza unitaria (e $g=1$):

$$\ddot{\theta}_i + B\dot{\theta}_i + C r \sin(\theta_i - \phi) = \Gamma, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

dove B rappresenta il coefficiente di smorzamento, Γ è una forzante esterna e C è il termine di accoppiamento, mentre r e ϕ sono, rispettivamente, il modulo e la fase del parametro d'ordine complesso che misura la sincronizzazione dei pendoli.

Nel **caso conservativo**, cioè per $B=0$, in assenza di forzanti esterne ($\Gamma=0$) e per un accoppiamento unitario ($C=1$) le (4) diventano formalmente equivalenti alle equazioni del moto in campo medio del modello HMF (coincidendo il parametro d'ordine r con la magnetizzazione M dei rotatori planari):

$$\ddot{\theta}_i + M \sin(\theta_i - \phi) = 0 \quad i = 1, \dots, N,$$

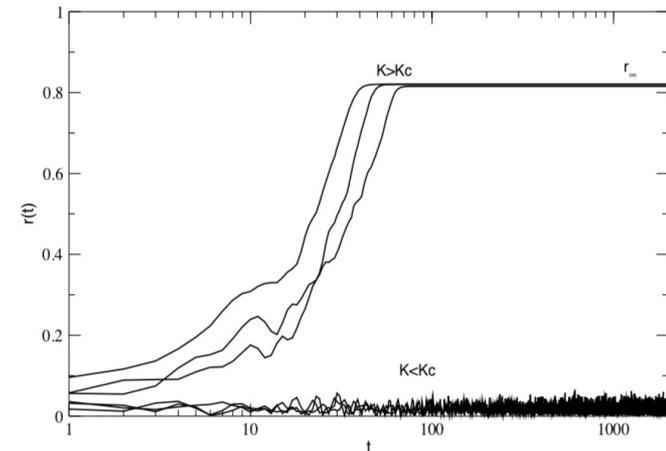
D'altra parte, per $B \gg 1$ (**caso dissipativo sovra-smorzato**), nelle equazioni (4) i termini $\ddot{\theta}_i$ diventano trascurabili ed esse risultano analoghe alle equazioni del moto in campo medio del modello di Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\phi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

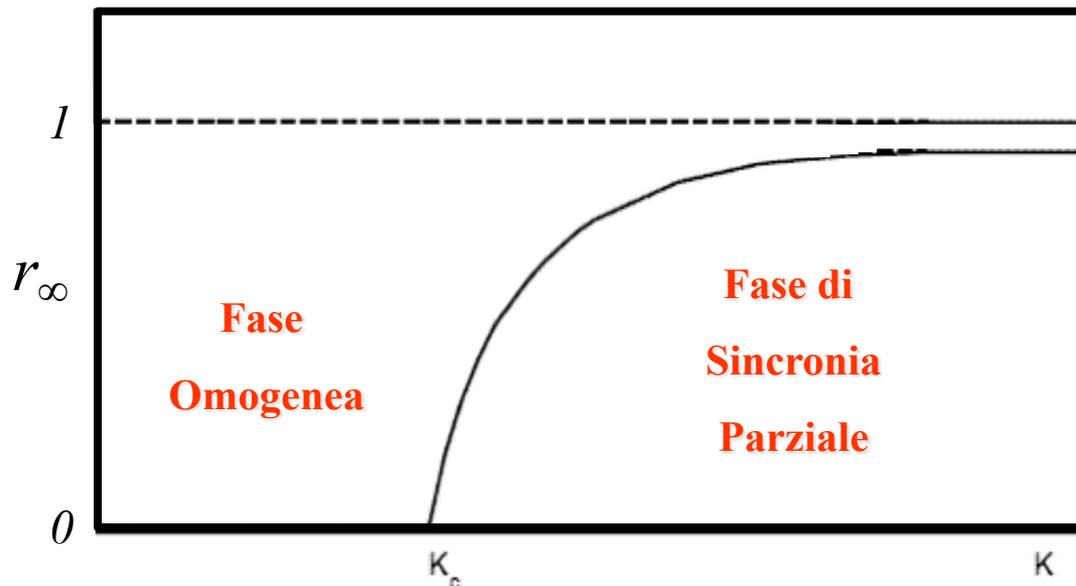
avendo identificato le frequenze naturali ω_i con delle forzanti esterne Γ_i/B e il coefficiente di accoppiamento $K = C/B$.

Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

Assumendo una certa **distribuzione delle frequenze naturali** $g(\omega)$ e distribuendo a $t = 0$ gli oscillatori uniformemente sul cerchio unitario, le simulazioni mostrano che anche il modello di Kuramoto, come quello HMF, mostra una transizione di fase in corrispondenza di un certo **valore critico** K_C : al di sotto di questo valore il disordine prevale e gli oscillatori continuano a muoversi rimanendo uniformemente distribuiti sul cerchio unitario, quindi $r \rightarrow 0$; per $K > K_C$, lo stato incoerente diventa instabile e r tende ad aumentare saturando in corrispondenza di un certo $r_\infty < 1$ (**sincronizzazione parziale**), il cui valore dipende solo da K e non dalla particolare realizzazione delle condizioni iniziali.



