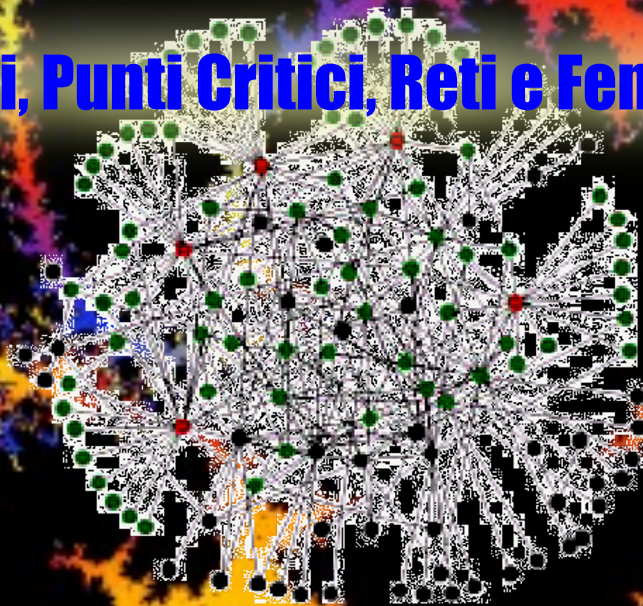


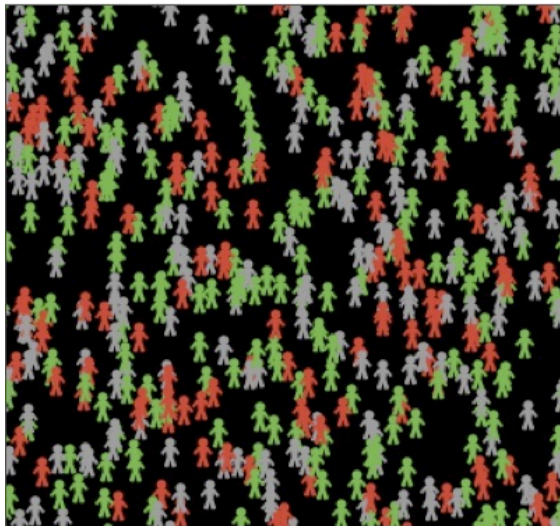
Introduzione alla Nuova Scienza della Complessità

Simulazioni, Punti Critici, Reti e Fenomeni Emergenti

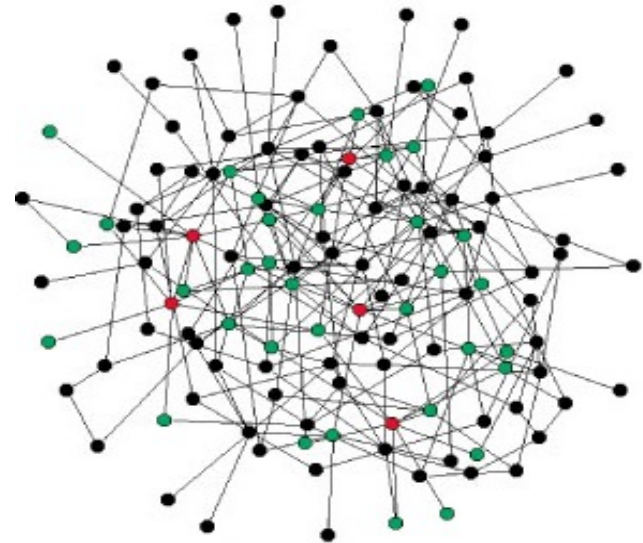


Due possibili descrizioni di un sistema complesso

Da un punto di vista dinamico è possibile descrivere un sistema complesso come un insieme costituito da numerosi elementi, detti anche “**agenti**” (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...), che **interagiscono** tra loro di solito in maniera **non lineare** spostandosi all’interno di un certo **spazio** (reale o virtuale) e secondo certe regole:



Da un punto di vista topologico (cioè se ci interessa invece sapere “chi interagisce con chi”) è anche possibile descrivere un sistema complesso come una **rete** (network) costituita da un certo numero di **nodi** (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...) collegati tra loro per mezzo di **links** che esprimono delle relazioni tra i nodi:



Due possibili descrizioni di un sistema complesso

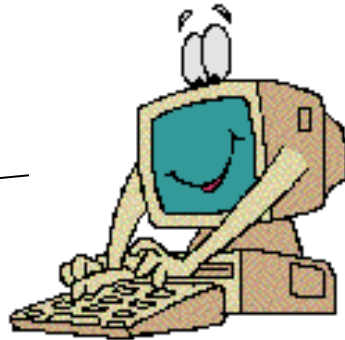
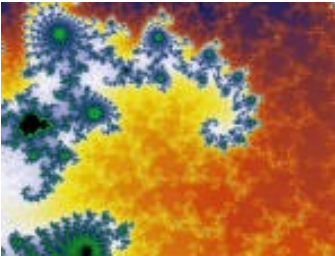
Da un punto di vista dinamico è possibile descrivere un sistema complesso come un insieme costituito da numerosi elementi, detti anche “agenti” (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...), che interagiscono tra loro di solito in maniera non lineare spostandosi all’interno di un certo spazio (reale o virtuale) e secondo certe regole:



Da un punto di vista topologico (cioè se ci interessa invece sapere “chi interagisce con chi”) è anche possibile descrivere un sistema complesso come una rete (network) costituita da un certo numero di nodi (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...) collegati tra loro per mezzo di links che esprimono delle relazioni tra i nodi:



Autosimilarità e Invarianza di Scala



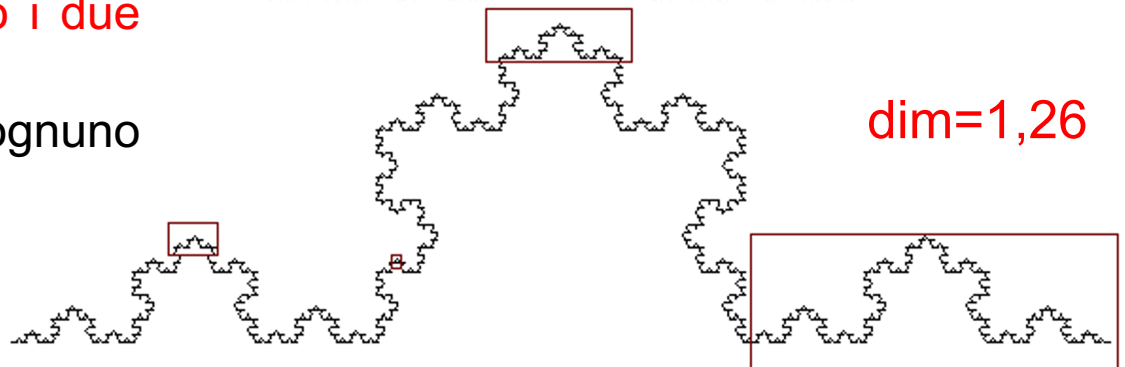
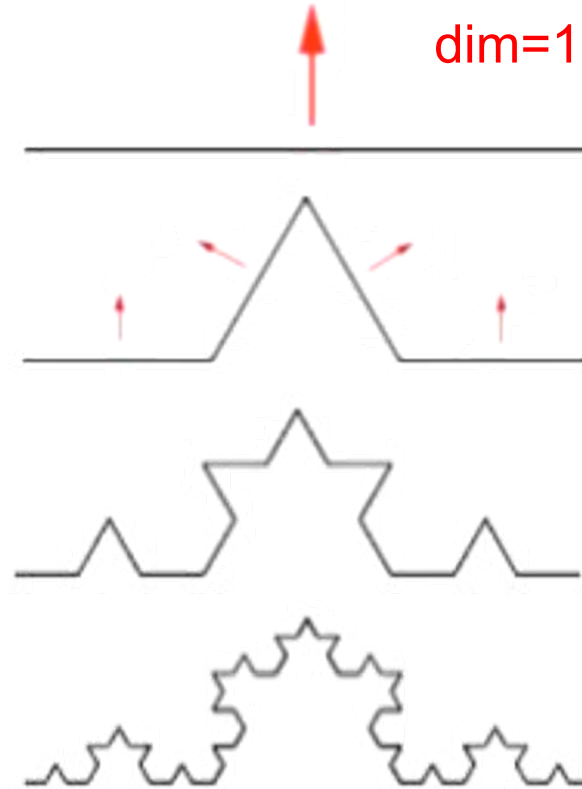
**Proprietà tipiche
dei sistemi complessi**

Autosimilarità negli oggetti frattali

La curva di Koch

Procedura di generazione della curva di Koch a partire da un segmento:

1. dividere il segmento in tre segmenti uguali;
2. cancellare il segmentino centrale, sostituendolo con due segmenti ad esso identici che costituiranno i due lati di un triangolo equilatero;
3. tornare al punto 1 per ognuno degli attuali segmenti.



L'insieme di Mandelbrot

. $P_0 \rightarrow$ successione
divergente

$$P_0 = x + i y$$

$$Z_0 = 0$$

$$Z_1 = Z_0^2 + P_0$$

$$Z_2 = Z_1^2 + P_0$$

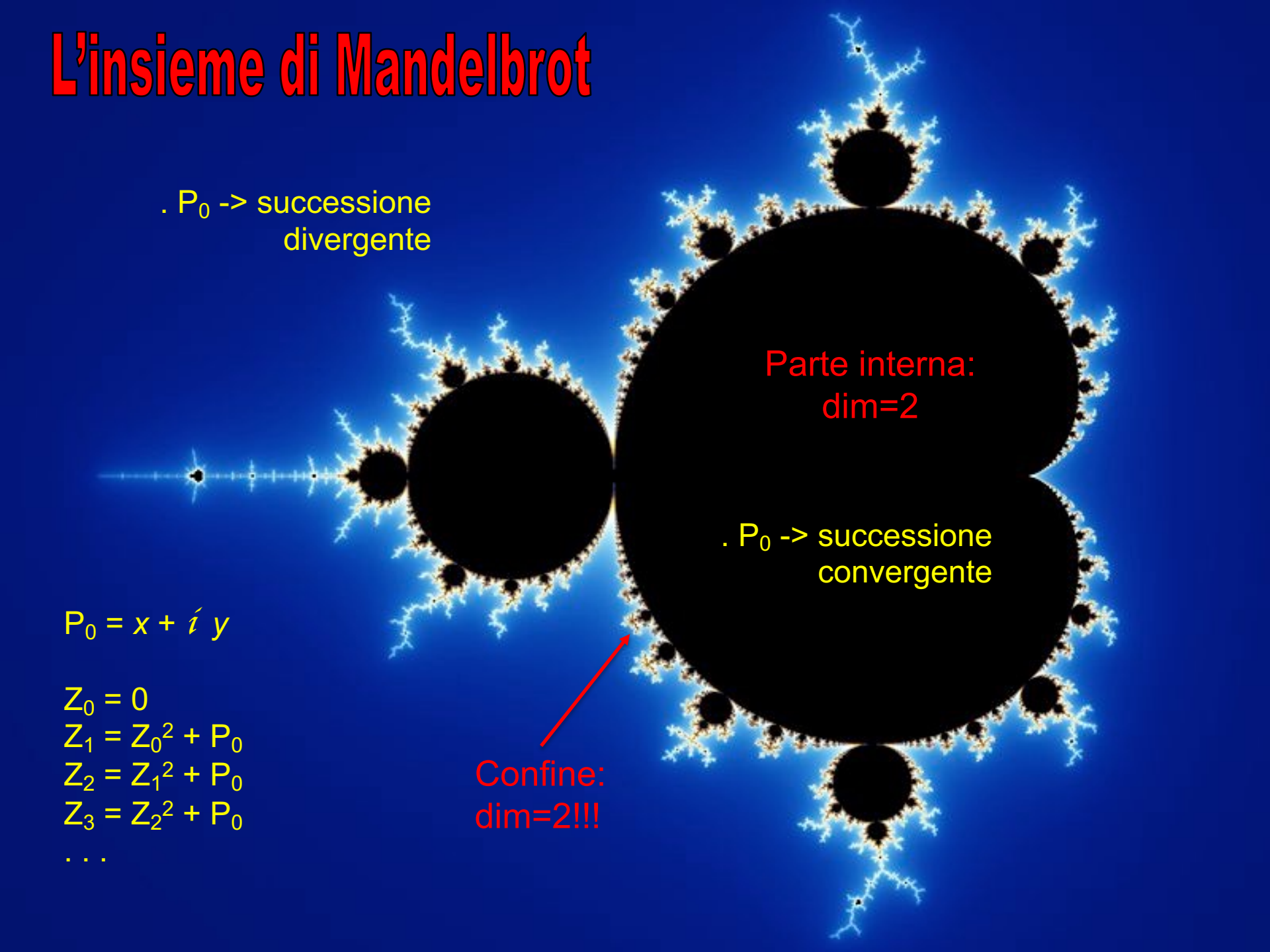
$$Z_3 = Z_2^2 + P_0$$

...

Parte interna:
dim=2

. $P_0 \rightarrow$ successione
convergente

Confine:
dim=2!!!

The image shows the Mandelbrot set, a fractal boundary in the complex plane. It consists of a large central black region with a highly intricate, self-similar, and fractal boundary. The boundary is composed of many smaller, similar structures, creating a complex, branching pattern. The background is a deep blue. The text is overlaid on the image, providing mathematical context and labels for different parts of the fractal.



