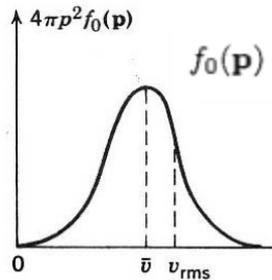
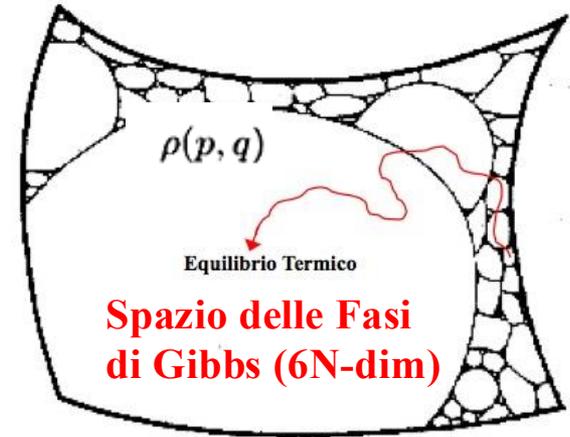
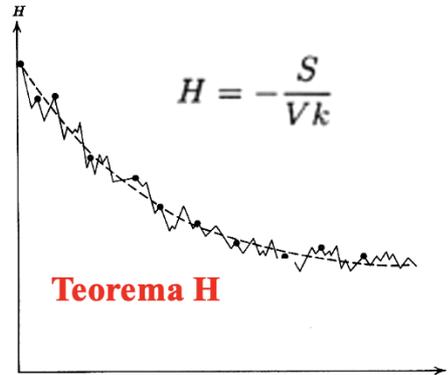
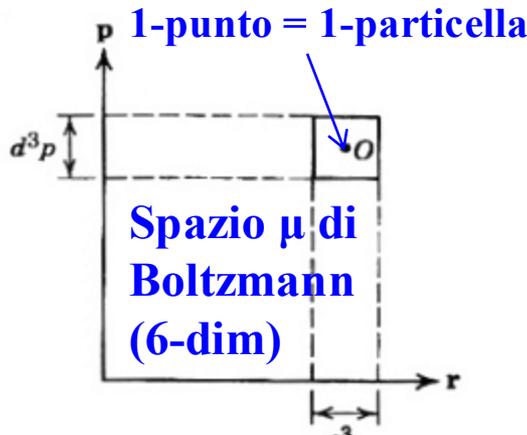
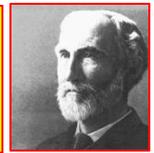


Parte 3: Sistemi Dinamici a molti gradi di libertà



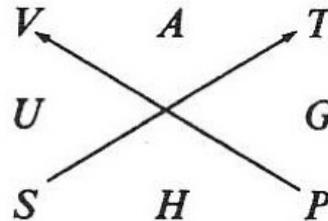


Riepilogo sulla Meccanica Statistica Classica di Boltzmann-Gibbs (BG)



$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2/2mkT}$$

Distribuzione di Maxwell-Boltzmann all'equilibrio



Media di Ensemble

$$\langle f \rangle \equiv \frac{\int d^{3N}p d^{3N}q f(p, q) \rho(p, q)}{\int d^{3N}p d^{3N}q \rho(p, q)}$$

Ensemble Canonico
(T, V, N fissati)

Ensemble Microcanonico
(E, V, N fissati; equiprobabilità dei microstati)

Funzione di Partizione:

$$Q_N(V, T) \equiv \int \frac{d^{3N}p d^{3N}q}{N! h^{3N}} e^{-\beta \mathcal{H}(p, q)}$$

Peso di Boltzmann:

$$\rho(p, q) = e^{-\mathcal{H}(p, q)/kT}$$

Energia Libera:

$$A(V, T) = -\beta^{-1} \log Q_N(V, T)$$

Entropia:

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$$

Funzione di Partizione: $\Gamma(E) \equiv \int_{E < \mathcal{H}(p, q) < E + \Delta} d^{3N}p d^{3N}q$

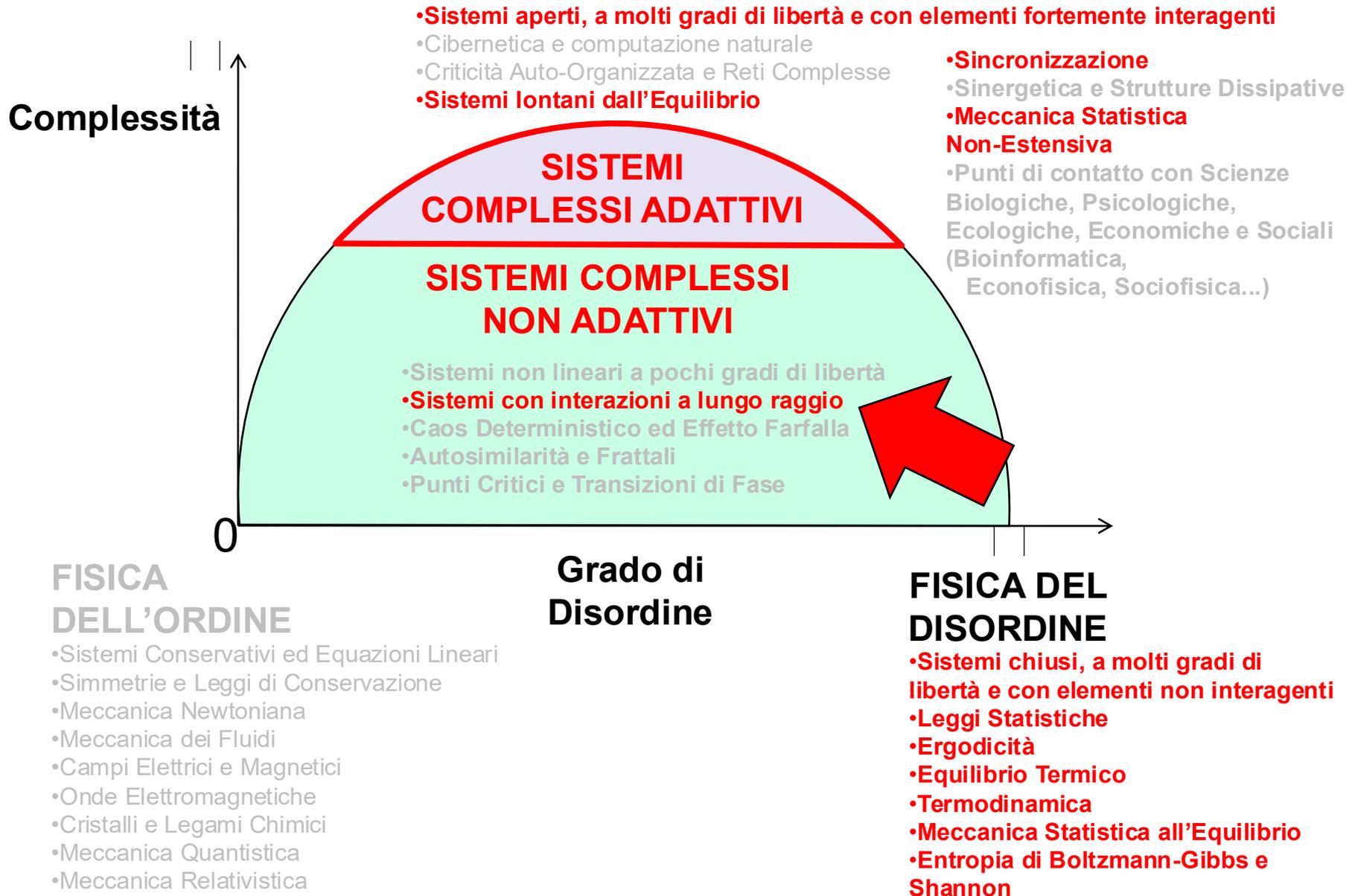
Densità di Ensemble: $\rho(p, q) = \text{costante}$