Evoluzione del parametro d'ordine r in funzione del tempo per due diversi valori di K , sotto e sopra la soglia critica.



Valore asintotico del parametro d'ordine r_∞ in funzione di K

Analisi teorica di Kuramoto

Il merito di **Yoshiki Kuramoto** fu quello di riuscire a ricavare **analiticamente**, con una procedura basata su considerazioni di simmetria per la soluzione stazionaria r_∞ , il valore critico K_C nel limite di un numero infinito di oscillatori. In condizioni stazionarie $r(t)$ è costante e il vettore \vec{r} ruota uniformemente alla frequenza Ω . Mettendosi nel sistema di riferimento che ruota con frequenza Ω , e spostando eventualmente l'origine in maniera opportuna, si può considerare $\psi = 0$. In questo caso, le equazioni del moto (3) diventano:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Alla base dell'analisi di Kuramoto c'è una **condizione di autoconsistenza**: essendo r costante, ogni oscillatore è indipendente da tutti gli altri, e sarà quindi possibile risolvere l'equazione del moto comune a tutti gli oscillatori, la cui soluzione implicherà valori di r e di ψ che dovranno essere consistenti con i valori originariamente assunti.

La (5) ha **due tipi di soluzioni**, a seconda che la frequenza naturale dell' i -esimo oscillatore sia maggiore o minore del parametro di accoppiamento Kr :

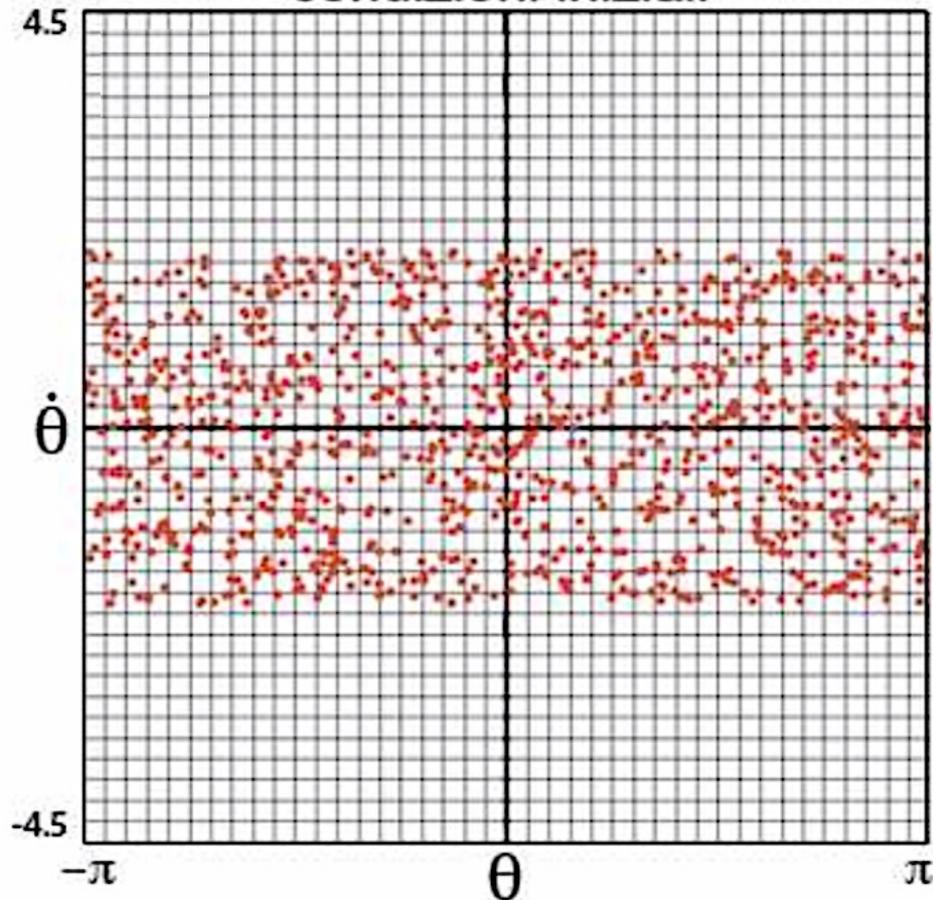
- gli oscillatori con $|\omega_i| \leq Kr$ si avvicinano al punto fisso stabile ($\dot{\theta}_i = 0 \forall i$) definito dalla condizione $\omega_i = Kr \sin \theta_i$ con $|\theta_i| \leq \pi$: questi oscillatori sono parzialmente **sincronizzati** in fase e ruotano alla frequenza Ω (nel sistema di riferimento originario);
- gli oscillatori con $|\omega_i| > Kr$ ruotano sul cerchio unitario in maniera casuale e **incoerente**, accelerando in prossimità di certe posizioni e rallentando in prossimità di altre.

Per distinguere i due tipi di oscillatori, spesso quelli appartenenti al primo gruppo vengono chiamati “**locked-oscillators**”, quelli appartenenti al secondo “**drifting-oscillators**”.