Autosimilarità e caos in una dimensione: la Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

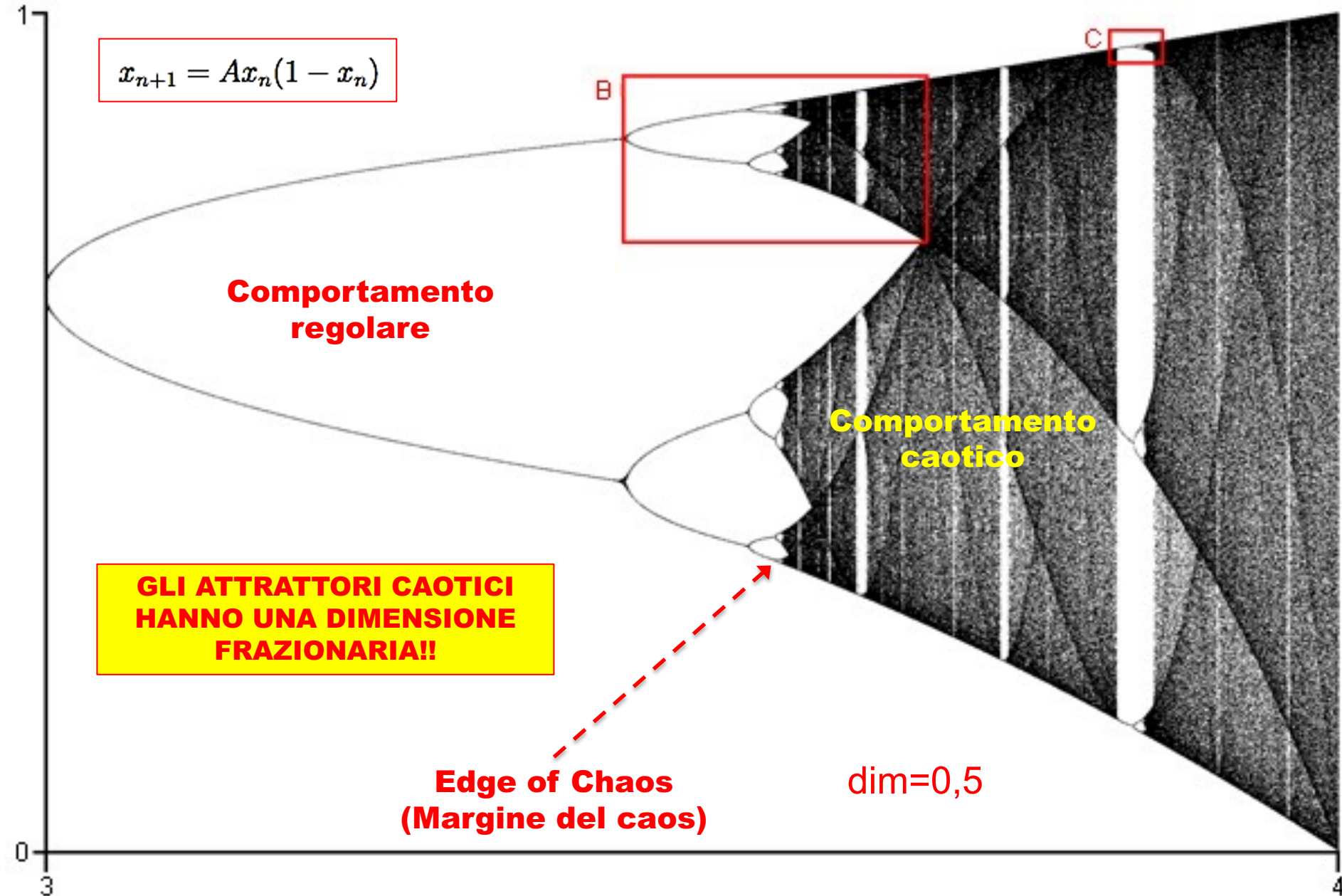
Comportamento regolare

Comportamento caotico

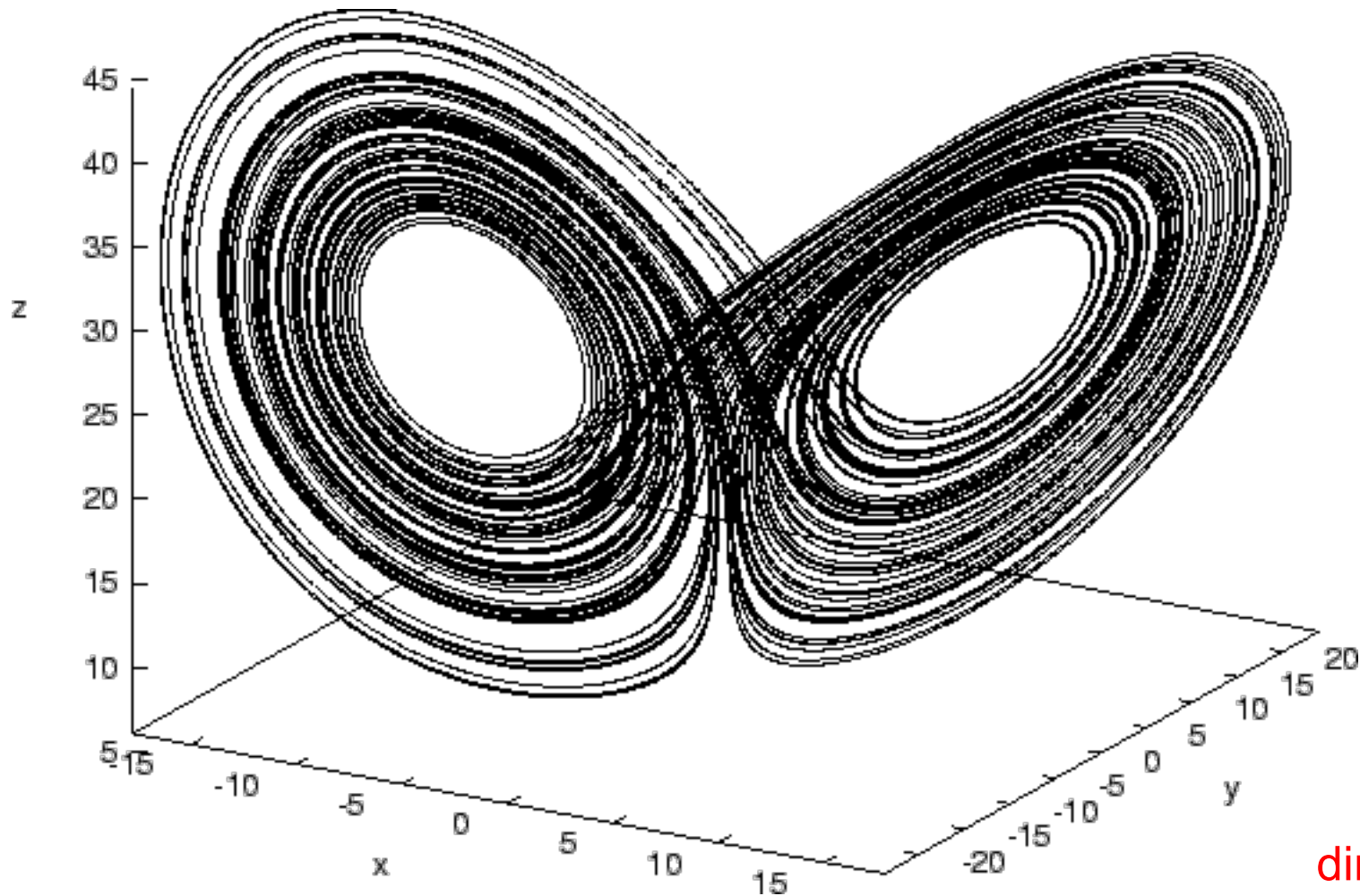
GLI ATTRATTORI CAOTICI HANNO UNA DIMENSIONE FRAZIONARIA!!

**Edge of Chaos
(Margine del caos)**

dim=0,5



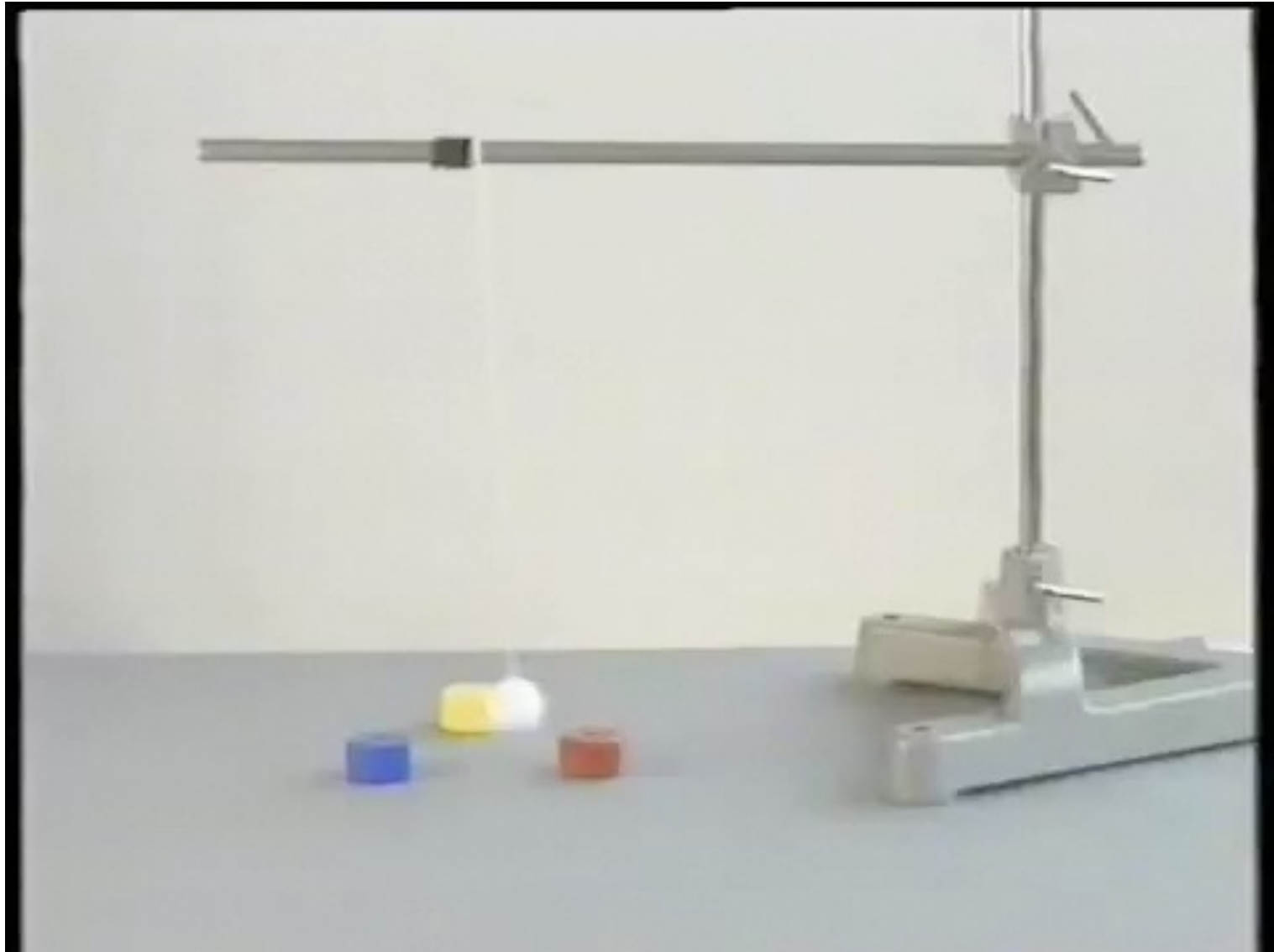
Autosimilarità e caos in 3 dimensioni: l'Attrattore di Lorenz



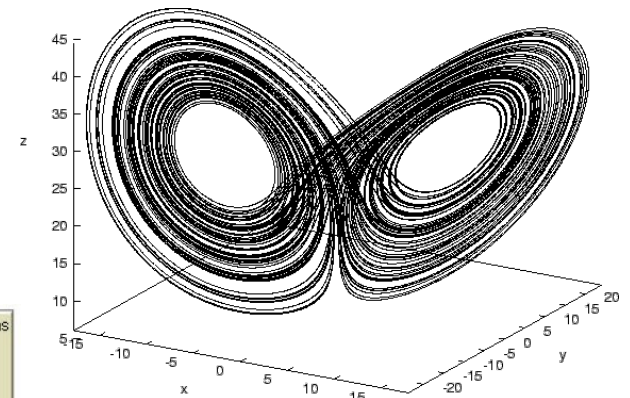
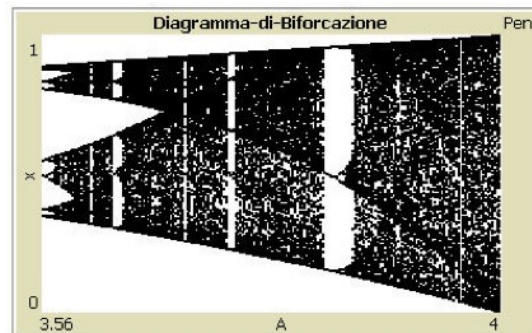
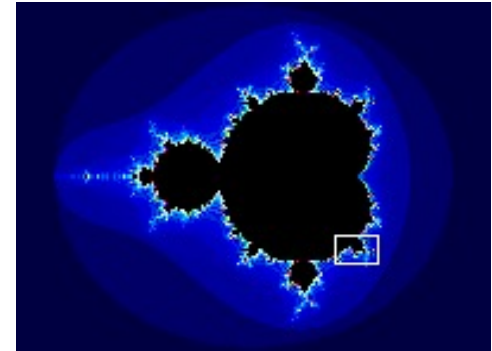
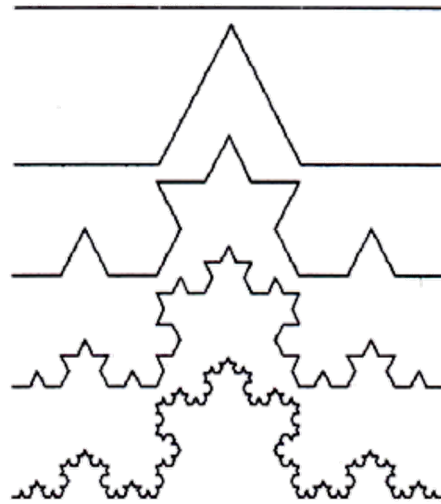
$$\begin{aligned}x' &= 10(y - x) \\y' &= -xz + 13x - y \\z' &= xy - (8/3)z\end{aligned}$$

dim=2,06

Autosimilarità e Attrattori : il Pendolo Caotico



**Ma esiste
una 'firma'
matematica
dell'autosimilarità
e dell'invarianza
di scala?**



PICCOLA DIGRESSIONE STATISTICA...

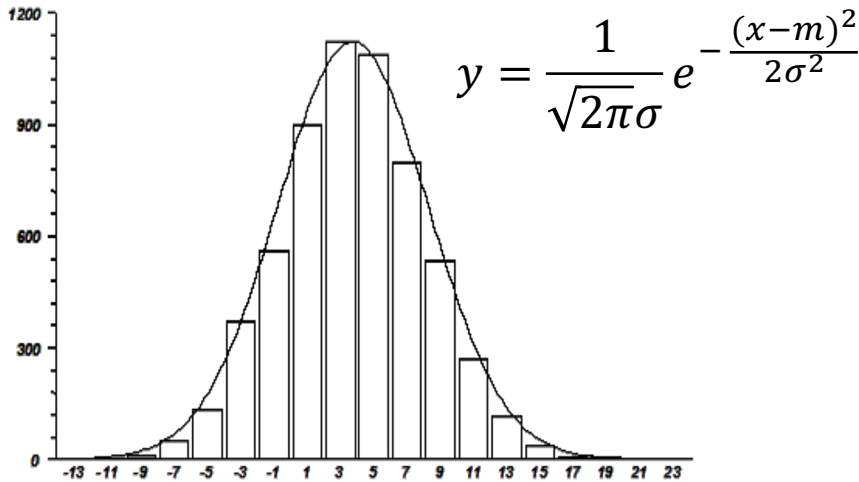
Qual'è la forma della distribuzione dell'altezza o del peso in una popolazione?



Qual'è la forma della distribuzione della ricchezza in una popolazione?

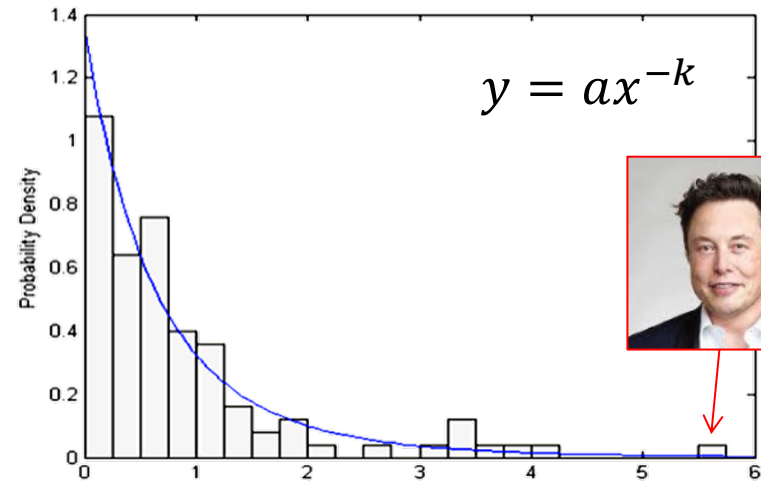


La curva Gaussiana



Esiste una dimensione tipica
(la «media» m)

La legge di potenza



NON esiste una dimensione tipica
(invarianza di scala)

PICCOLA DIGRESSIONE STATISTICA...