Entropia: $S(E, V) \equiv k \log \Gamma(E)$

Parte 3: Sistemi Dinamici a molti gradi di libertà



Parte 3: Sistemi Dinamici a molti gradi di libertà



Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (equivalente a N pendoli rigidi accoppiati, di massa e modulo unitari) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche $\{\theta_i, p_i\}$:

N gradi di libertà



M. Antoni

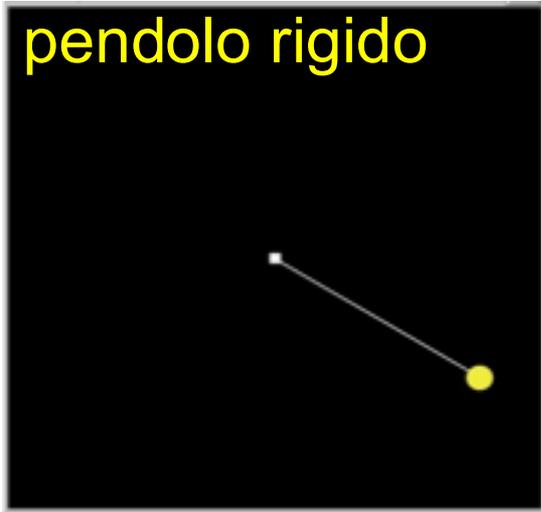
$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j)]$$



S. Ruffo

Antoni and Ruffo PRE 52 (1995) 2361

pendolo rigido



1 grado di libertà

Se $m=g=L=1$:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2} + (1 - \cos \theta)$$

Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (equivalente a N pendoli rigidi accoppiati, di massa e modulo unitari) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche $\{\theta_i, p_i\}$:

N gradi di libertà



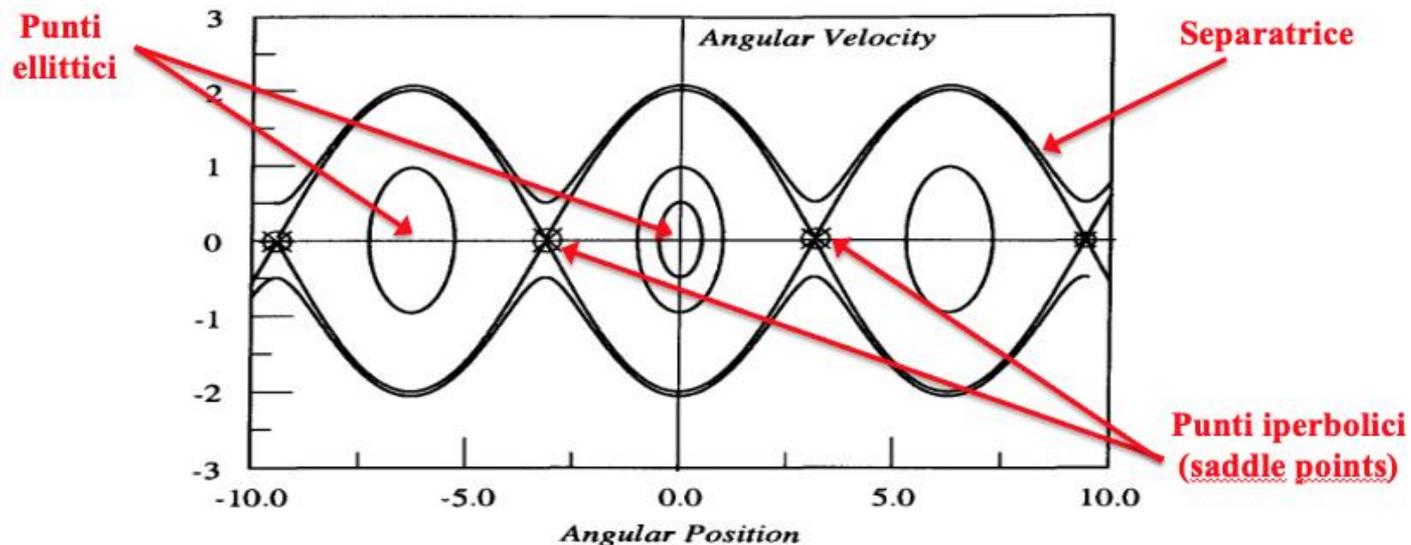
M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



S. Ruffo

Antoni and Ruffo PRE 52 (1995) 2361



Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (equivalente a N pendoli rigidi accoppiati, di massa e modulo unitari) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche $\{\theta_i, p_i\}$:

N gradi di libertà

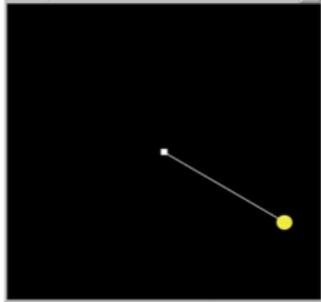


M. Antoni

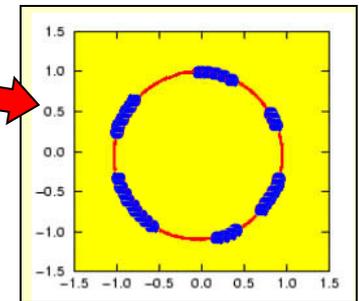
$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j)]$$



S. Ruffo



Generalizzando il pendolo rigido, il modello HMF può essere visto come un sistema di **particelle completamente interagenti (mean field) in moto senza collisioni su un cerchio unitario...**



Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (equivalente a N pendoli rigidi accoppiati, di massa e modulo unitari) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche $\{\theta_i, p_i\}$:

N gradi di libertà



M. Antoni

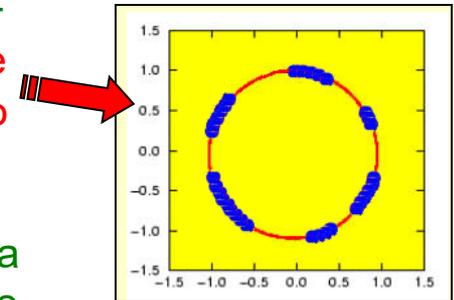
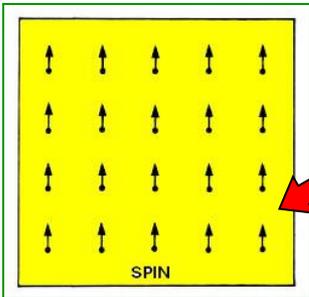
$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



S. Ruffo

Generalizzando il pendolo rigido, il modello HMF può essere visto come un sistema di **particelle completamente interagenti (mean field)** in moto senza collisioni su un cerchio unitario...

...oppure, facendo corrispondere ad ogni particella la punta di una freccia, può essere interpretato anche come un **reticolo di spin totalmente accoppiati**.



L'importanza di HMF sta nel fatto che il suo comportamento sembra essere **paradigmatico di una ampia classe di sistemi con interazioni a lungo range**, come per esempio sistemi nucleari o astrofisici (self-gravitating systems), e riveste un interesse particolare per lo studio della multiframmentazione e dei clusters atomici.

Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (equivalente a N pendoli rigidi accoppiati, di massa e modulo unitari) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche $\{\theta_i, p_i\}$:

N gradi di libertà



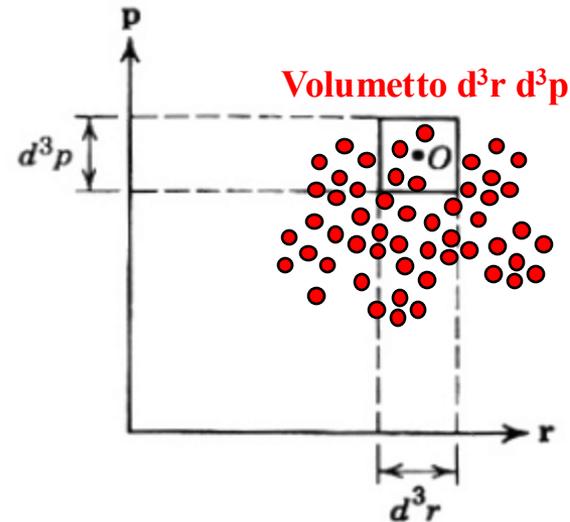
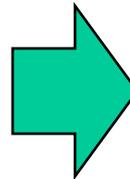
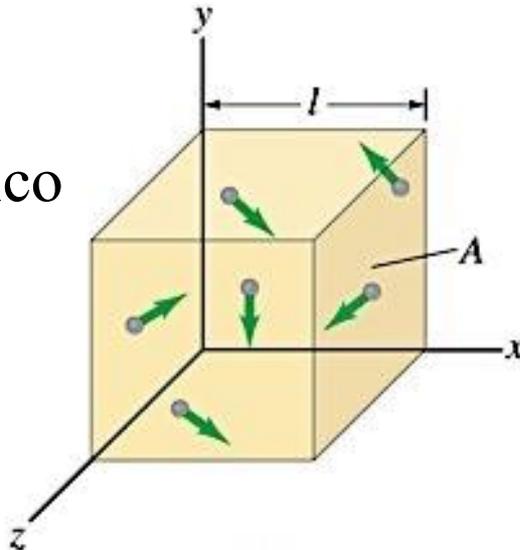
M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



S. Ruffo

N molecole
nello
Spazio fisico
3D



N punti
nello
Spazio μ
6D



J.C. Maxwell



L. Boltzmann

Applicazioni: il modello HMF

L'Hamiltonian Mean Field (HMF) model è un modello XY a rotatori planari (equivalente a N pendoli rigidi accoppiati, di massa e modulo unitari) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle N coppie di variabili canoniche $\{\theta_i, p_i\}$:

N gradi di libertà



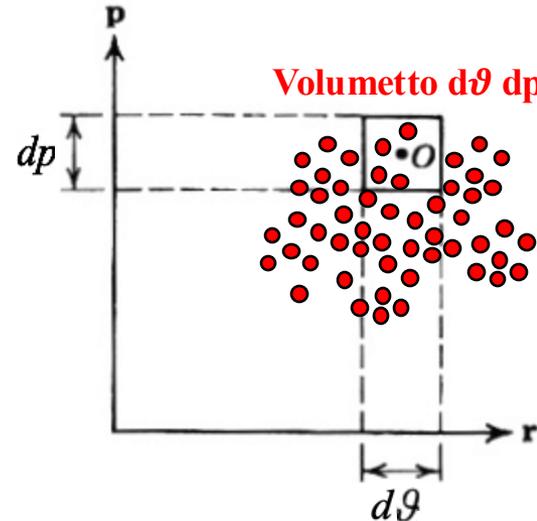
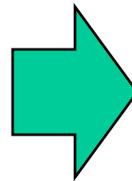
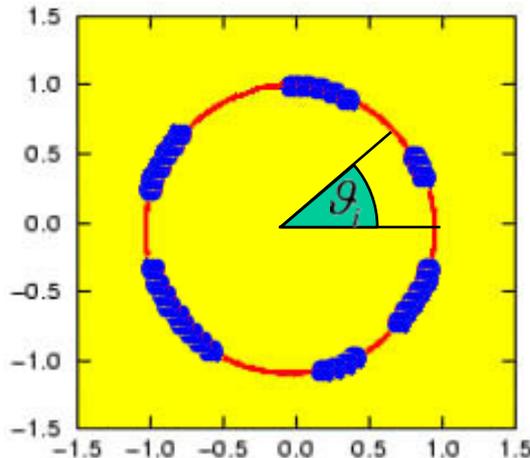
M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