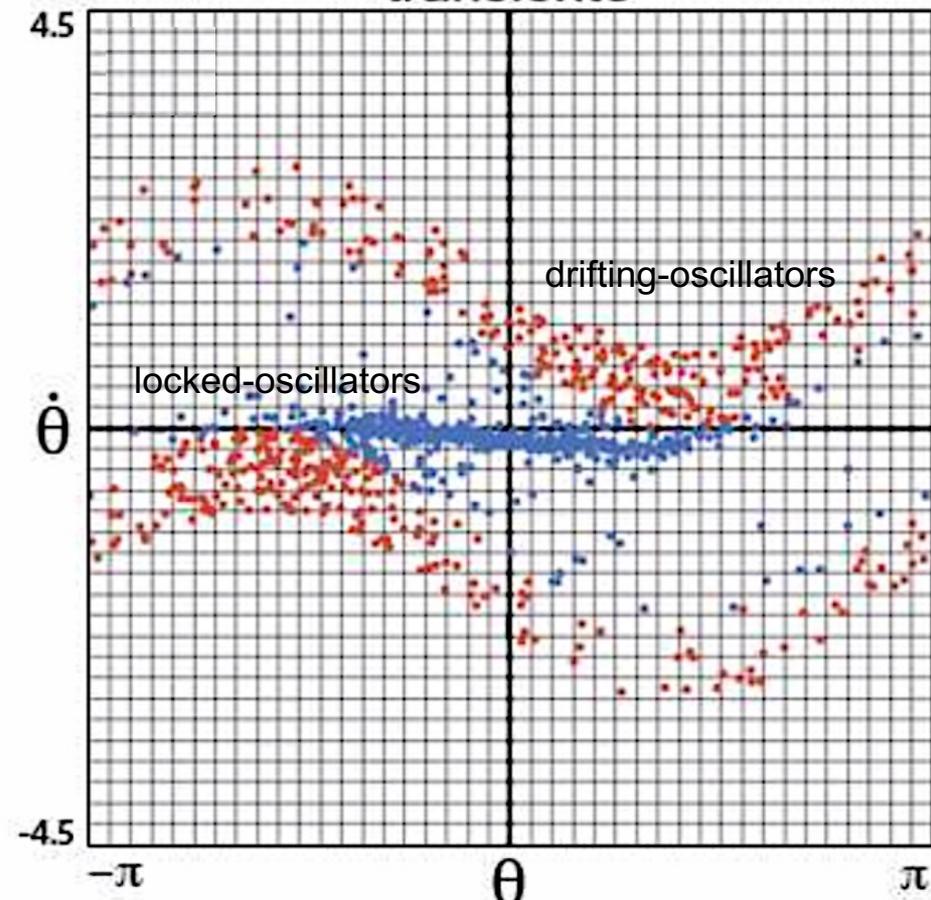
Analisi teorica di Kuramoto

Nel limite di un **numero infinito di oscillatori** si può supporre che questi siano distribuiti con una **densità di probabilità** $\rho(\theta, \omega, t)$. Sia $\rho(\theta, \omega) d\theta$ la frazione di oscillatori con frequenza naturale ω e fase compresa tra θ e $\theta + d\theta$ in condizioni stazionarie.

condizioni iniziali



transiente



Analisi teorica di Kuramoto

Nel limite di un **numero infinito di oscillatori** si può supporre che questi siano distribuiti con una **densità di probabilità** $\rho(\theta, \omega, t)$. Sia $\rho(\theta, \omega) d\theta$ la frazione di oscillatori con frequenza naturale ω e fase compresa tra θ e $\theta + d\theta$ in condizioni stazionarie. La condizione di stazionarietà implica una densità $\rho(\theta, \omega)$ inversamente proporzionale alla velocità $\dot{\theta}_i$. Si ha quindi:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} \quad (6) \quad \text{dove il valore della costante } C \text{ si ricava imponendo la normalizzazione della } \rho(\theta, \omega): C = 1/2\pi \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}.$$

Sfruttando la **condizione di autoconsistenza** per il parametro d'ordine r , Kuramoto riuscì a ricavare la seguente equazione:

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

che ammette una prima **soluzione banale** $r = 0$, corrispondente allo stato incoerente con una densità di probabilità degli oscillatori che (come si vede sostituendo C nella (6) e poi ponendo $r = 0$) rimane costante:

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}}{\omega - Kr \sin \theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2}}{\omega} = \frac{1}{2\pi}$$

e una seconda **soluzione non banale**, corrispondente allo stato parzialmente sincronizzato che si ottiene per:

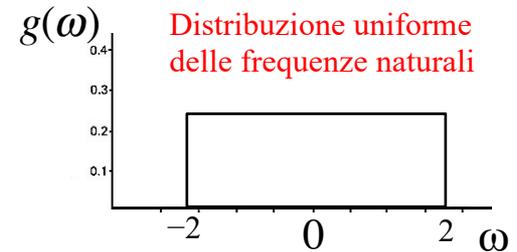
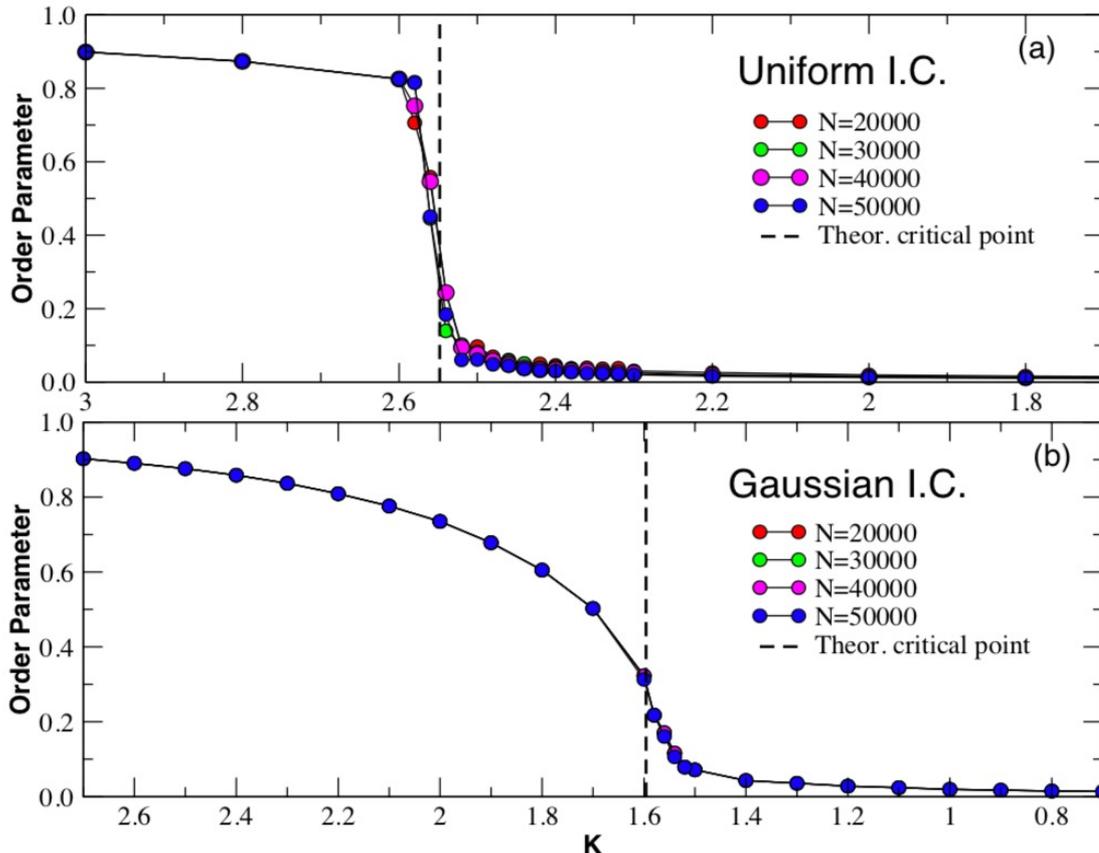
$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

e che si distacca dalla soluzione con $r = 0$ in corrispondenza di un valore critico K_C del parametro di accoppiamento (ricavabile nel limite $r \rightarrow 0^+$):

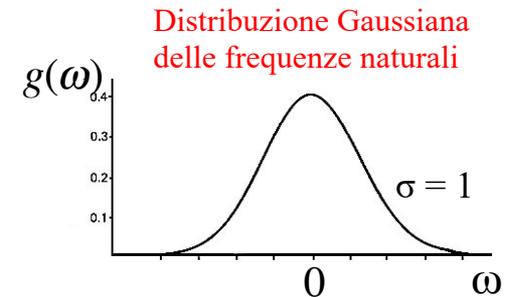
$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(0) d\theta \Rightarrow 1 = K_C g(0) \frac{\pi}{2} \Rightarrow K_C = \frac{2}{\pi g(0)}$$

Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

Dunque K_C dipende solo dal valore che assume la **distribuzione delle frequenze** $g(\omega)$ in corrispondenza di $\omega=0$. Però il carattere della transizione di fase dipende dal tipo di distribuzione scelta. Nel grafico (a), ad esempio, la $g(\omega)$ è **uniforme** (waterbag) con $\omega \in [-2, 2]$, quindi (essendo la distribuzione normalizzata ad area unitaria) si avrà $g(0)=1/4$ e $K_C=2.547$: in questo caso si vede che la transizione è brusca (transizione del **primo ordine**). Nel grafico (b), invece, $g(\omega)$ è **gaussiana** (con $\sigma = 1$) quindi $g(\omega) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$, da cui $g(0)=1/\sqrt{2\pi}$ e $K_C=1.596$: stavolta la transizione è continua (del **secondo ordine**, come nel caso del modello HMF).