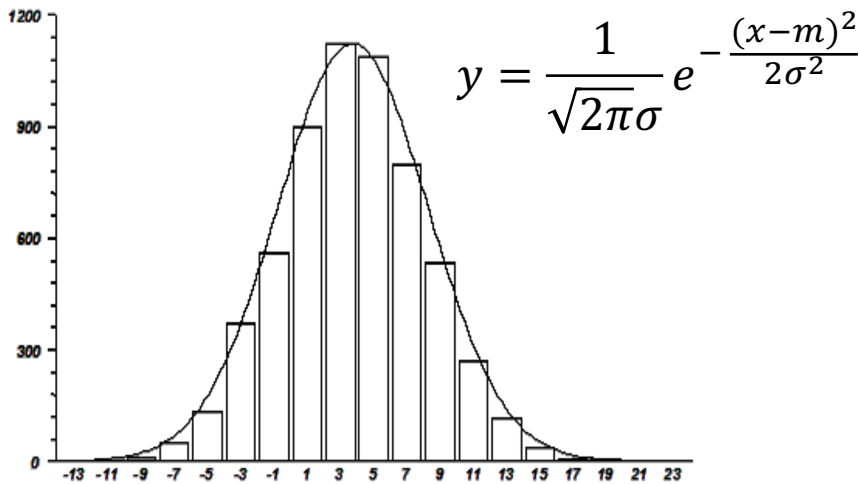
Qual'è la forma della distribuzione dell'altezza o del peso in una popolazione?



Qual'è la forma della distribuzione della ricchezza in una popolazione?

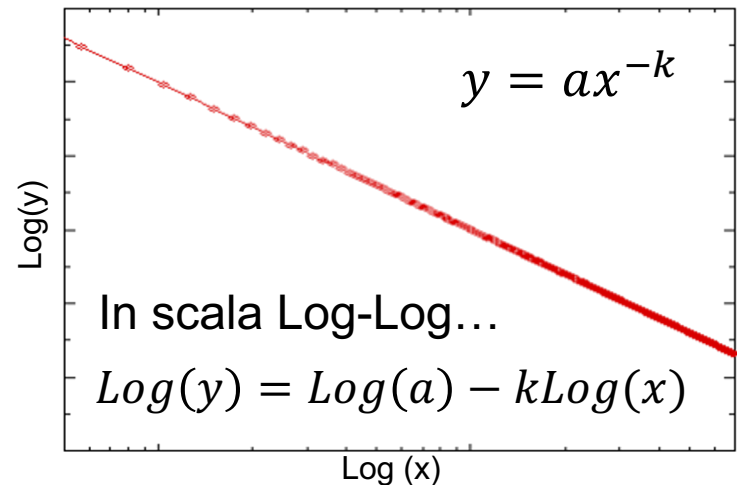


La curva Gaussiana



Esiste una dimensione tipica
(la «media» m)

La legge di potenza



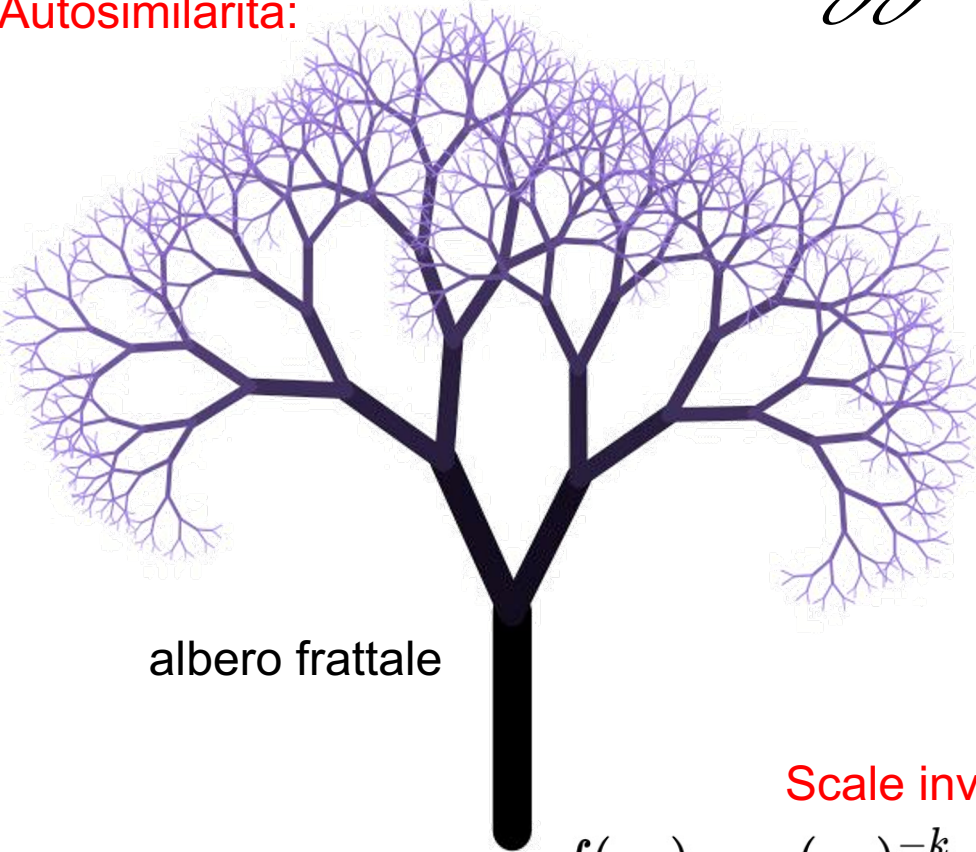
NON esiste una dimensione tipica
(invarianza di scala)

La 'firma' matematica dell'autosimilarità e della invarianza di scala è la:

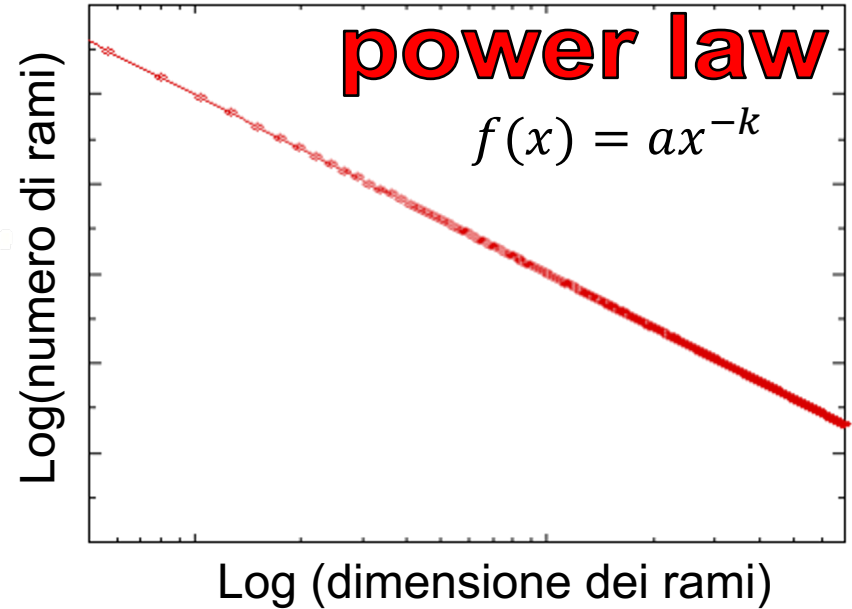
Legge di Potenza



Autosimilarità:



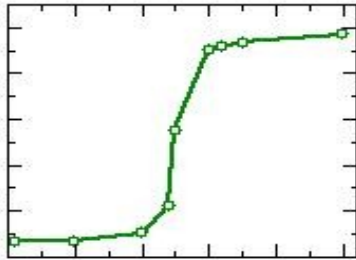
albero frattale



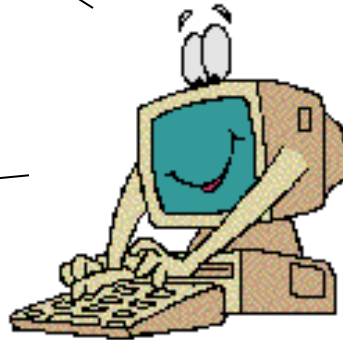
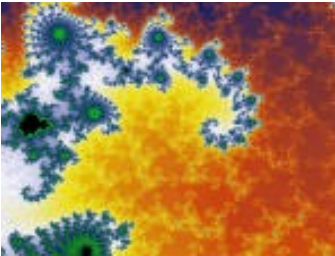
Scale invariance:

$$f(cx) = a(cx)^{-k} = c^{-k} f(x) \propto f(x)$$

Non linearità e Soglie Critiche



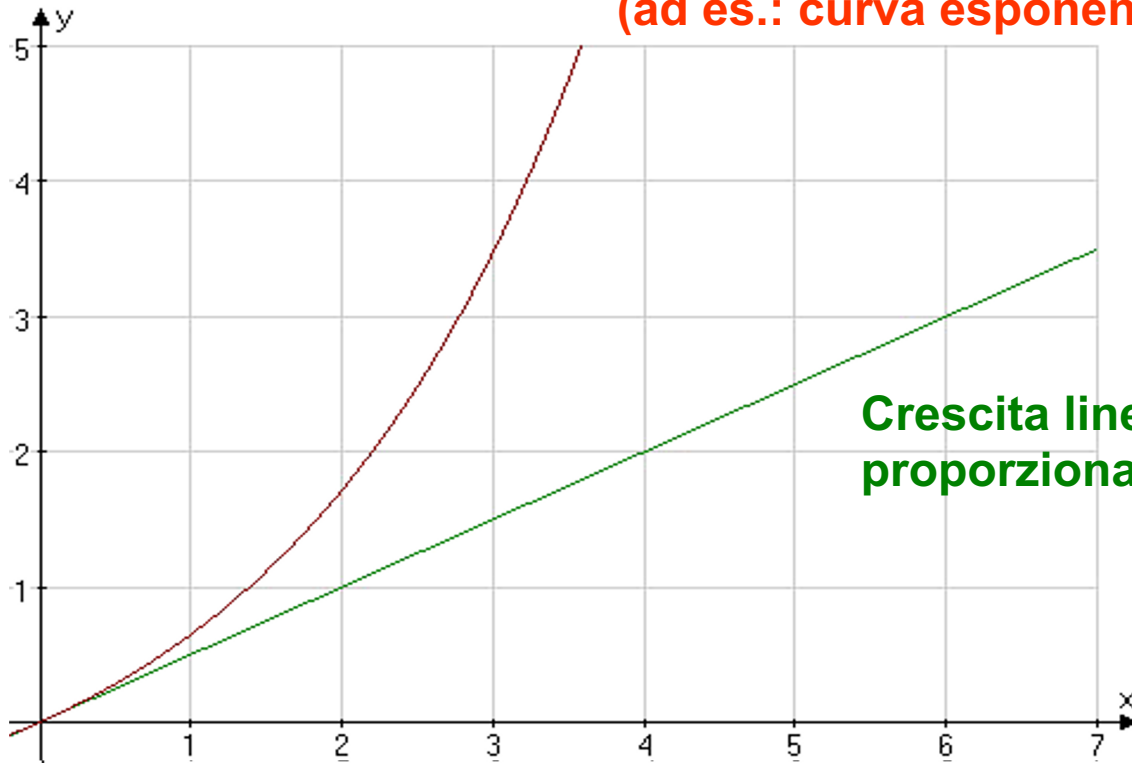
Autosimilarità e Invarianza di Scala



**Proprietà tipiche
dei sistemi complessi**

Non linearità

Crescita non-lineare: l'effetto y non è più proporzionale alla causa x (ad es.: curva esponenziale)



Crescita lineare: l'effetto y è proporzionale alla causa x

Crescita Esponenziale: esempio 1

Domanda1: se si potesse piegare un **normale foglio di carta** (spesso circa 0.15mm) in due, poi di nuovo in due, e così via per **50 volte**, quale sarebbe lo **spessore finale** del foglio?



Risposta lineare: lo spessore di un elenco telefonico o al massimo l'altezza di un frigorifero

Risposta non-lineare: più della distanza tra la Terra e il Sole!!!

Infatti: $(0.15\text{mm}) \times 2 \times 2 \times 2 \dots \times 2 (50 \text{ volte})$
 $= 0.15\text{mm} \times 2^{50} = 169.000.000 \text{ Km}$



Crescita Esponenziale: esempio 2

$t = 0$



$t = 1 \text{ ora}$



Domanda2: al tempo $t=0$ in un barattolo ci sono solo **due pulci** che però **raddoppiano** di numero ogni secondo; se le pulci impiegano 1 ora esatta per riempire completamente il barattolo, quanto tempo impiegheranno a **riempirlo per metà?**



Risposta lineare:

mezz'ora

Risposta non-lineare:

59 minuti e 59 secondi!

Crescita Esponenziale: esempio 3

CORRIERE DELLA SERA / LAVORO

I MODELLI SULL'EPIDEMIA

Coronavirus a 12.462 contagi, l'analisi del fisico: «Crescita esponenziale che non si ferma»

Secondo il fisico Daniele Teresi dell'Università di Sestili, la crescita esponenziale dei contagiati. Per questo, se la crescita di 1,25 continuasse, lunedì i contagiati sarebbero...

Covid, Sebastiani (Cnr): “Contagi in una fase di aumento esponenziale, più che a ottobre. Situazione identica per le terapie intensive”

SOSTIENICI

il Fatto
Quotidiano.it

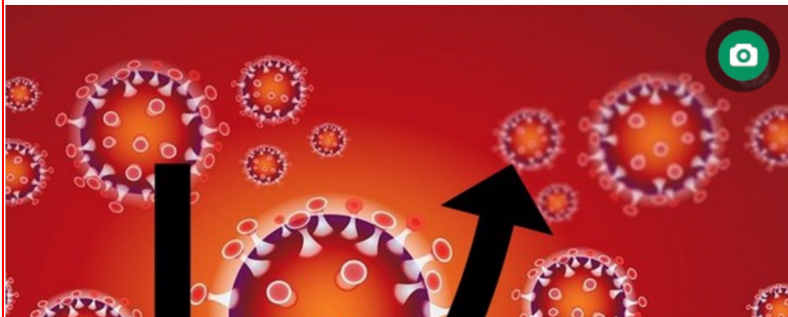
Covid, perché la curva epidemica è esponenziale