S. Ruffo

N particelle (rotatori) sul cerchio unitario



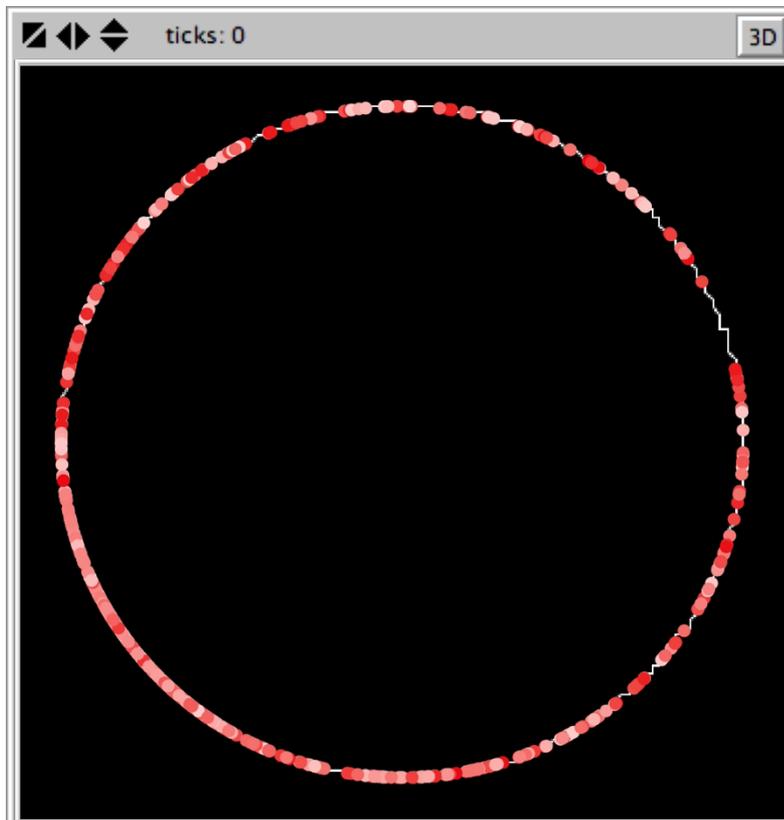
N punti in uno Spazio μ 2D



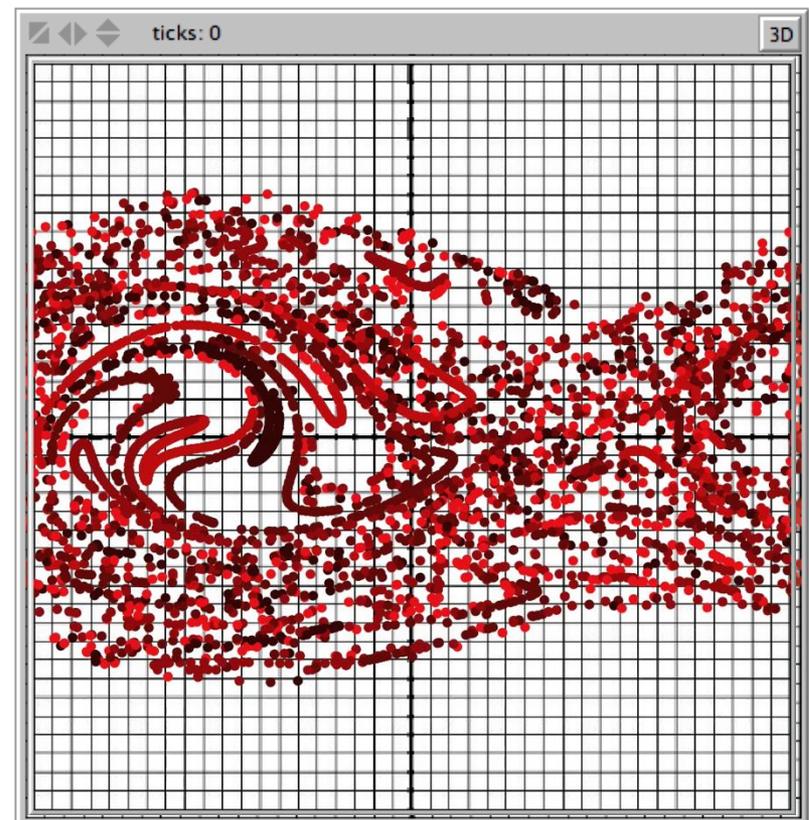
L. Boltzmann



hmf-unitcircle.nlogo

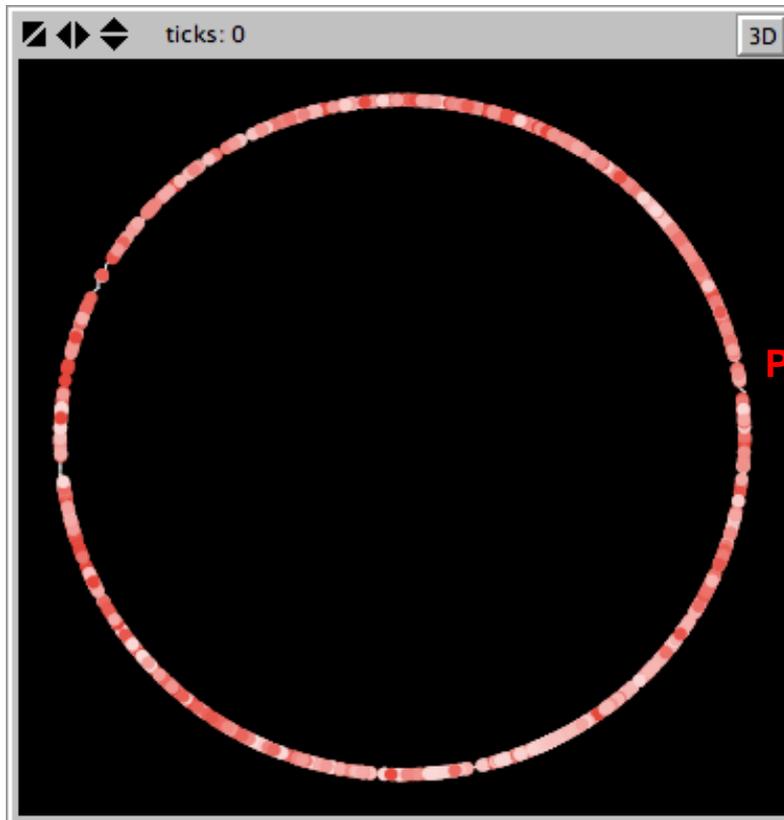


hmf-muspace.nlogo

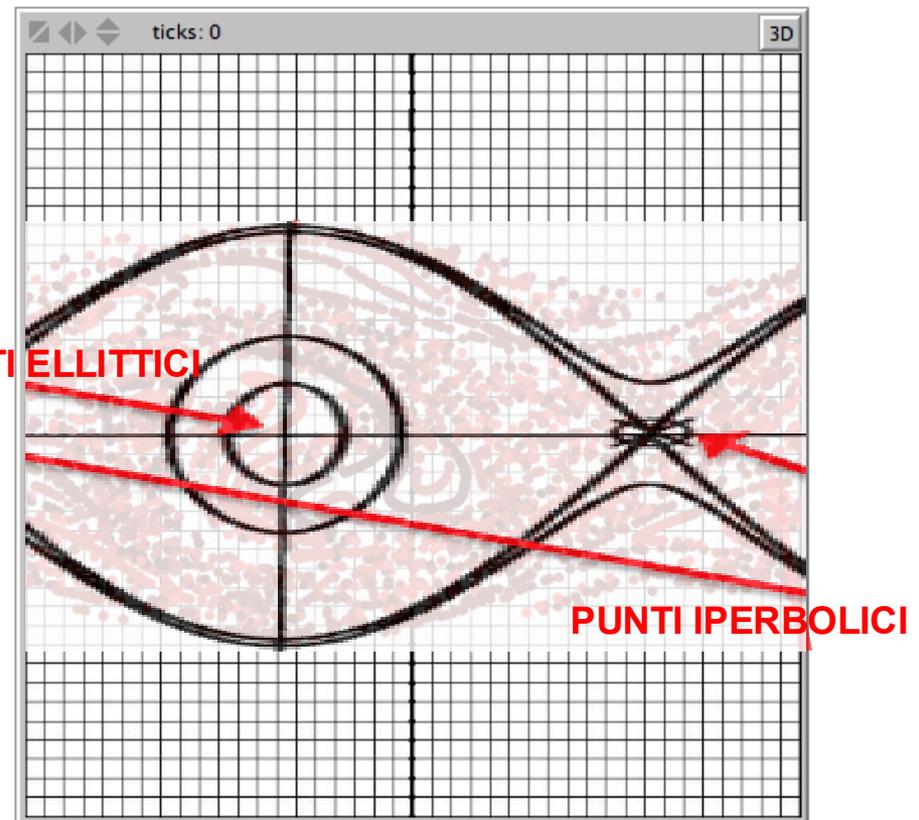




hmf-unitcircle.nlogo



hmf-muspace.nlogo

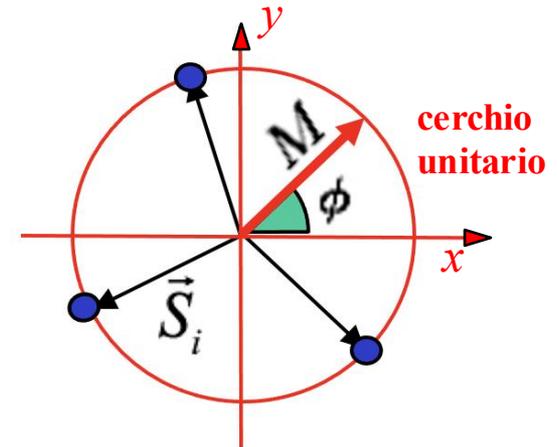


Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Prendiamo come parametro d'ordine il modulo M della **Magnetizzazione** così definita:

$$\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{S}_i$$

con $\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$

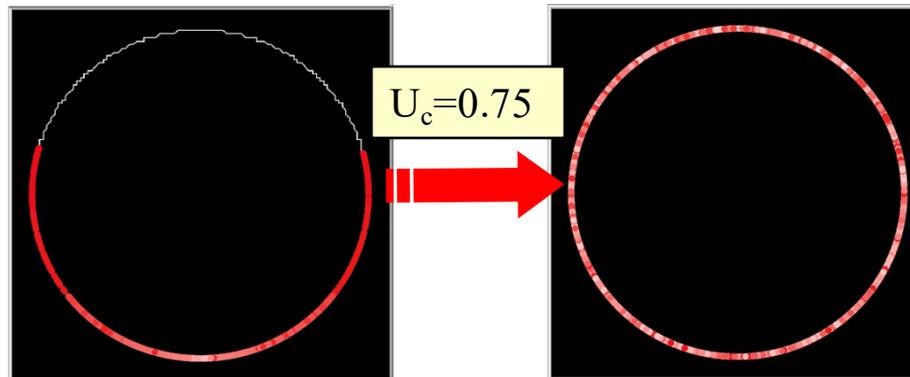


$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}, M \in [0,1]$$

$$M_x = M \cos \Phi, M_y = M \sin \Phi$$

La soluzione in **Ensemble Canonico** del modello mostra una **transizione** da una fase **Condensata** (ferromagnetica con $M > 0$) ad una fase **Omogenea** (paramagnetica, con $M \sim 0$) in corrispondenza di un valore critico $U_c=0.75$ della **Densità di Energia** ($U=H/N$):

$0 < M < 1$
 $U < U_c$
 Fase Condensata



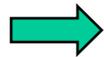
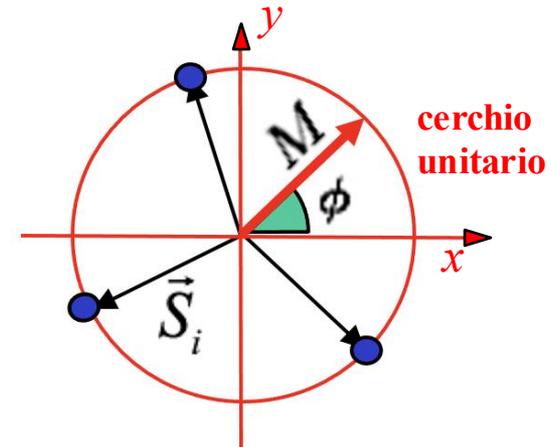
$M \sim 0$
 $U > U_c$
 Fase Omogenea

Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Prendiamo come parametro d'ordine il modulo M della **Magnetizzazione** così definita:

$$\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{S}_i$$

con $\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$

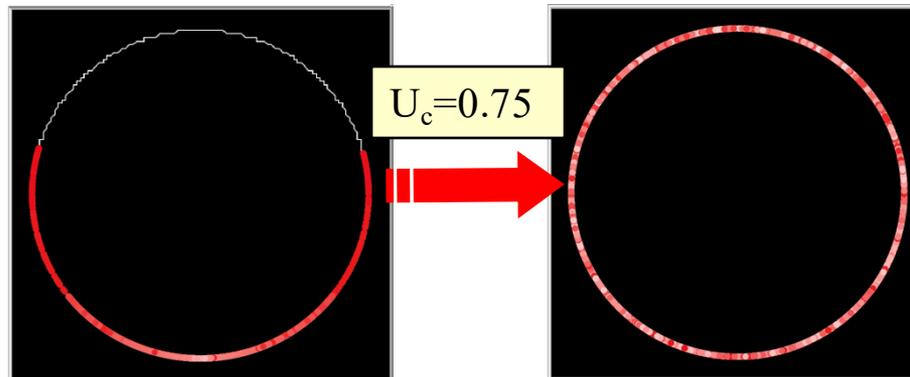


$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}, M \in [0,1]$$

$$M_x = M \cos \Phi, M_y = M \sin \Phi$$

La soluzione in **Ensemble Canonico** del modello mostra una **transizione** da una fase **Condensata** (ferromagnetica con $M > 0$) ad una fase **Omogenea** (paramagnetica, con $M \sim 0$) in corrispondenza di un valore critico $U_c=0.75$ della **Densità di Energia** ($U=H/N$):

$0 < M < 1$
 $U < U_c$
 Fase Condensata



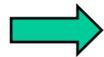
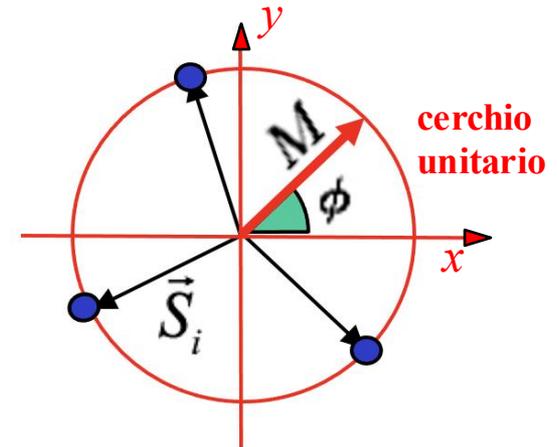
$M \sim 0$
 $U > U_c$
 Fase Omogenea

Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Prendiamo come parametro d'ordine il modulo M della **Magnetizzazione** così definita:

$$\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{S}_i$$

con $\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$

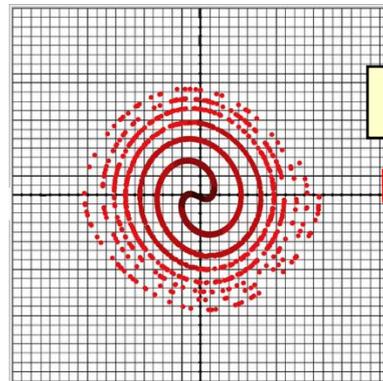


$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}, M \in [0,1]$$

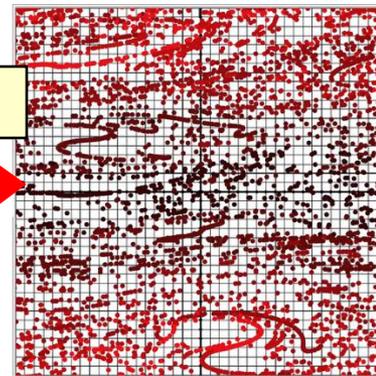
$$M_x = M \cos \Phi, M_y = M \sin \Phi$$

La soluzione in **Ensemble Canonico** del modello mostra una **transizione** da una fase **Condensata** (ferromagnetica con $M > 0$) ad una fase **Omogenea** (paramagnetica, con $M \sim 0$) in corrispondenza di un valore critico $U_c=0.75$ della **Densità di Energia** ($U=H/N$):

$0 < M < 1$
 $U < U_c$
 Fase Condensata



$U_c=0.75$



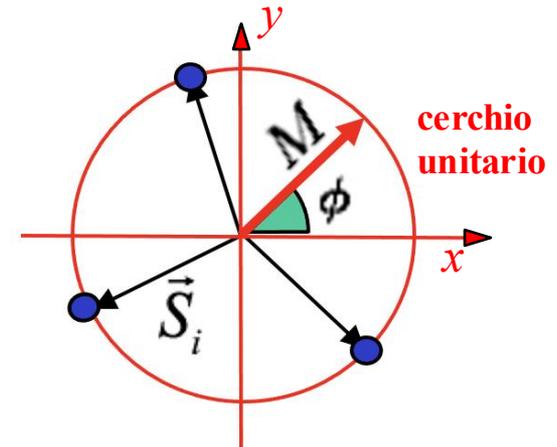
$M \sim 0$
 $U > U_c$
 Fase Omogenea

Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Prendiamo come parametro d'ordine il modulo M della **Magnetizzazione** così definita:

$$\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{S}_i$$

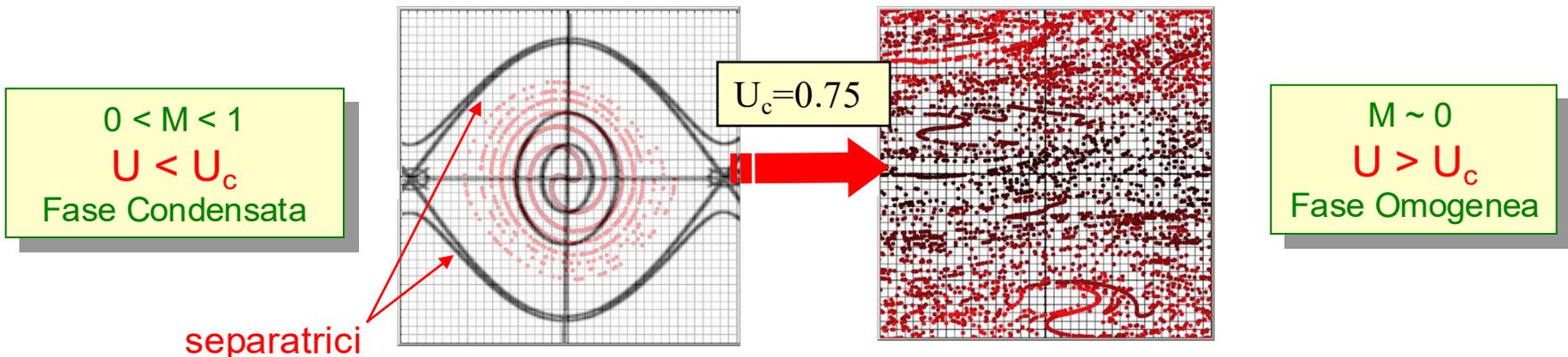
con $\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$



$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}, M \in [0,1]$$

$$M_x = M \cos \Phi, M_y = M \sin \Phi$$

La soluzione in **Ensemble Canonico** del modello mostra una **transizione** da una fase **Condensata** (ferromagnetica con $M > 0$) ad una fase **Omogenea** (paramagnetica, con $M \sim 0$) in corrispondenza di un valore critico $U_c=0.75$ della **Densità di Energia** ($U=H/N$):



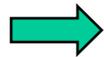
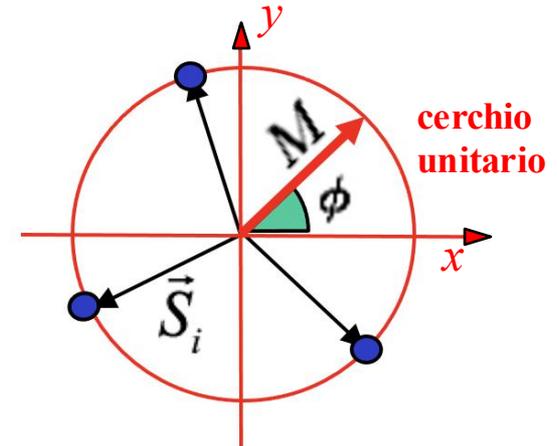
separatrici

Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Prendiamo come parametro d'ordine il modulo M della **Magnetizzazione** così definita:

$$\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{S}_i$$

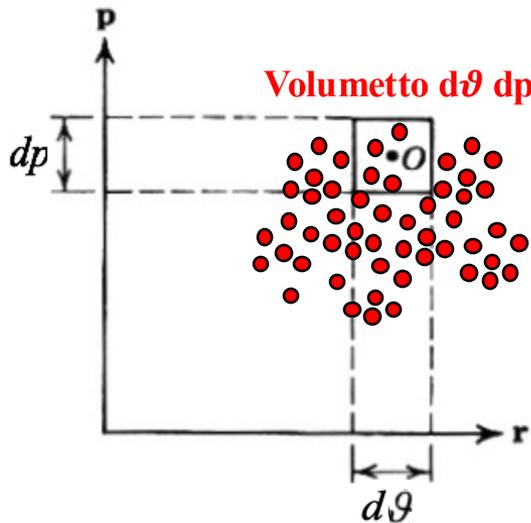
con $\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$



$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\Phi}, M \in [0,1]$$

$$M_x = M \cos \Phi, M_y = M \sin \Phi$$

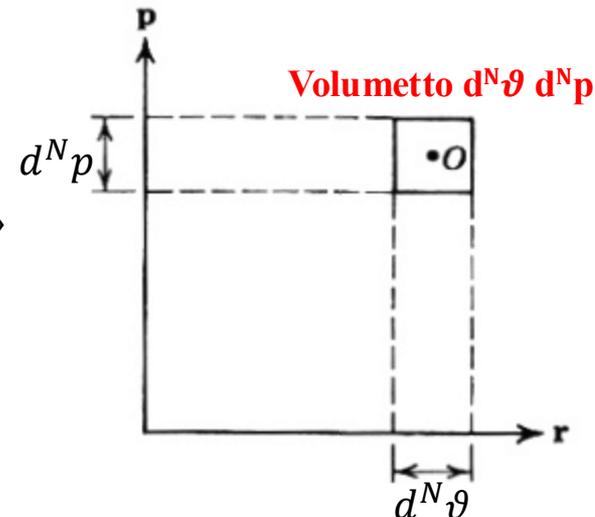
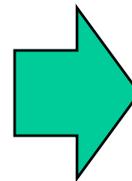
Per risolvere il modello HMF in **Ensemble Canonico** conviene ovviamente lavorare nello spazio Γ di Gibbs, che in questo caso ha N gradi di libertà e dunque $2N$ dimensioni:



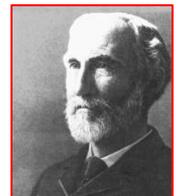
**N punti
in uno
Spazio μ
2D**



L.Boltzmann



**1 punto
nello
Spazio Γ
2N-D**



J.W.Gibbs

Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

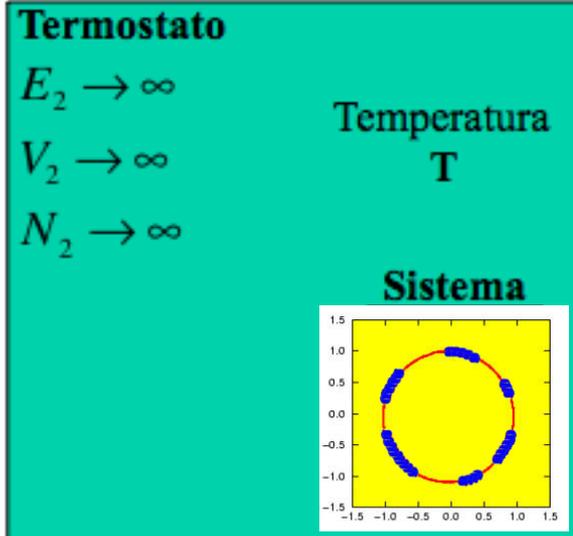
Partiamo dalla **funzione di partizione canonica** del modello:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^N dp_k \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k e^{-\beta H}$$

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (k_B = 1)$$

T = temperatura

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Partiamo dalla **funzione di partizione canonica** del modello:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^N dp_k \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k e^{-\beta H}$$

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (k_B = 1) \quad H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$

$T = \text{temperatura}$

Innanzitutto la Z si **fattorizza** in un contributo cinetico ed uno potenziale:

$$Z_K = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^N dp_k e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i p_i^2} = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}}$$



$$Z_V = C \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k e^{-\frac{\beta}{2N} \sum_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)} = C \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k e^{-\frac{\beta}{2N} \left| \sum_i \vec{S}_i \right|^2}$$



...con: $C = e^{-\frac{\beta N}{2}}$

Prodotto di N integrali gaussiani uguali, con $b=0$ e $a^2 = \beta/2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 + bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{4a^2}}$$

...come per il gas ideale in ensemble canonico...

Qui si sfrutta la definizione dei rotatori planari come spin per trasformare la doppia sommatoria dell'esponenziale in una sommatoria singola...

$$\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$$

Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Partiamo dalla **funzione di partizione canonica** del modello:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^N dp_k \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k e^{-\beta H}$$

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (k_B = 1) \quad H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$

$T = \text{temperatura}$

Innanzitutto la Z si **fattorizza** in un contributo cinetico ed uno potenziale:

$$Z_K = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^N dp_k e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i p_i^2} = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}}$$

$$Z_V = C \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k e^{-\frac{\beta}{2N} \sum_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)} = C \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k e^{-\frac{\beta}{2N} \left| \sum_i \vec{S}_i \right|^2}$$

...con: $C = e^{-\frac{\beta N}{2}}$

Applicando una trasformazione di **Hubbard-Stratonovich** (H-S) in 2D alla Z_V si **linearizza** l'esponente del termine esponenziale nell'integrale:

$$Z_V = \frac{C}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} e^{-\vec{v}^2 + \sum_i \vec{S}_i \cdot [\vec{v} (2\beta/N)^{1/2}]}$$

con: $\vec{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta)$

da cui, scambiando l'ordine di integrazione, integrando sugli angoli e sfruttando la sostituzione di variabile $\vec{v} \rightarrow \vec{v} (N/2\beta)$, otterremo:

Meccanica statistica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

$$Z_V = \frac{NC}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} e^{N \left[-\frac{v^2}{2\beta} + \ln 2\pi I_0(v) \right]}$$

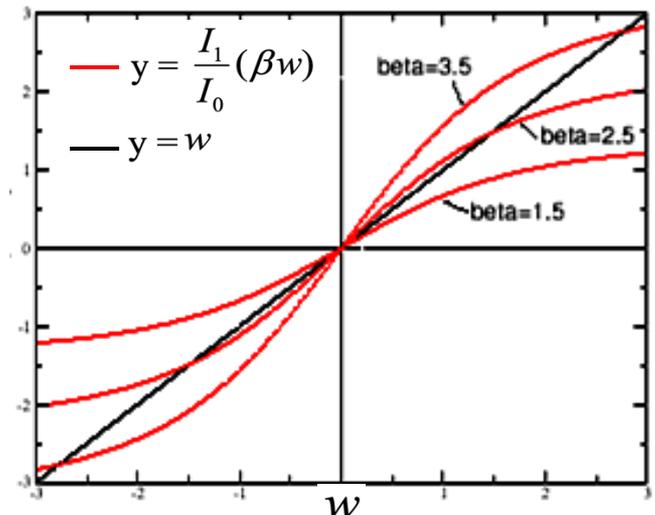
...dove I_k è la **funzione di Bessel modificata** di ordine k .