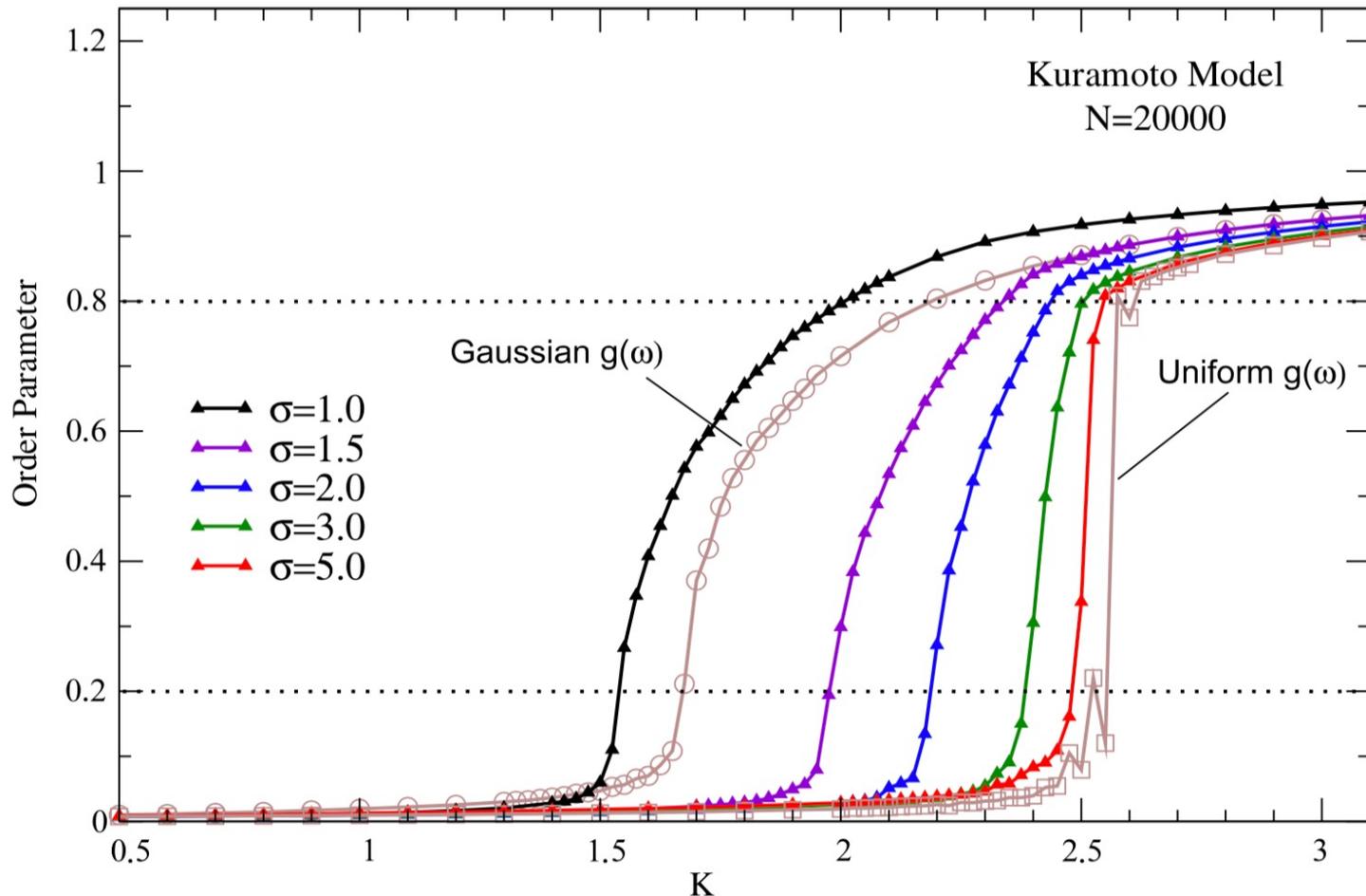


$$K_C = \frac{2}{\pi g(0)}$$



Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

In realtà è anche possibile passare da un tipo di transizione all'altra facendo **aumentare gradualmente la deviazione standard** della distribuzione Gaussiana delle frequenze, trasformandola infine (per $\sigma > 5$) in una distribuzione uniforme:



Stati Metastabili nel Modello di Kuramoto

Ma l'analogia del modello di Kuramoto col modello HMF va oltre la presenza della transizione di fase: si è visto infatti che, quando K assume valori prossimi a quello critico ($K_C=2.547$), così come accadeva nel modello HMF anche qui iniziano ad emergere **stati metastabili**, in cui il parametro d'ordine si mantiene, per un certo intervallo di tempo, ad un valore più basso del valore asintotico r_∞ :