Sestili, lo indicano i tempi di raddoppio



Enrica Battifoglia 20 ottobre 2020 16:06

Scrivi alla redazione



informazione pubblicitaria

Connetti la tua
con la Fibra e di

29,90€/mese

SCOPRI DI PIÙ



Crescita Esponenziale: esempio 3

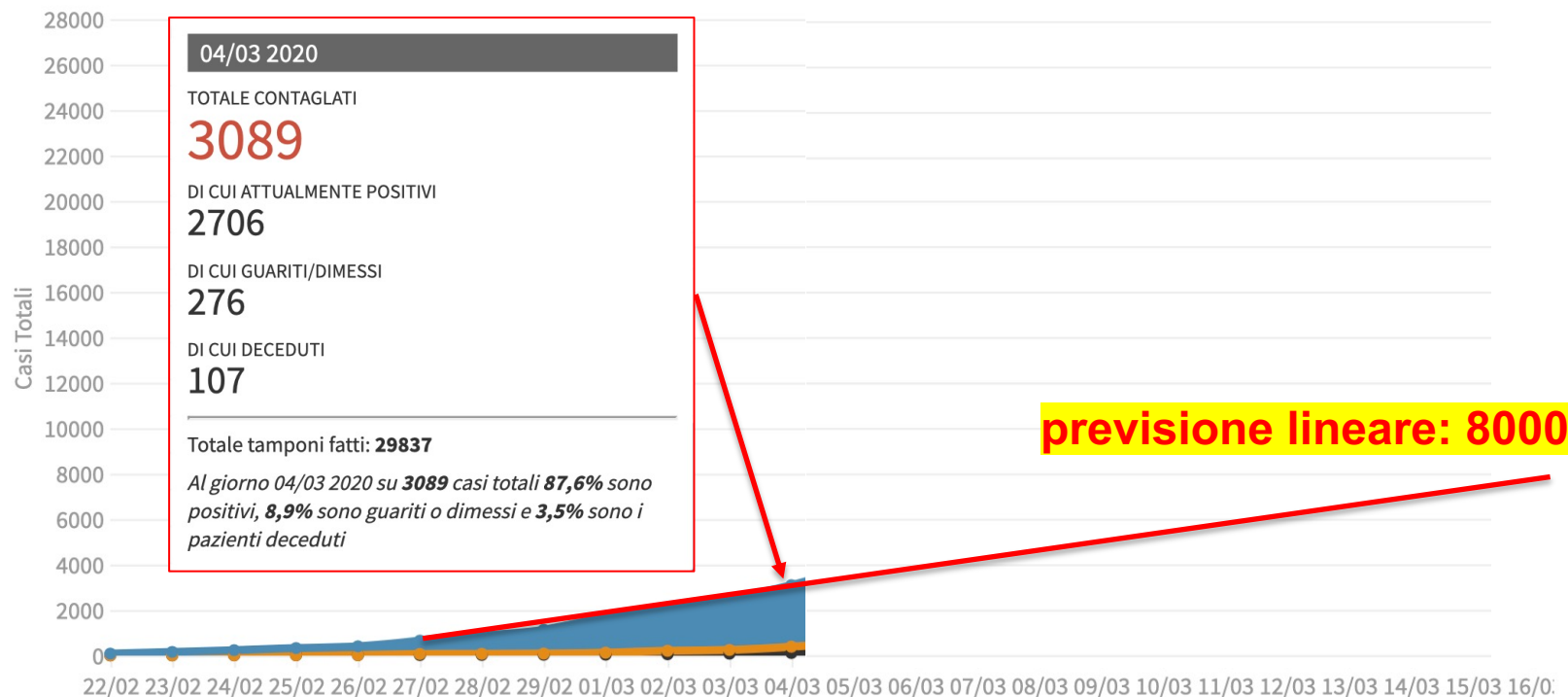
COVID-19 IN ITALIA: INIZIO DELLA PRIMA ONDATA 2020

I numeri complessivi

Dati del ministero della Salute, aggiornati alle 18.20 del 16 marzo 2020

Seleziona un dato solo

Deceduti Guariti/Dimessi Attualmente positivi



Crescita Esponenziale: esempio 3

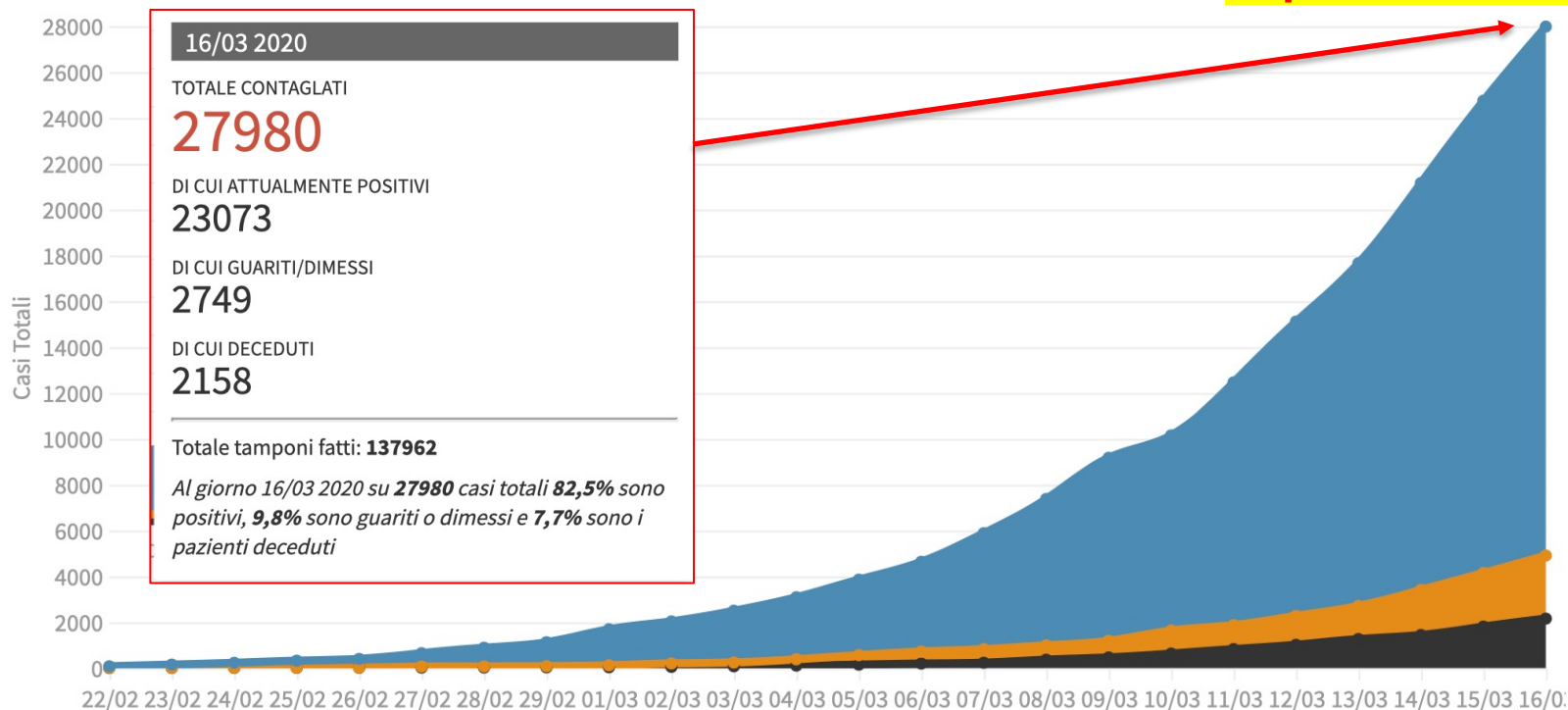
COVID-19 IN ITALIA: INIZIO DELLA PRIMA ONDATA 2020

I numeri complessivi

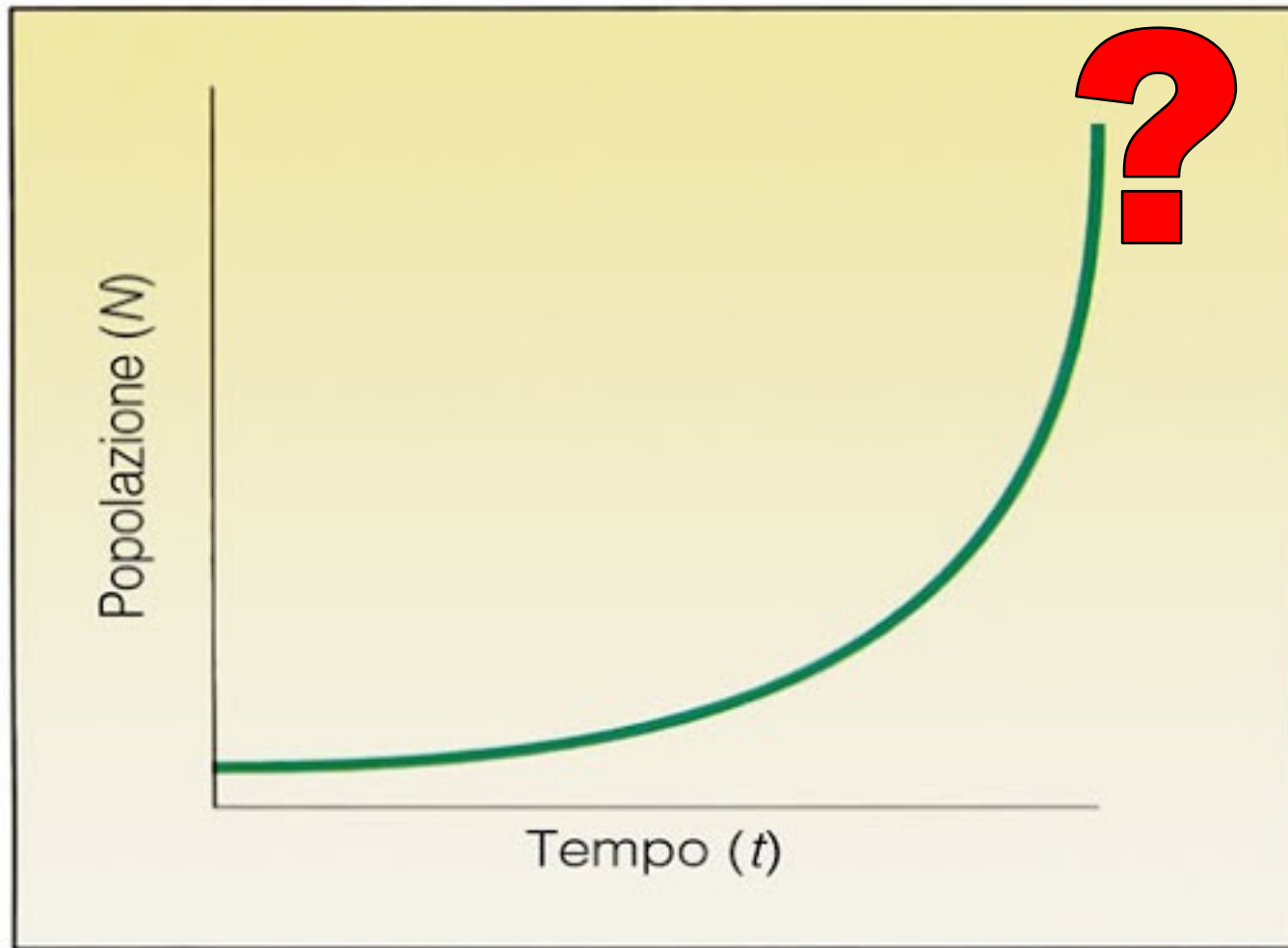
Dati del ministero della Salute, aggiornati alle 18.20 del 16 marzo 2020

Seleziona un dato solo

Deceduti Guariti/Dimessi Attualmente positivi



Ma... una Crescita Esponenziale può proseguire illimitatamente?



Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

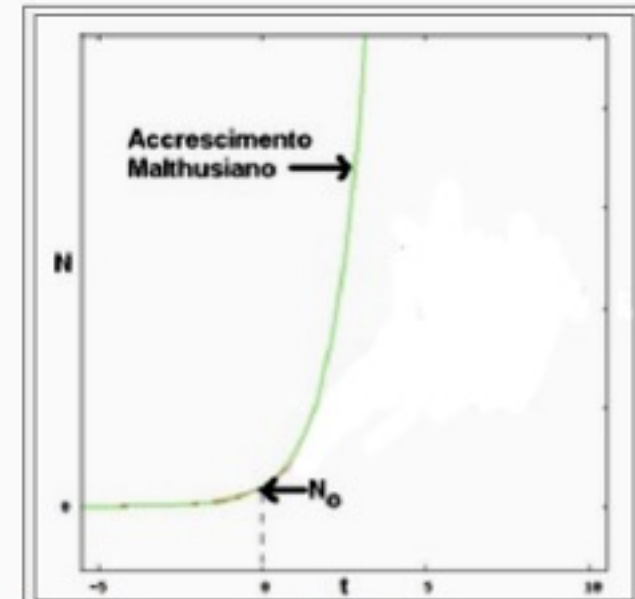
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo a 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .



Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale (malthusiano). I parametri sono:
 $k = 10, N_0 = 1, r = 1$

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo a 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .

Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente r che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è $r(t) = a - bN(t)$ con a e b costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t)$$

che può essere posta nella forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

con $K = \frac{a}{b}$ che è la cosiddetta popolazione massima sostenibile ed è uguale al parametro di crescita malthusiana.

Questa è l'equazione logistica di Verhulst.

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{b}{a - bN} \right) dN(t) = \int dt$$

risolvendo gli integrali, scegliendo come primitive quelle tali che $N(t_0) = N_0$ e utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene la soluzione:

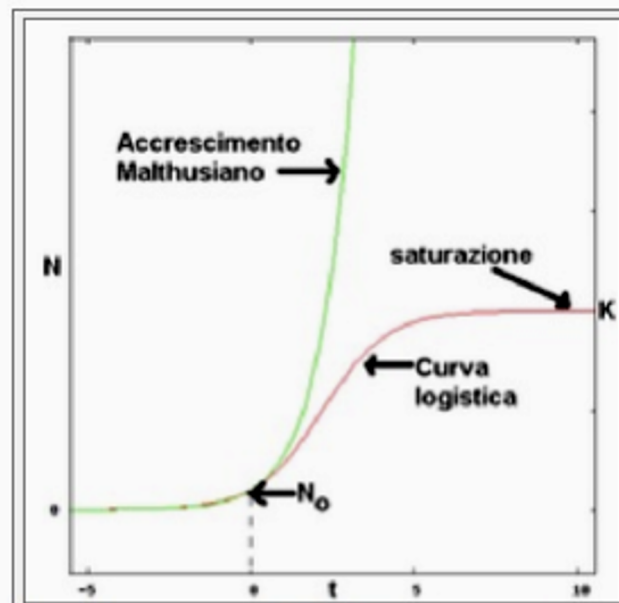
$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right)e^{-a(t-t_0)}}$$

Si nota che a causa del sovraffollamento la popolazione non cresce più in maniera esponenziale ma converge al valore asintotico k indipendentemente da N_0 .

Mappa Logistica!

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

$K = \text{capacità di carico}$

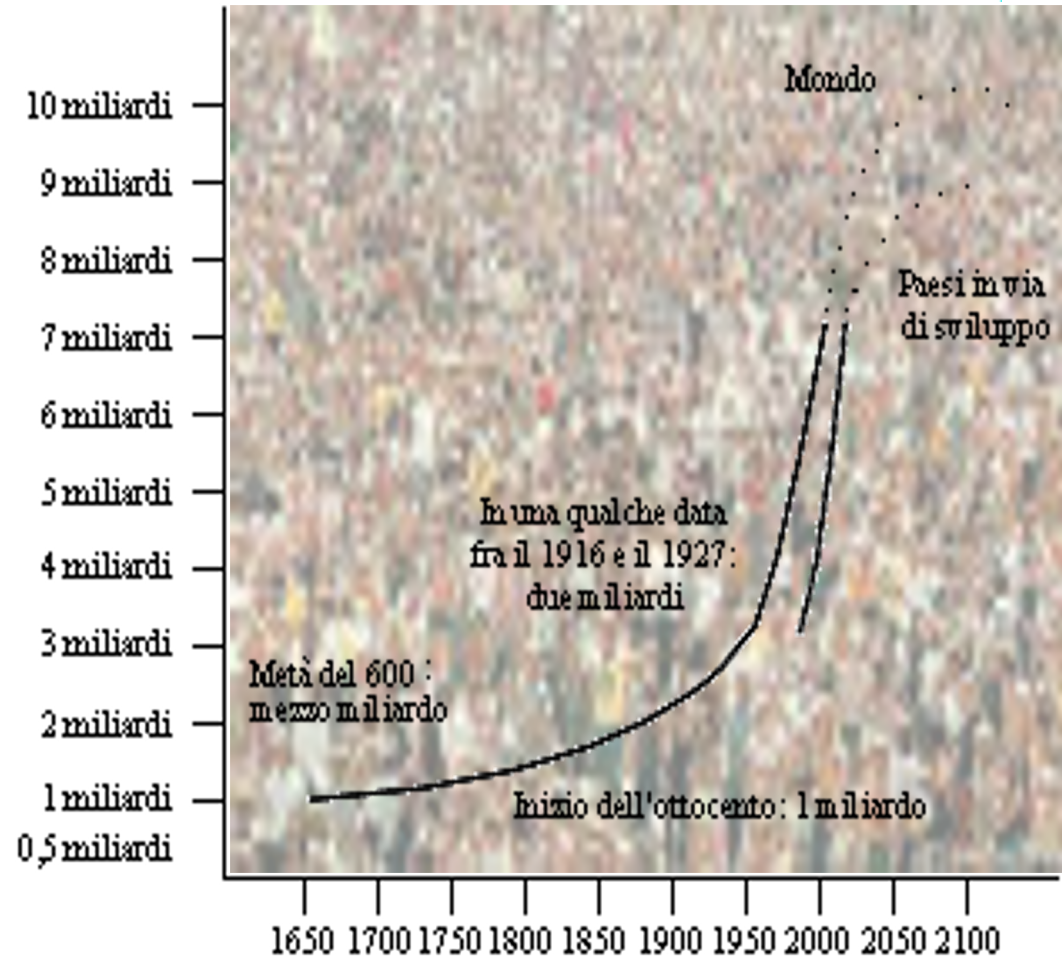


Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale (malthusiano). I parametri sono: $k = 10, N_0 = 1, r = 1$

Crescita esponenziale della popolazione terrestre

Se non l'abbiamo già superata, ci stiamo sicuramente avvicinando alla capacità di carico del nostro pianeta...