Per stimare questo integrale, essendo interessati al limite termodinamico, si può far uso del metodo della **steepest-descent**. Quest'ultimo richiede che la funzione in parentesi quadre, che chiameremo $f(v)$, abbia un massimo. Per trovarlo basta porre a zero la derivata prima di f ottenendo così **un'equazione autoconsistente in campo medio per i punti stazionari**:

$$w = \frac{I_1}{I_0}(\beta w) \quad \dots \text{dove si è posto: } \dot{w} = \dot{v} / \beta$$

$$\dot{M} = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \dot{S}_i \right\rangle = \frac{I_1}{I_0}(v) = \frac{v}{\beta} = w$$

Si può verificare che la w coincide con la **magnetizzazione M** del sistema e che la funzione a secondo membro ha un andamento qualitativamente uguale a quello di una tangente iperbolica, cosicché l'equazione è risolvibile graficamente. Si può così vedere che essa ammette **soluzioni diverse da zero** (quindi con $M > 0$) **solo per $\beta > 2$** , cioè per $T < 0.5$, valore che rappresenta dunque la **temperatura critica T_c** per il modello HMF.



Termodinamica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Dopo aver verificato che il **punto stazionario** appena trovato è un massimo per la funzione f (si trova infatti che gli autovalori della matrice hessiana sono entrambi negativi) si può applicare il metodo della **steepest-descent** alla funzione di partizione totale Z per ricavare la **densità di energia libera F** (ossia A / N) nel limite termodinamico:

$$-\beta F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z}{N} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) - \frac{\beta}{2} + \left[-\beta \frac{\mathbf{r}^2}{2} + \ln 2\pi I_0(\beta |\mathbf{w}|) \right]_0$$

dove l'ultimo termine va calcolato nel punto di **massimo**.

Reminder:

Dalla Funzione di Partizione Canonica alla Termodinamica

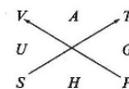
La termodinamica del sistema va ricavata dalla formula

$$Q_N(V, T) = e^{-\beta A(V, T)} \rightarrow A(V, T) = -\beta^{-1} \log Q_N(V, T) \quad (7.7)$$

dove $A(V, T)$ è l'**energia libera di Helmholtz**. Per giustificare questa identificazione si può dimostrare che:

- (a) A è una quantità estensiva,
- (b) A è in relazione con l'energia interna $U \equiv \langle \mathcal{H} \rangle$ e con l'entropia $S \equiv -(\partial A / \partial T)_V$ tramite la relazione termodinamica

$$A = U - TS$$



Tutte le altre funzioni termodinamiche possono essere ricavate da $A(V, T)$, per mezzo delle relazioni di Maxwell in termodinamica:

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_T$$

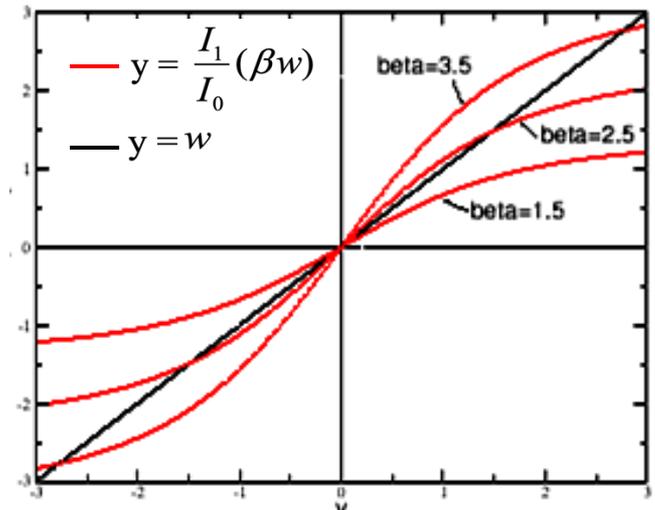
$$S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_V$$

$$G = A + PV$$

$$U = \langle \mathcal{H} \rangle = A + TS$$

Quindi tutti calcoli nell'ensemble canonico iniziano (e praticamente finiscono) con il calcolo della funzione di partizione

$$\frac{\mathbf{r}}{M} = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \right\rangle = \frac{I_1(v)}{I_0(v)} = \frac{v}{\beta} = \mathbf{w}$$



Termodinamica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Dopo aver verificato che il **punto stazionario** appena trovato è un massimo per la funzione f (si trova infatti che gli autovalori della matrice hessiana sono entrambi negativi) si può applicare il metodo della **steepest-descent** alla funzione di partizione totale Z per ricavare la **densità di energia libera F** (ossia A / N) nel limite termodinamico:

$$-\beta F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z}{N} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) - \frac{\beta}{2} + \left[-\beta \frac{r^2}{2} + \ln 2\pi I_0(\beta |w|) \right]_0$$

dove l'ultimo termine va calcolato nel punto di **massimo**.

Dalla densità di energia libera è anche possibile ricavare la relazione che lega la **densità di energia U** alle variabili T ed M , cioè la cosiddetta **curva calorica**. Infatti si ha:

$$U = \left\langle \frac{H}{N} \right\rangle = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2} + \frac{w^2}{2} - w \frac{I_0(\beta w)}{I_1(\beta w)}$$

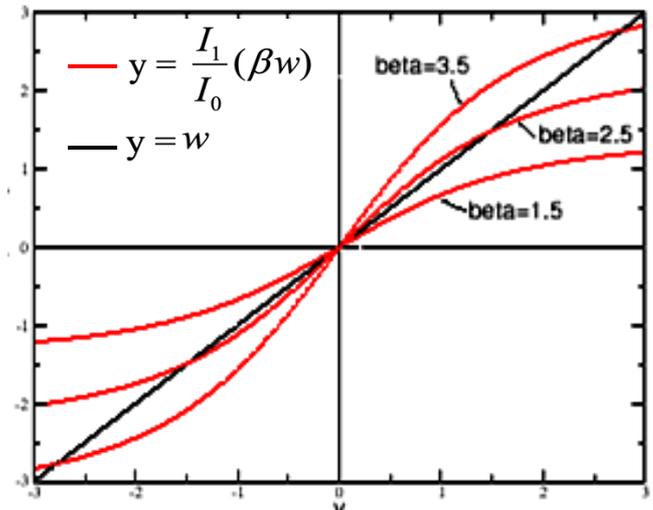
la quale, poiché $w = M$, ci dà la **curva calorica**:

$$U = \frac{T}{2} + \frac{1}{2}(1 - M^2)$$

da cui, sostituendo $T = T_c = 0.5$ e $M = 0$, si ricava la densità di energia critica:

$$U_c = 0.75$$

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N S_i \right\rangle = \frac{I_1(v)}{I_0(v)} = \frac{v}{\beta} = w$$



Termodinamica all'Equilibrio in Ensemble Canonico

Dopo aver verificato che il **punto stazionario** appena trovato è un massimo per la funzione f (si trova infatti che gli autovalori della matrice hessiana sono entrambi negativi) si può applicare il metodo della **steepest-descent** alla funzione di partizione totale Z per ricavare la **densità di energia libera F** (ossia A/N) nel limite termodinamico:

$$-\beta F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z}{N} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) - \frac{\beta}{2} + \left[-\beta \frac{r^2}{2} + \ln 2\pi I_0(\beta |w|) \right]_0$$

dove l'ultimo termine va calcolato nel punto di **massimo**.