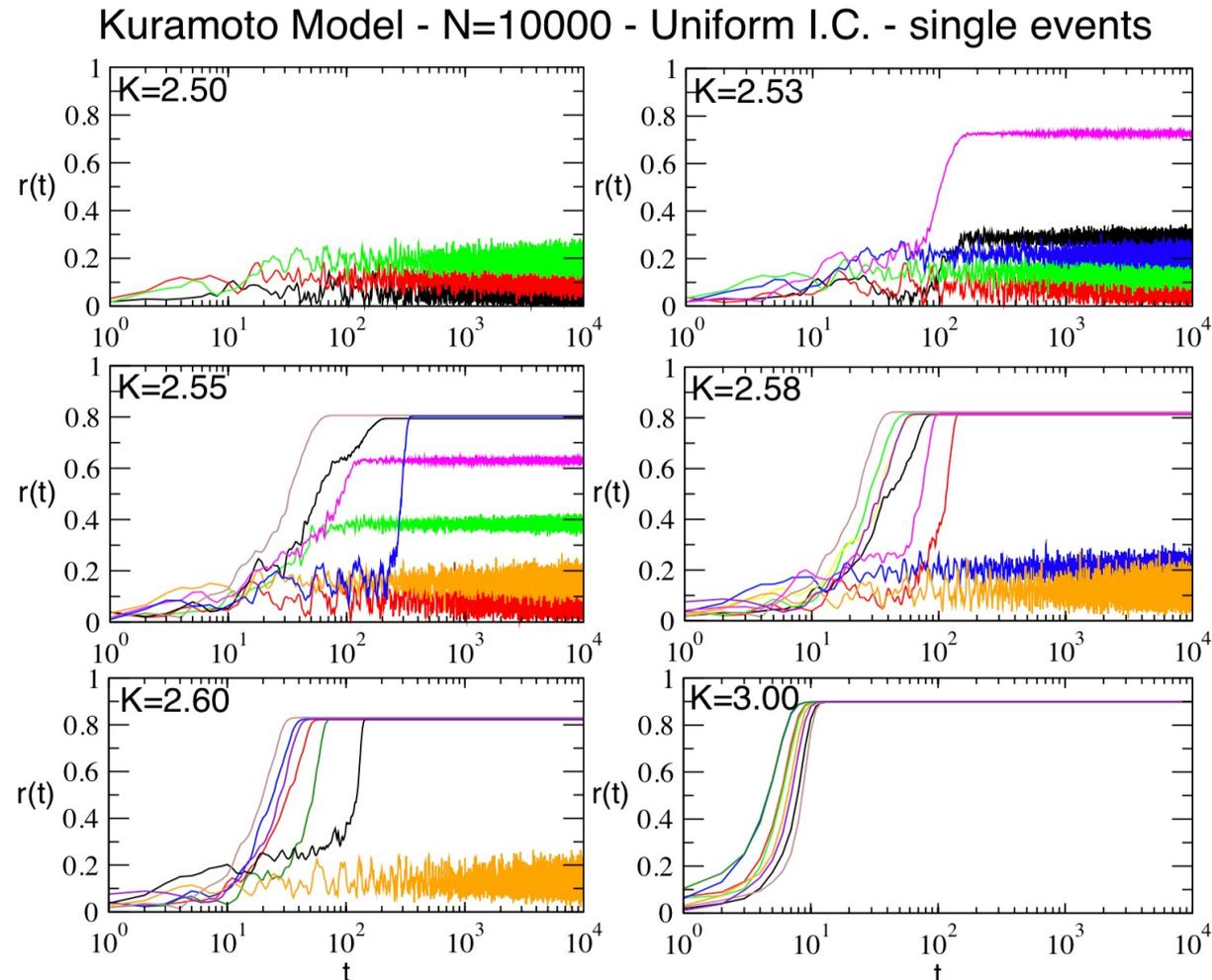
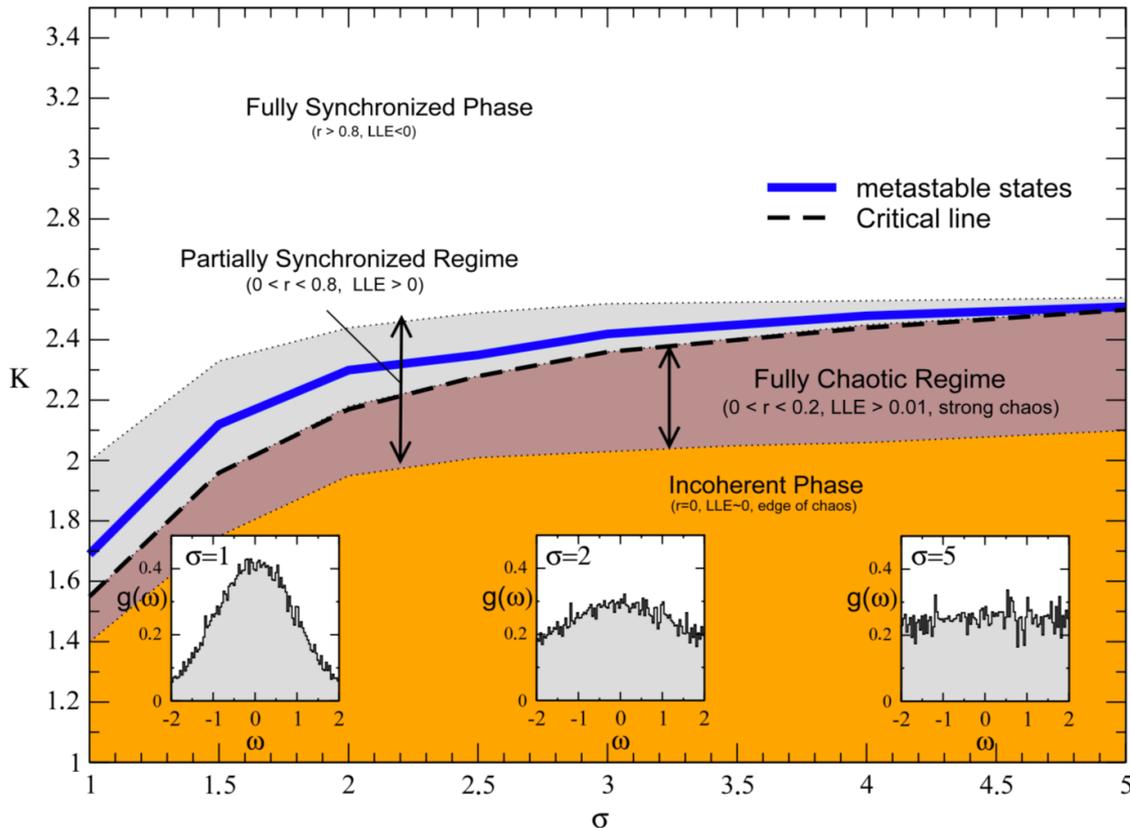