8.095.214.516 Popolazione mondiale attuale

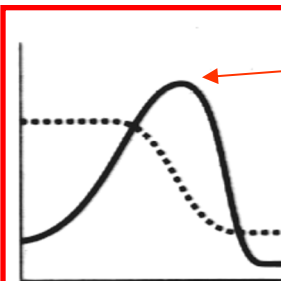
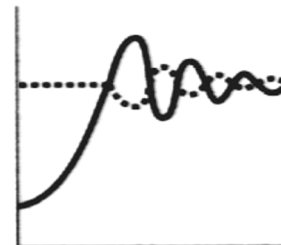
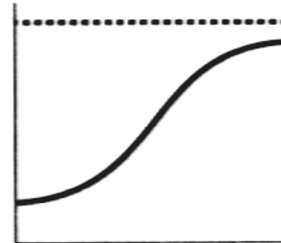


<https://www.worldometers.info/it/>

Oltre i limiti dello sviluppo: ci avviciniamo ad un punto critico?

Quattro possibili modi di avvicinamento della popolazione mondiale alla capacità di carico del pianeta

(simulazioni "Mondo 3" - MIT e Club di Roma)



MALTHUS

- Si ha crescita continua se*
- i limiti fisici sono molto lontani;
 - oppure*
 - i limiti fisici crescono anch'essi con andamento esponenziale.

VERHULST

- Si ha crescita sigmoide se*
- i segnali provenienti dai limiti fisici sono precisi, istantanei e hanno risposte immediate;
 - oppure*
 - la popolazione o l'economia si limitano senza bisogno di segnali dall'esterno.

Si ha superamento e oscillazioni se

- i segnali o le risposte sono ritardati;
- oppure*
- i limiti non possono essere erosi o sono in grado di recuperare presto gli effetti dell'erosione.

PUNTO CRITICO?

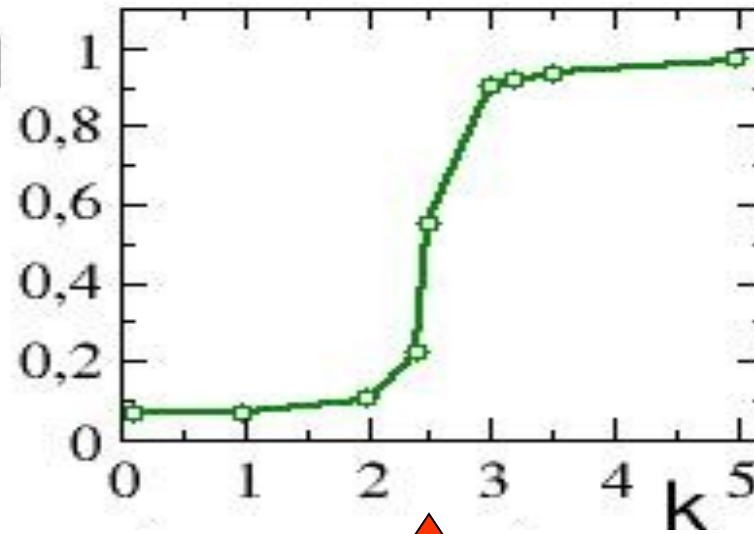
- Si ha superamento e collasso se*
- i segnali o le risposte sono ritardati;
 - oppure*
 - i limiti possono essere erosi (subire una degradazione irreversibile quando vengono superati)

Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

parametro
d'ordine

→ M



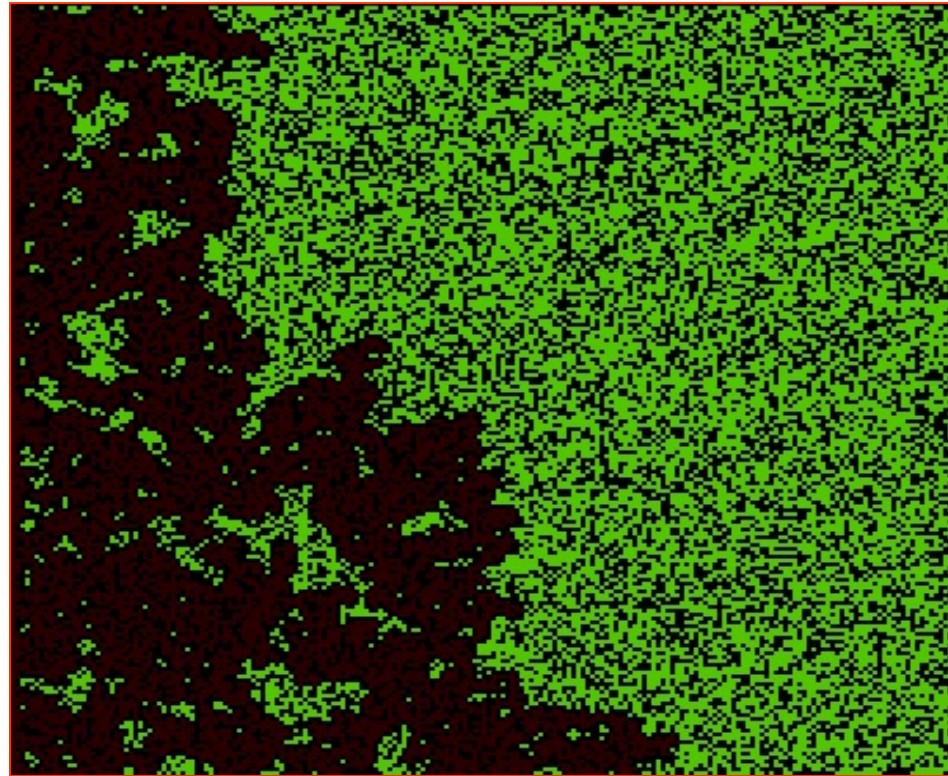
← parametro di
controllo



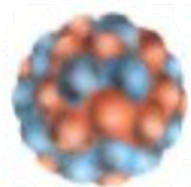
La teoria delle
Catastrofi

↑
Punto Critico

Soglie critiche nella propagazione degli incendi



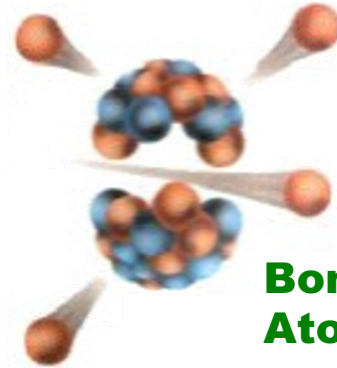
Soglie critiche in Fisica



Uranio



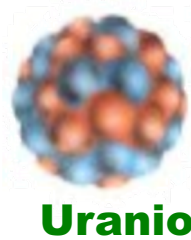
**MASSA
CRITICA**



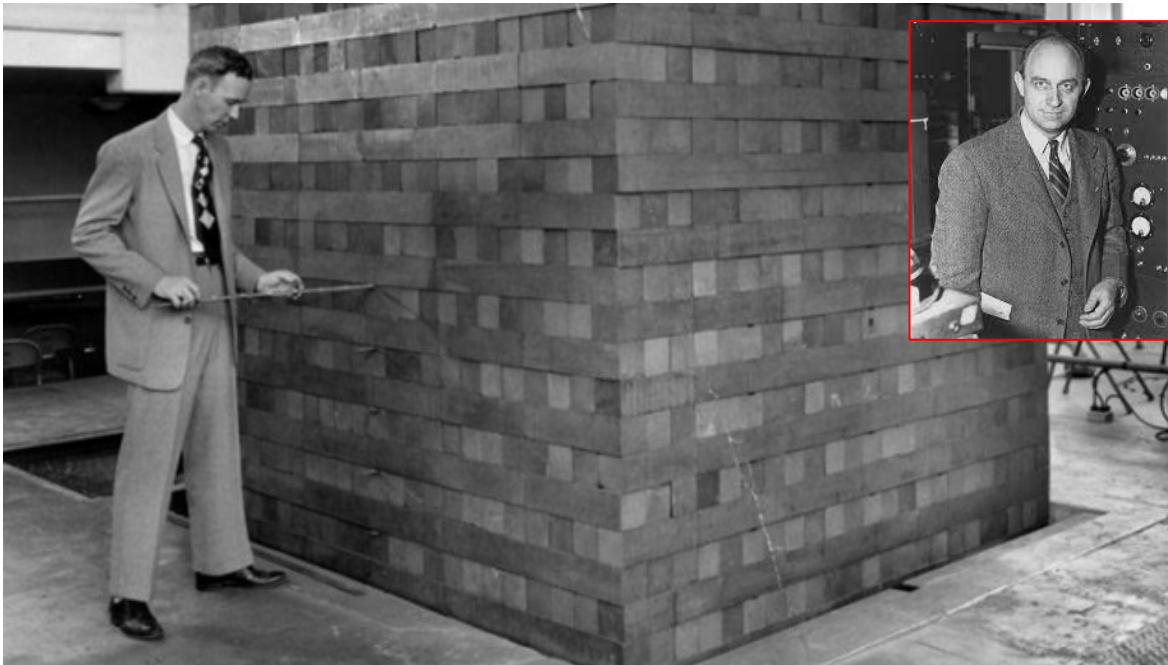
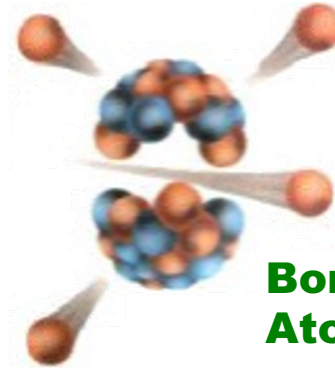
**Bomba
Atomica**



Soglie critiche in Fisica



**MASSA
CRITICA**



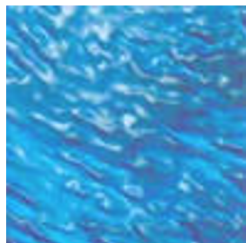
Il 2 dicembre 1942 gli Stati Uniti annunciavano: *"Il navigatore italiano è sbarcato nel nuovo mondo"*. Quell'espressione in codice indicava che **Enrico Fermi** e i suoi collaboratori dell'Università di Chicago erano riusciti ad accendere la **prima "pila" atomica**: si chiamava "Chicago Pile-1" e aveva prodotto la prima reazione nucleare a catena autoalimentata e controllata della storia. Era l'**alba dell'era atomica**.

Il **primo reattore nucleare della storia** era stato costruito in segreto sotto le tribune di un campo sportivo abbandonato dell'Università di Chicago. **Fermi** lo descrisse come *"una pila grezza di mattoni neri e travi in legno"*. La pila era formata da un nocciolo di uranio e blocchi di grafite, con barre di sicurezza in cadmio che servivano a controllare la reazione a catena, per evitare che divenisse esplosiva.

Soglie critiche in Fisica

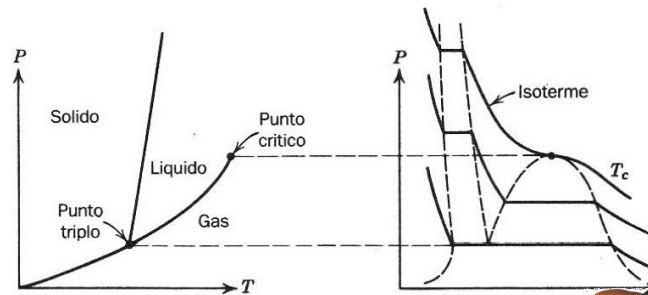


Ghiaccio

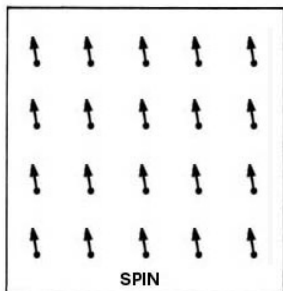


Acqua

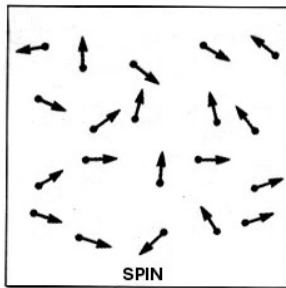
TEMPERATURA CRITICA



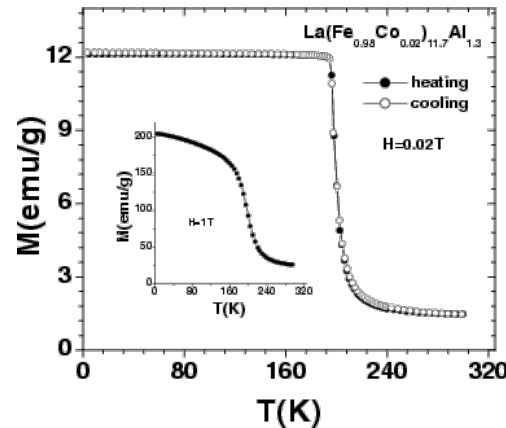
La Legge di Potenza



Magnete ordinato

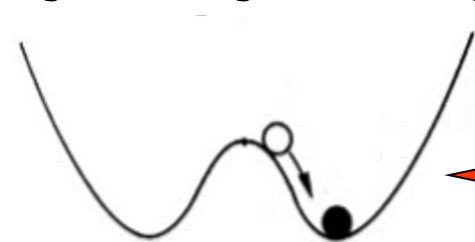


Magnete disordinato

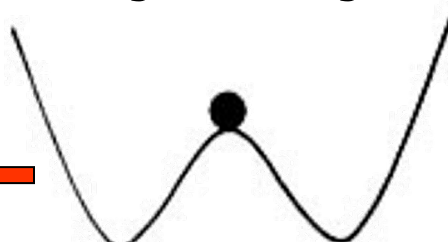


Symmetry breaking

Symmetry



Spin up



Spin down Spin up

Soglie critiche nella Scienza delle Costruzioni

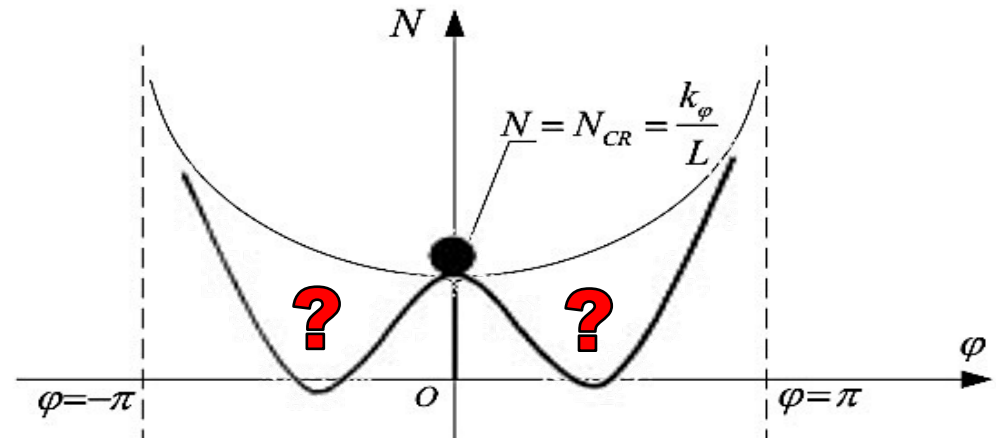
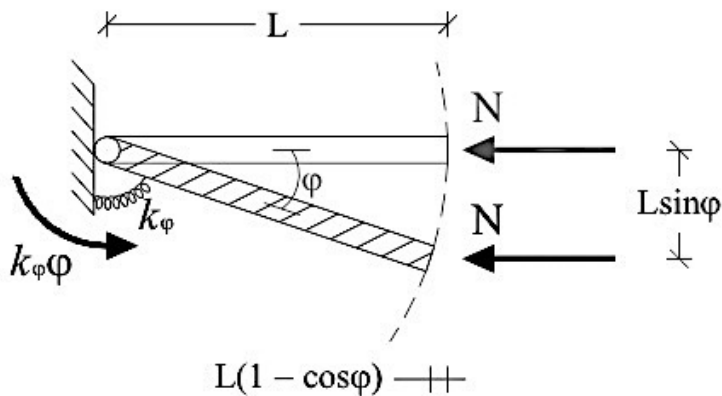