Diagramma di fase nel Modello di Kuramoto

Quanto abbiamo visto può essere sintetizzato in un **diagramma di fase K - σ** , dove si vede che, all'aumentare di σ , il valore K_C aumenta anch'esso gradualmente formando una «**linea critica**» tratteggiata: questa linea separa la fase incoerente (omogenea) da quella coerente (sincronizzata) ed è circondata da una zona di sincronia parziale all'interno della quale appare una linea (blu) che identifica i valori di K per cui si manifestano gli **stati metastabili**. A differenza però di quanto accadeva in HMF, calcolando l'esponente massimale di Lyapunov (LLE) in questi diversi regimi, si vede che è la fase incoerente a trovarsi al **marginale del caos** (Edge of Chaos, con LLE circa zero).

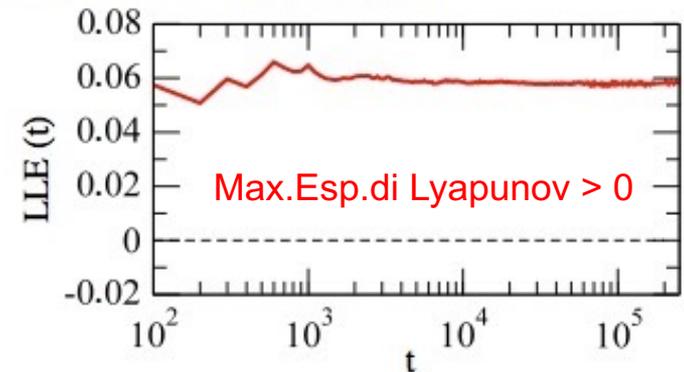
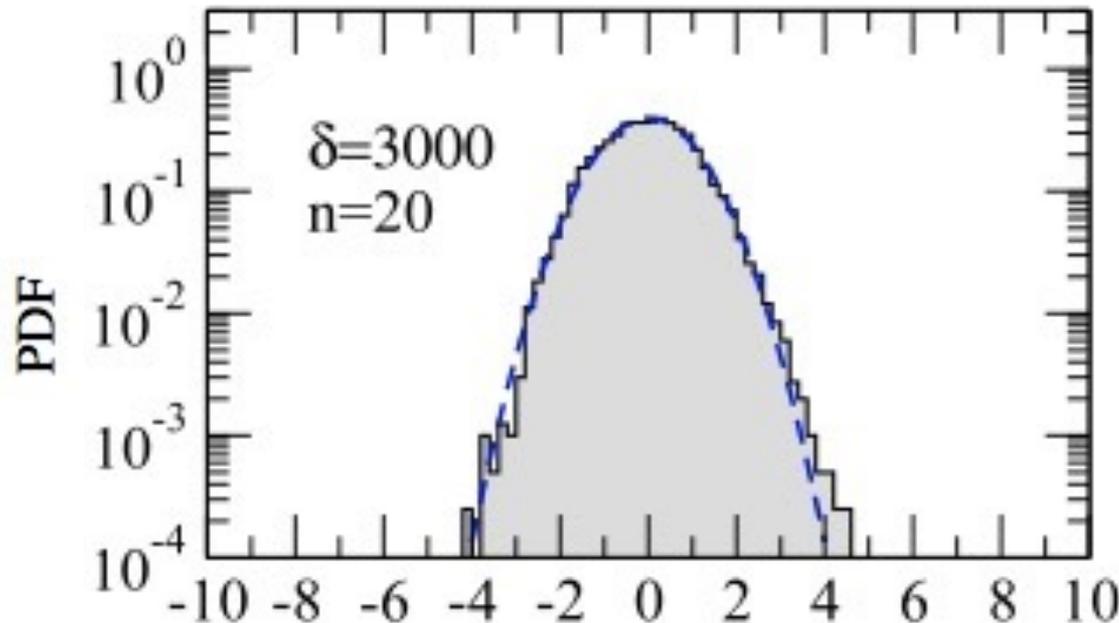


Modello di Kuramoto e Teorema Centrale del Limite (CLT)