L'instabilità dell'equilibrio nelle strutture elastiche si verifica quando gli effetti instabilizzanti provocati dalle forze esterne prevalgono sulle reazioni elastiche stabilizzanti. Il carico che provoca il bilanciamento dei due suddetti effetti viene definito **CARICO CRITICO**. A partire da tale valore, si ha la perdita dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico:

momento instabilizzante indotto dalla forza N

$$NL \sin \varphi = k_{\varphi} \varphi$$

reazione elastica della molla



Soglie critiche nella Scienza delle Costruzioni

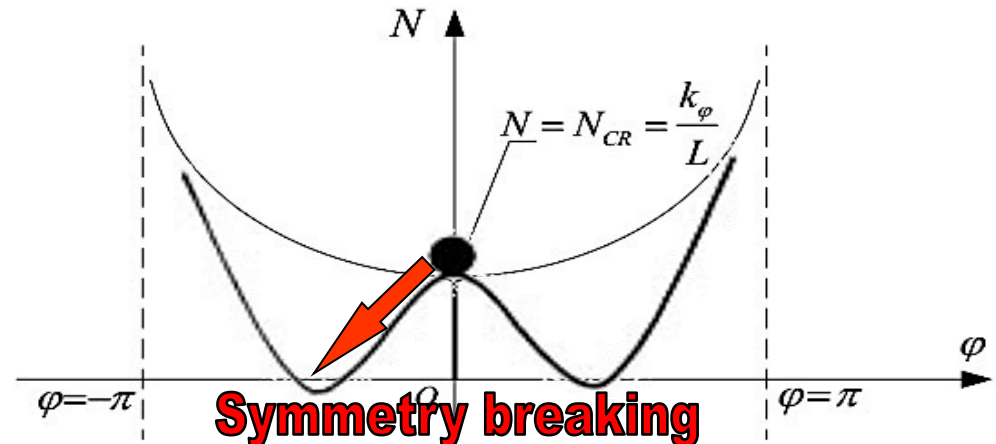
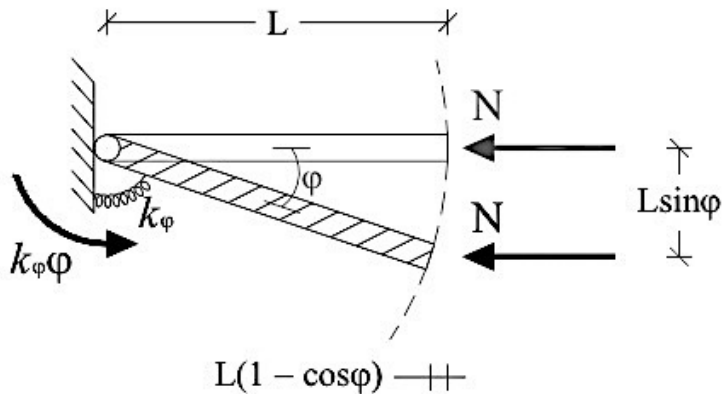


L'instabilità dell'equilibrio nelle strutture elastiche si verifica quando gli effetti instabilizzanti provocati dalle forze esterne prevalgono sulle reazioni elastiche stabilizzanti. Il carico che provoca il bilanciamento dei due suddetti effetti viene definito **CARICO CRITICO**. A partire da tale valore, si ha la perdita dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico:

momento instabilizzante indotto dalla forza N

$$NL \sin \varphi = k_{\varphi} \varphi$$

reazione elastica della molla



Soglie critiche nella Fisica delle Alte Energie

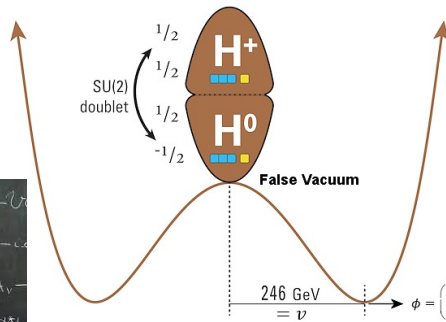
The Standard Model of Particle Physics

Spin 0
(Higgs Boson)

Hypercharge $\rightarrow Y$
Weak Isospin $\rightarrow T_3$
Gauge boson coupling

mass (GeV)
H
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

$$V(\phi) = -\frac{m^2|\phi|^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4!}$$



(a) Unbroken Symmetry (Symmetric phase)

(b) Broken Symmetry (Higgs phase/condensate)

Spin 1/2
(Fermions)

Generation
Hypercharge (L) $\rightarrow Y$ Hypercharge (R) $\leftarrow Y$
Weak Isospin (L) $\rightarrow T_3$ Weak Isospin (R) $\leftarrow T_3$
Gauge boson coupling

mass (GeV)
flavor
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

	1st	2nd	3rd	
Quarks	$1/6$	0	0	$2/3$
	$1/2$	0	0	0
	$1/6$	0	0	$-1/3$
	$-1/2$	0	0	0
Leptons	$-1/2$	0	0	0
	$1/2$	0	0	0
	$-1/2$	0	0	-1
	$-1/2$	0	0	0

10^{-12} sec after BB, ~ 100 GeV

Spin 1
(Gauge Bosons)

mass (GeV)
symbol
Fermion coupling

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

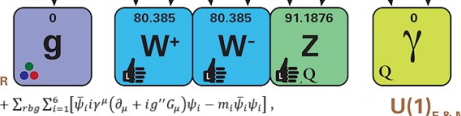
g : weak coupling constant
 g' : em coupling constant



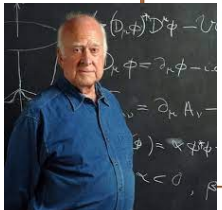
$$W^\pm = (W^1 \pm iW^2)/\sqrt{2}$$

$$Z = \cos \theta_W W^3 - \sin \theta_W B$$

$$\gamma = \sin \theta_W W^3 + \cos \theta_W B$$



$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{ab}^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{ab} + \sum_{r,b} \bar{\psi}_r \gamma^\mu (\partial_\mu + ig' G_\mu^a T_a + ig W_\mu^i T_i - m_r \psi_r) \psi_r - m_r \bar{\psi}_r \psi_r$,
where ψ_r is the quark field, r, b, g the color charges, while the gluon field
 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + ig' (G_\mu^a G_\nu^b - G_\nu^a G_\mu^b)$, the superscript "a" is the gluon index
from 1 to 8, g' the coupling constant, m_r the mass of the quarks.



Peter Higgs

	1st	2nd	3rd
$L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	0.0023	1.275	173.07
	$2/3$	$2/3$	$2/3$
$R \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R$ and $(d)_R$	0.0048	0.095	4.18
	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	m_1	M_1	M_2
	0	0	0
$R \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_R$	0.000511	0.105658	1.77682
	-1	-1	-1

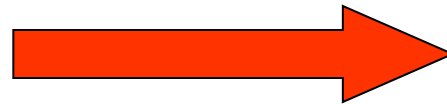
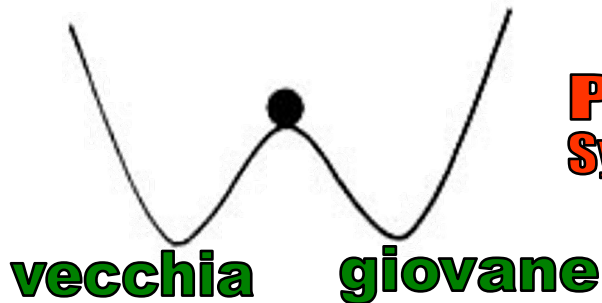
$\mathcal{S}_3 = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - M^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$ where $D_\mu \phi = [\partial_\mu - (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] \phi$, $\mathcal{S}_2 = i\bar{R}\gamma^\mu D_\mu R + i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L$ where $D_\mu R = (\partial_\mu + ig' B_\mu)R$, $D_\mu L = [\partial_\mu + (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] L$, $\mathcal{S}_1 = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ where $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

Soglie critiche nella Percezione



giovane o vecchia?

indecisione...



**Punto Critico
Symmetry Breaking!**



Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

U, D, T, Q, C, S, S ... ?
1 2 3 4 5 6 7



Punto Critico

LETTERE

PENSIERO VERTICALE

Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

U, D, T, Q, C, S, S, 0
1 2 3 4 5 6 7 8



LETTERE



NUMERI

PENSIERO VERTICALE

Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

U, D, T, Q, C, S, S, O
1 2 3 4 5 6 7 8

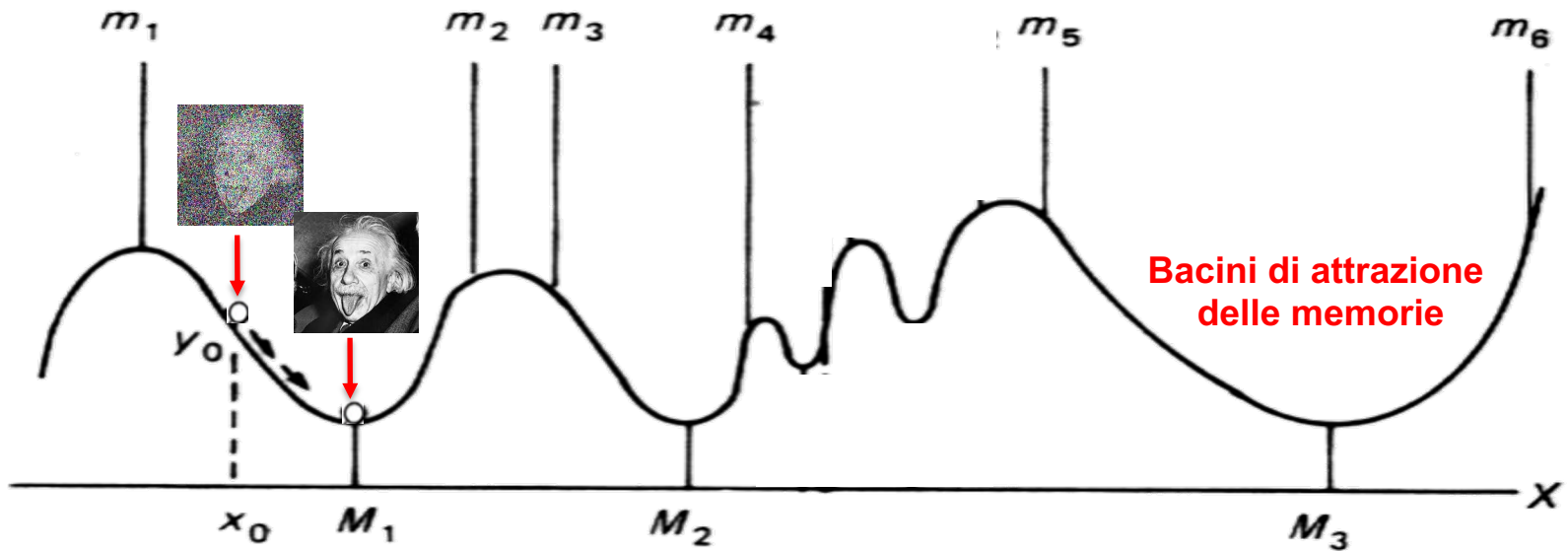


NUMERI

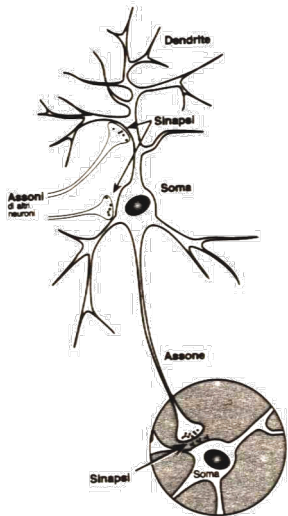
PENSIERO LATERALE

Reti Neurali e Vetri di Spin

Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



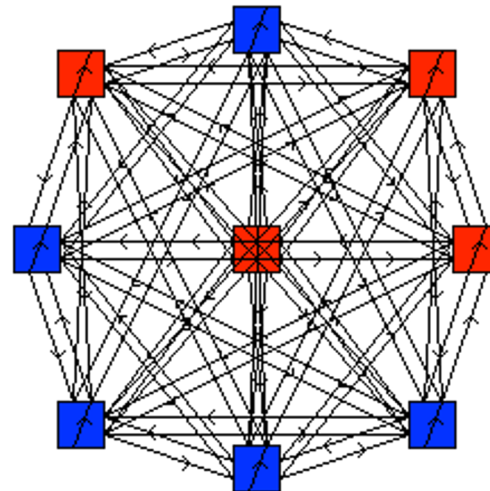
Neurone reale



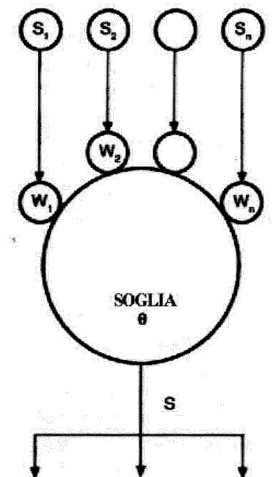
Cervello Umano



Rete Neurale (Hopfield)