Sappiamo che, secondo il CLT standard, la somma (normalizzata) di un grande numero di variabili casuali **INDIPENDENTI** è approssimativamente distribuita come una variabile casuale normale standard (distribuzione Gaussiana). Se come variabili prendiamo le **fasi degli oscillatori di Kuramoto** ad istanti di tempo successivi (con passo δ) nel **regime caotico**, cioè nella fase parzialmente sincronizzata con $0 < r < 0.2$, troviamo in effetti una distribuzione **Gaussiana** (una parabola in scala Log-Lin) :

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \theta_i(k\delta)$$

**Fully Chaotic
Regime**



**Standard
Gaussian
CLT attractor**

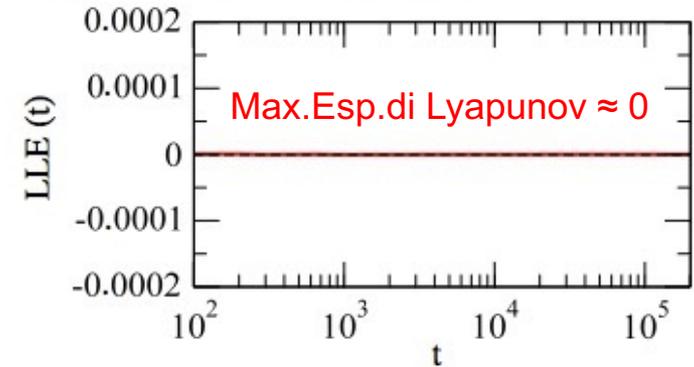
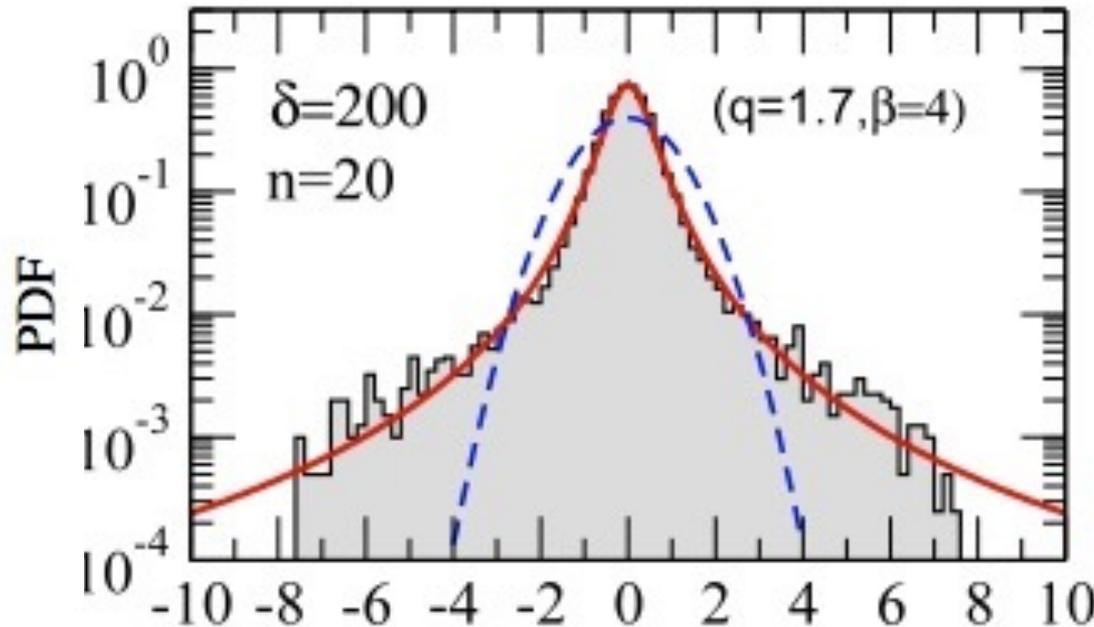
Code esponenziali

Violazione del Teorema Centrale del Limite all'Edge of Chaos

Prendendo invece le stesse variabili dinamiche al **marginale del caos**, cioè nella fase incoerente con $r \sim 0$ dove il LLE rimane anch'esso nullo, la distribuzione non segue più le previsioni del CLT ma viene ben fittata dalla curva **q-Gaussiana** introdotta nella Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis, con le sue tipiche code a legge di potenza: anche nel modello di Kuramoto, quindi, la presenza di **correlazioni a lungo raggio** tra gli oscillatori produce la violazione dei teoremi statistici standard!

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \theta_i(k\delta)$$

“Edge of Chaos” Regime



**Generalized
q-Gaussian
attractor**

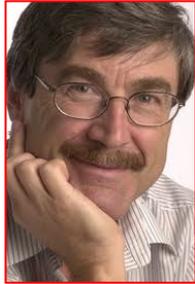
Code a legge di potenza!

La Legge di Potenza

NE RIPARLEREMO NEL SEMINARIO CONCLUSIVO...

L'enigma “Riccioli d'Oro”

Perché viviamo in un universo favorevole alla vita?



Paul Davies

“Io prendo sul serio la vita, la mente e la finalità, e ammetto che l’universo quanto meno sembra progettato con un elevato livello di ingegnosit . Non posso accettare questi aspetti come uno scrigno di meraviglie che ci sono soltanto per caso, che esistono senza una ragione”