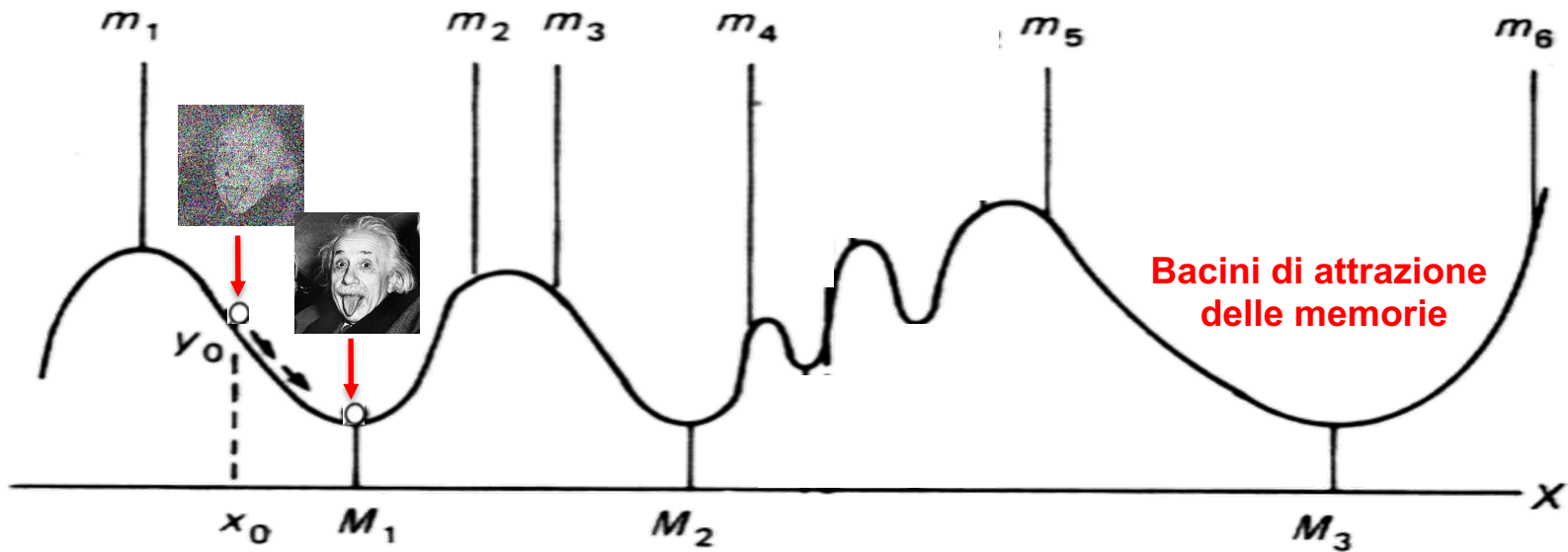


Neurone artificiale

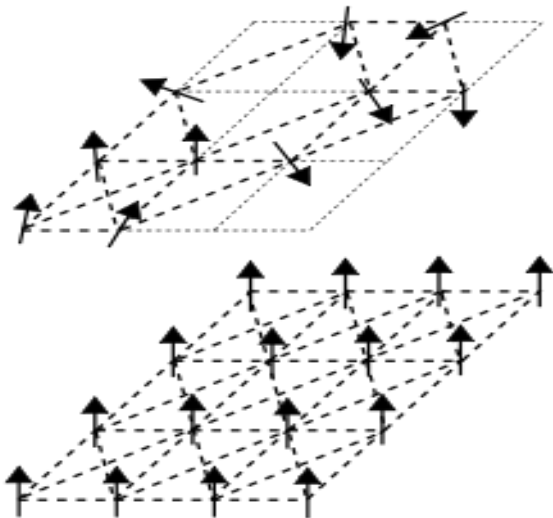


Reti Neurali e Vetri di Spin

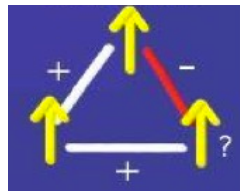
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



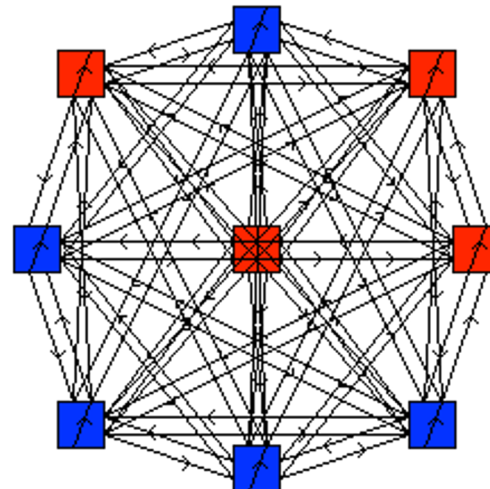
Vetri di Spin (Spin Glasses)



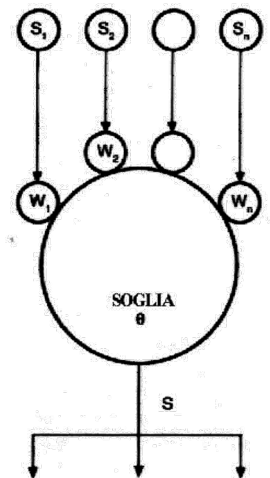
"frustrazione"



Rete Neurale (Hopfield)

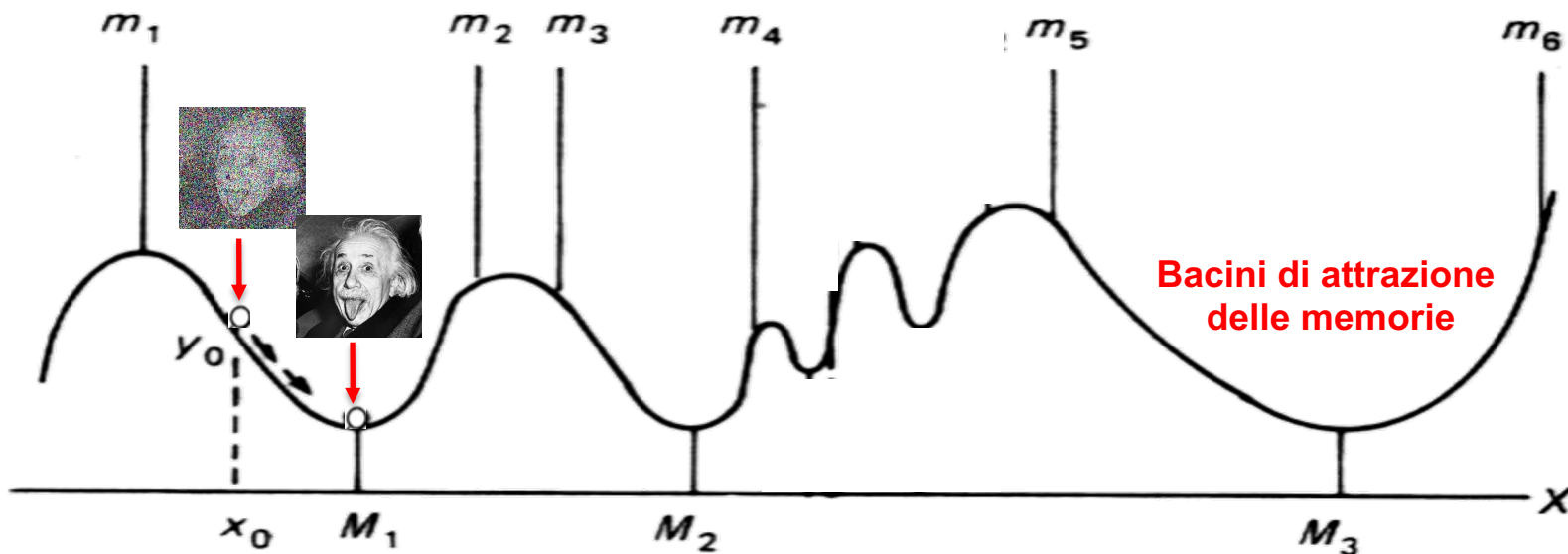


Neurone artificiale

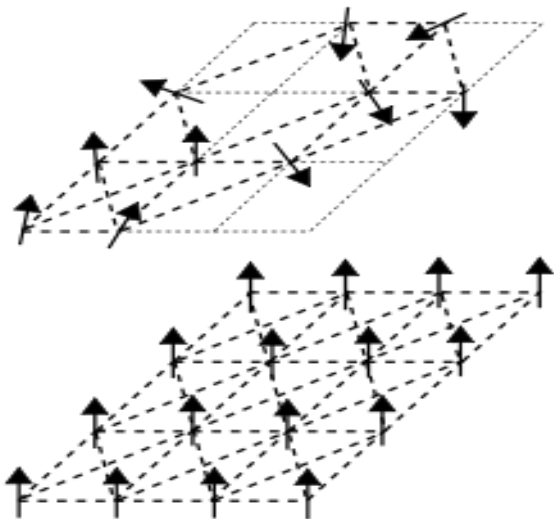


Reti Neurali e Vetri di Spin

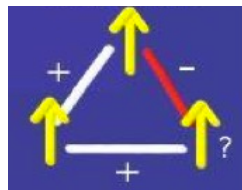
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



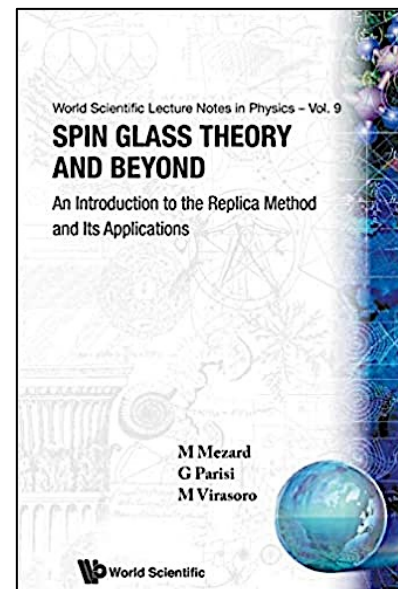
Vetri di Spin (Spin Glasses)



"frustrazione"



Giorgio Parisi
Nobel Fisica 2021





M. Granovetter

Soglie Critiche ed Effetto domino

Soglie di attivazione delle «risse»



Gruppo A



Soglia media di attivazione: 4,5

C'è l'elemento con soglia 0:
la rissa inizia!

Gruppo B



Soglia media di attivazione: 1

Nonostante vi sia una minore soglia di attivazione media rispetto al gruppo A, qui manca l'elemento con soglia 0, quindi la rissa non inizia!

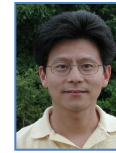
Gruppo A'



E' quasi identico al gruppo A, ma manca l'elemento con soglia 1: la rissa non inizia (sensibilità alle condizioni iniziali!)

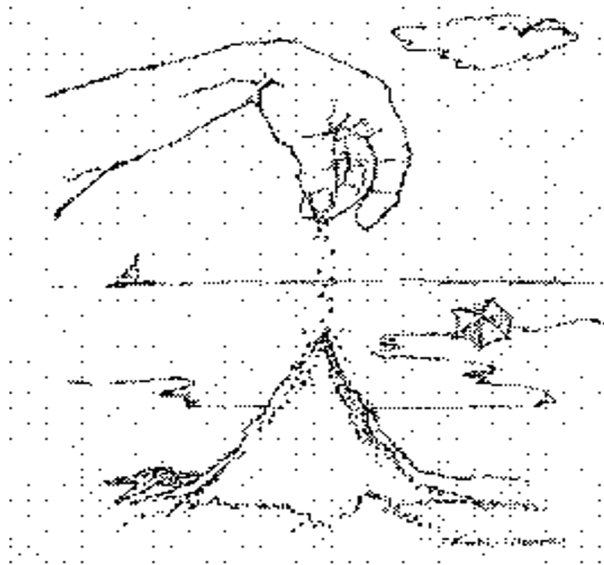


La Criticità Auto-organizzata



Nel 1987, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia (sandpile), tre ricercatori americani, Per Bak, Chao Tang e Kurt Weisenfeld scoprirono un importante meccanismo fisico generatore di complessità, noto come **“criticità auto-organizzata”**, il quale permette di capire come molti sistemi, apparentemente assai diversi tra loro, siano tutti riconducibili a un semplice modello matematico dotato della stessa logica di base ma anche di una stessa **“firma matematica”**

Sandpile Model

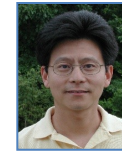


Valanghe reali



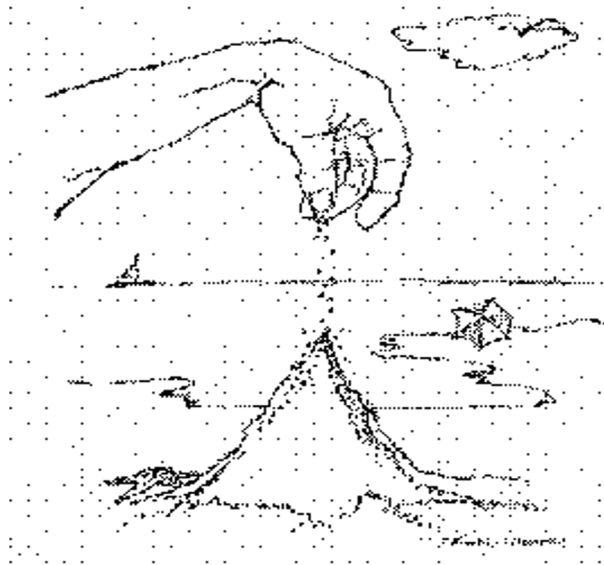
P.Bak, C.Tang and K.Weisenfeld, PRL 59 (1987)

La Criticità Auto-organizzata



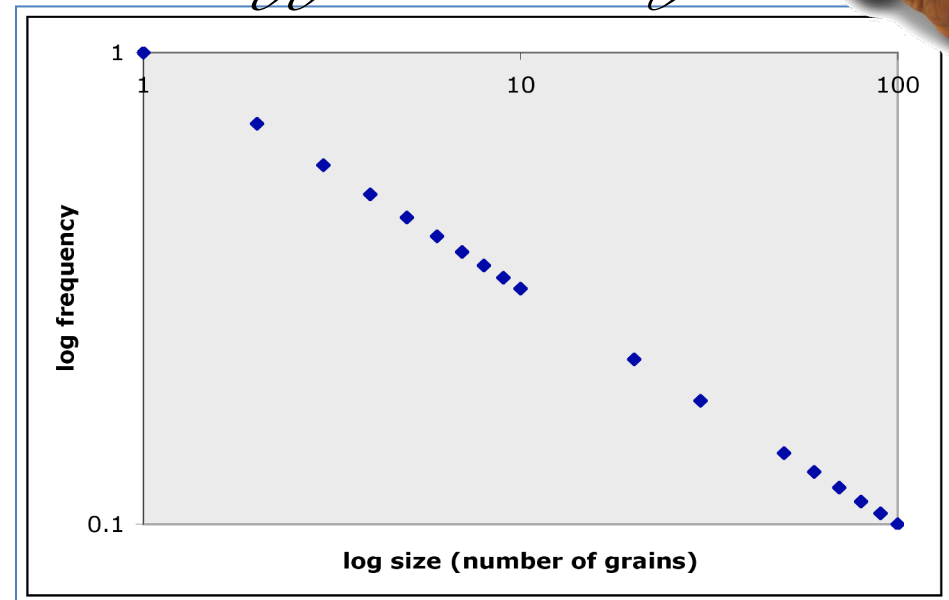
Nel 1987, studiando la **formazione delle “valanghe”** in un mucchietto di sabbia (sandpile), tre ricercatori americani, Per Bak, Chao Tang e Kurt Weisenfeld scoprirono un importante meccanismo fisico generatore di complessità, noto come **“criticità auto-organizzata”**, il quale permette di capire come molti sistemi, apparentemente assai diversi tra loro, siano tutti riconducibili a un semplice modello matematico dotato della stessa logica di base ma anche di una stessa **“firma matematica”**

Sandpile Model



P.Bak, C.Tang and K.Weisenfeld, PRL 59 (1987)

La Legge di Potenza



La Criticità Auto-organizzata e gli Incendi

SETUP START FIRE

number-of-repetitions: 500 n_events: 203

density-of-trees: 58 % percent burned: 17.9

number-of-firing-points: 1

percent-burned-histogram

Fire Size PDF

On size-pdf-view waiting-time: 0.000

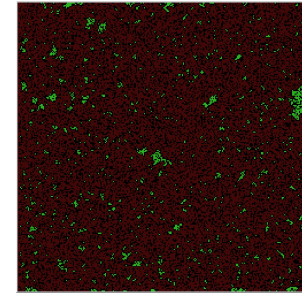
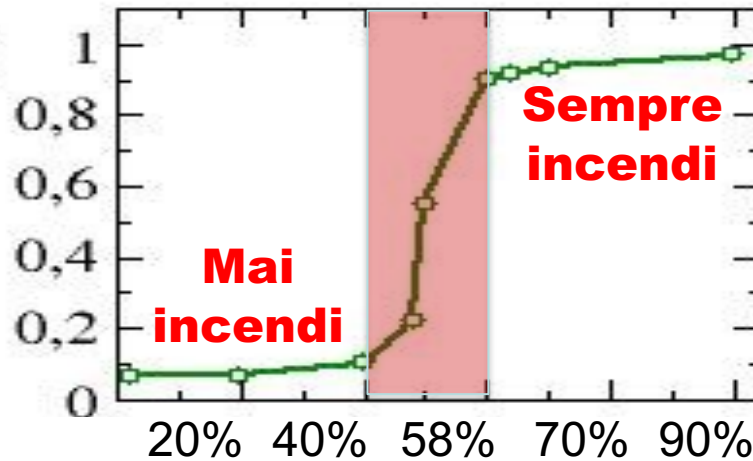
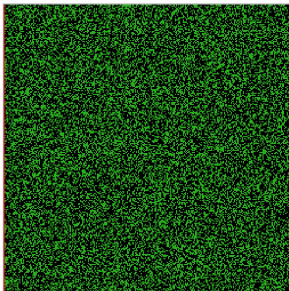
ticks: 437 3D

Dal «punto critico» allo «stato critico»

In questo modello di incendi in realtà abbiamo **regolato a mano il parametro di controllo** per portarci in prossimità del punto critico, dove il sistema non riesce a decidere «da che parte stare»...

parametro d'ordine

M



parametro di controllo

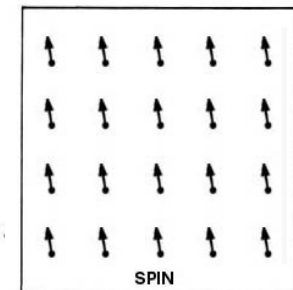
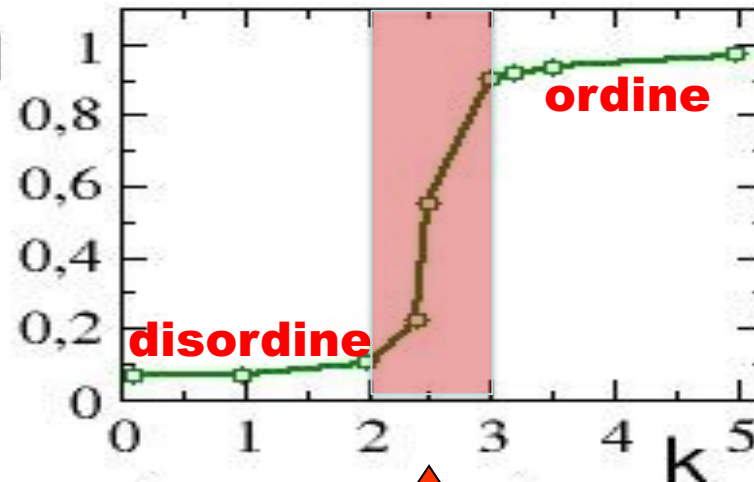
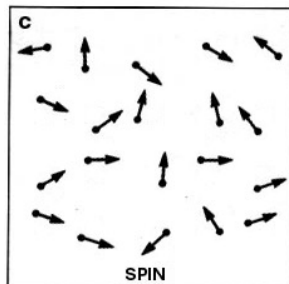
Punto Critico

Bisogna regolare il parametro di controllo per portare il sistema al punto critico

Dal «punto critico» allo «stato critico»

Negli incendi reali, così come negli altri sistemi soggetti alla **criticità autorganizzata**, non c'è bisogno di regolare a mano il parametro di controllo: essi si organizzano «**spontaneamente**» portandosi al confine tra ordine e disordine, in quello che possiamo chiamare «**stato critico**»!

parametro d'ordine \rightarrow M



parametro di controllo \leftarrow k

Stato Critico

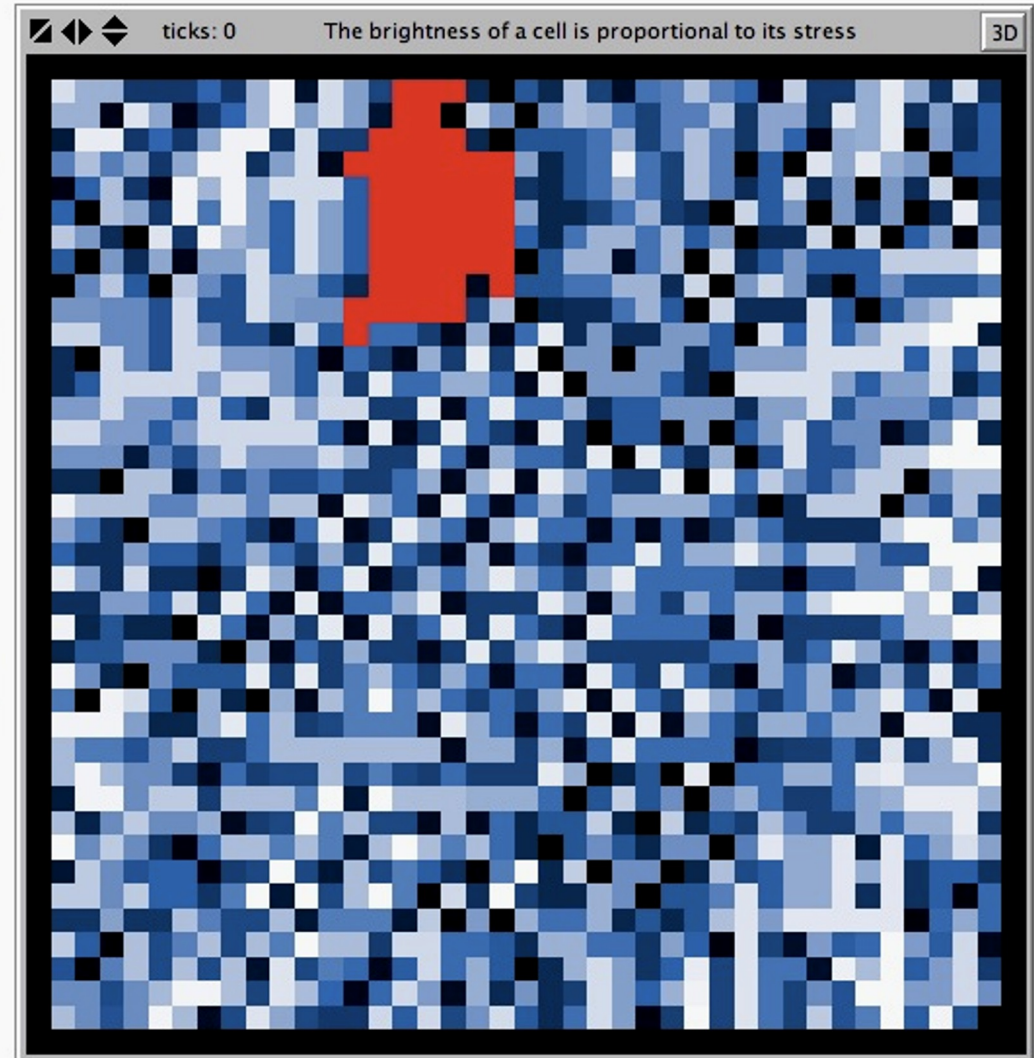
Il sistema si porta SPONTANEMENTE
nello stato critico

La Criticità Auto-organizzata e i Terremoti: il modello OFC

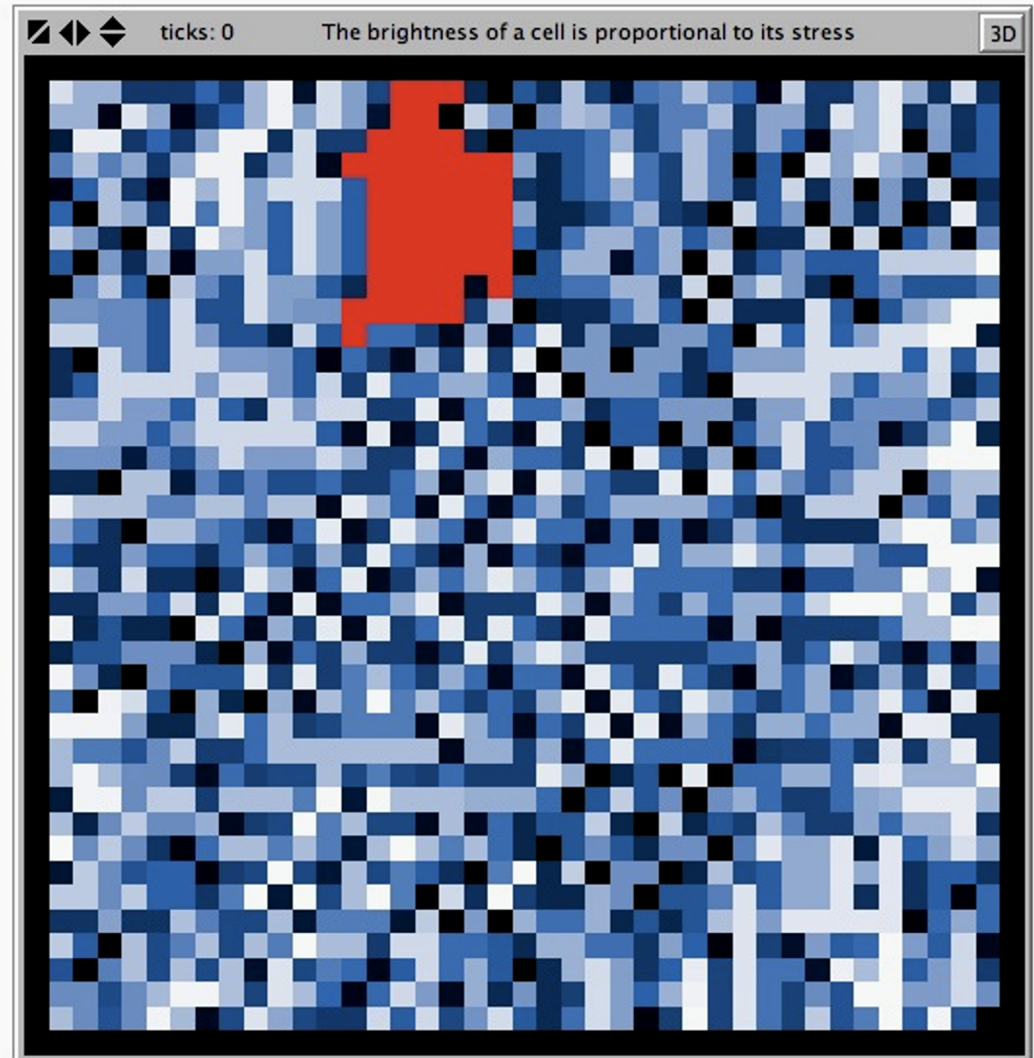
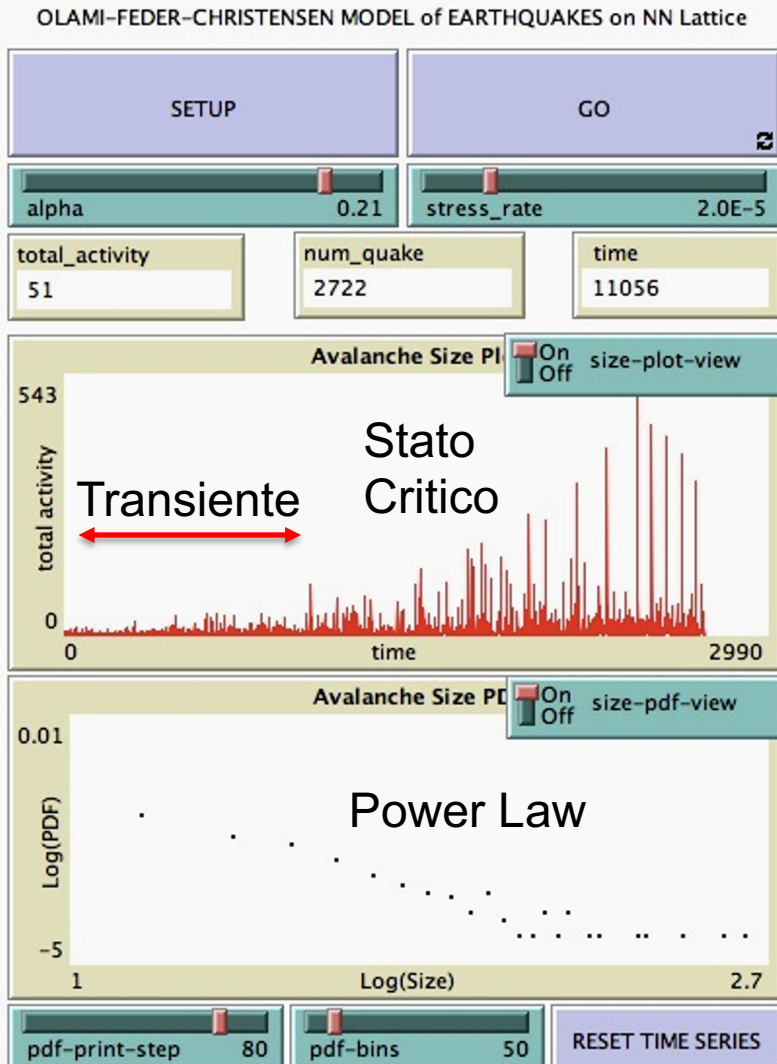
Nel **modello OFC** ogni celletta simula un blocco di crosta terrestre soggetto a uno **stress sismico** F_i (l'intensità del colore blu è proporzionale allo stress). Inizialmente lo stress su ogni celletta è distribuito casualmente, poi viene fatto **aumentare gradualmente in maniera uniforme** per simulare ad esempio uno spostamento di faglia. Appena lo stress su una certa celletta supera la **soglia critica** F_{th} (uguale per tutte le cellette) parte l'effetto domino: la celletta in questione (colorata in rosso) scarica tutto il suo stress sulle cellette vicine (a meno di un certo fattore di **dissipazione** regolato dal parametro α), che a loro volta, grazie a questo surplus di stress, potrebbero superare la soglia (diventando rosse) e scaricare sulle vicine, e così via, finchè non ci sono più celle che superano la soglia.

$$F_i \geq F_{th} \Rightarrow \begin{cases} F_i \rightarrow 0, \\ F_{nn} \rightarrow F_{nn} + \alpha F_i \end{cases}$$

Il **numero totale di celle rosse** alla fine dell'evento sismico rappresenta la sua «**size**», o dimensione, legata (nella realtà) all'energia rilasciata.



La Criticità Auto-organizzata e i Terremoti: il modello OFC





i terremoti

gli uragani



gli incendi

Le guerre



i crolli in Borsa

Le epidemie



"Stato Critico"

Si tratta di una situazione di estrema instabilità e intermittenza situata al **confine tra ordine e disordine**, molto sensibile alle condizioni iniziali e fortemente dipendente dalla storia passata del sistema, nella quale **cause anche molto piccole possono essere amplificate, per effetto domino, dalle "dita invisibili" formate dalle correlazioni che attraversano il sistema, fino a produrre effetti ("valanghe" o eventi estremi) di qualunque dimensione!**