Dalla densità di energia libera è anche possibile ricavare la relazione che lega la **densità di energia U** alle variabili T ed M , cioè la cosiddetta **curva calorica**. Infatti si ha:

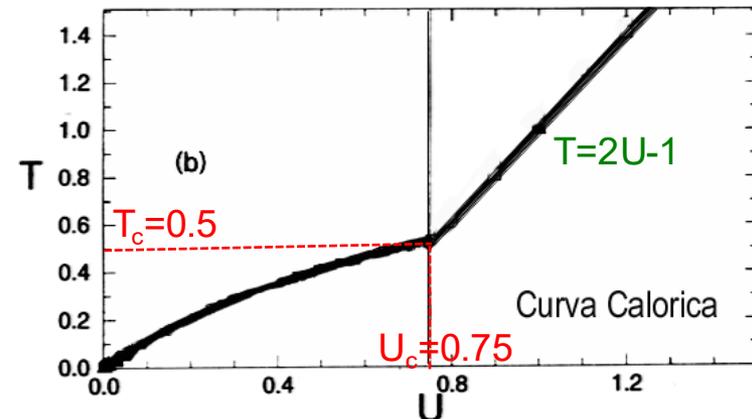
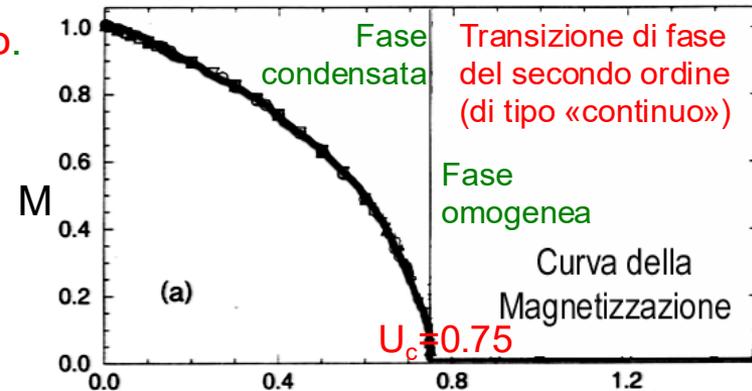
$$U = \left\langle \frac{H}{N} \right\rangle = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2} + \frac{w^2}{2} - w \frac{I_0}{I_1}(\beta w)$$

la quale, poiché $w = M$, ci dà la **curva calorica**:

$$U = \frac{T}{2} + \frac{1}{2}(1 - M^2)$$

da cui, sostituendo $T = T_c = 0.5$ e $M = 0$, si ricava la densità di energia critica:

$$U_c = 0.75$$



Meccanica statistica e Termodinamica all'Equilibrio in Ensemble Microcanonico: equivalenza degli Ensemble

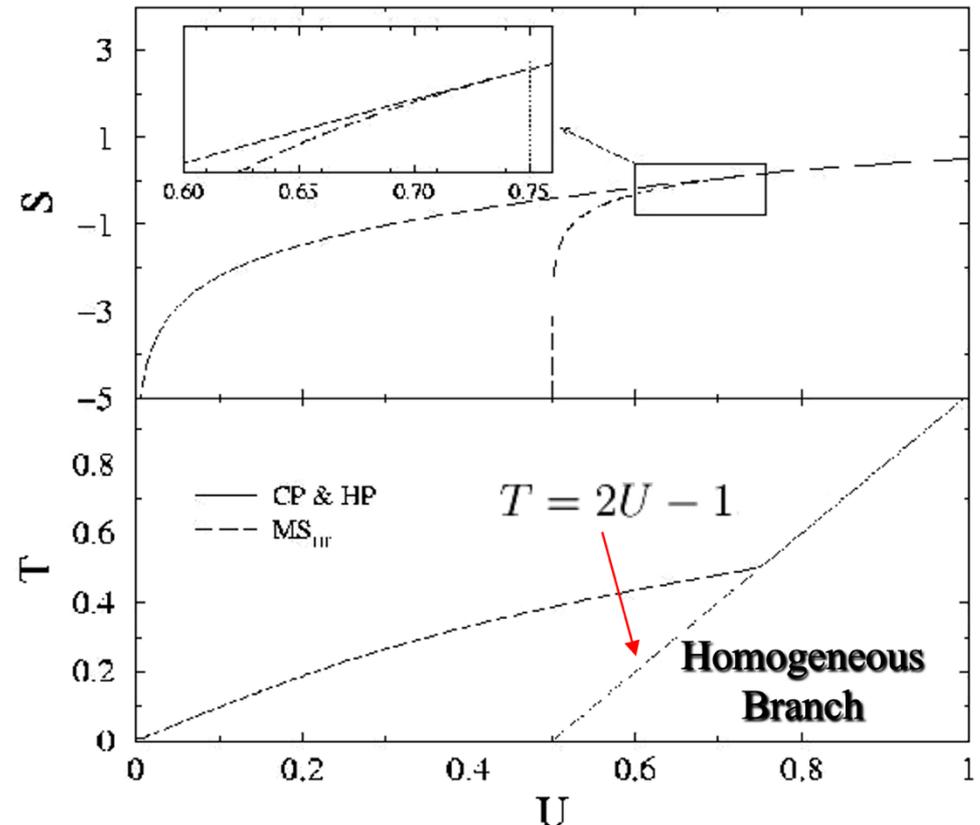
Funzione di Partizione
Canonica

$$Z(\beta, N) = \int_0^\infty dE \omega(E, N) e^{-\beta E}$$



Densità nello Spazio delle Fasi:
Funzione di Partizione
Microcanonica

$$\omega(E, N) = \int d^N p_i d^N \theta_i \delta(E - H)$$



Entropia
$$S(U) = \min_{\beta > 0} \max_y \left[\beta U + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - \frac{\beta}{2} + \ln(2\pi I_0(y)) - \frac{y^2}{2\beta} \right]$$

Meccanica statistica e Termodinamica all'Equilibrio in Ensemble Microcanonico: equivalenza degli Ensemble

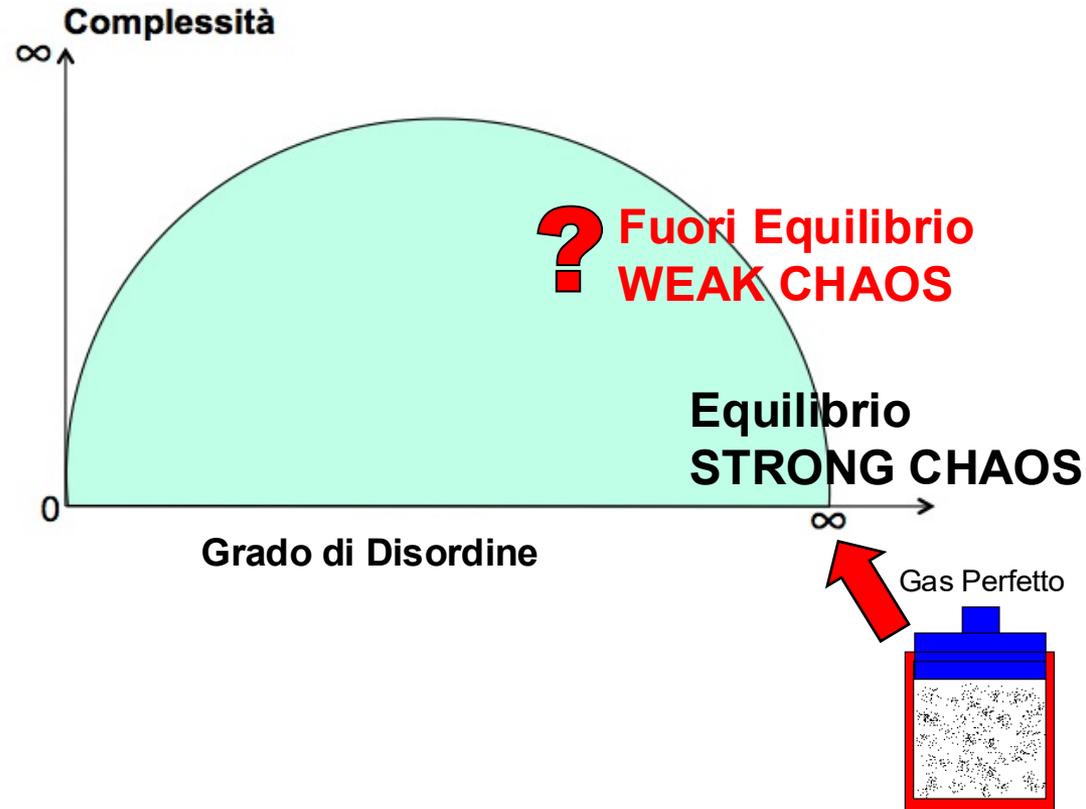
Funzione di Partizione
Canonica

$$Z(\beta, N) = \int_0^\infty dE \omega(E, N) e^{-\beta E}$$



Densità nello Spazio delle Fasi:
Funzione di Partizione
Microcanonica

$$\omega(E, N) = \int d^N p_i d^N \theta_i \delta(E - H)$$



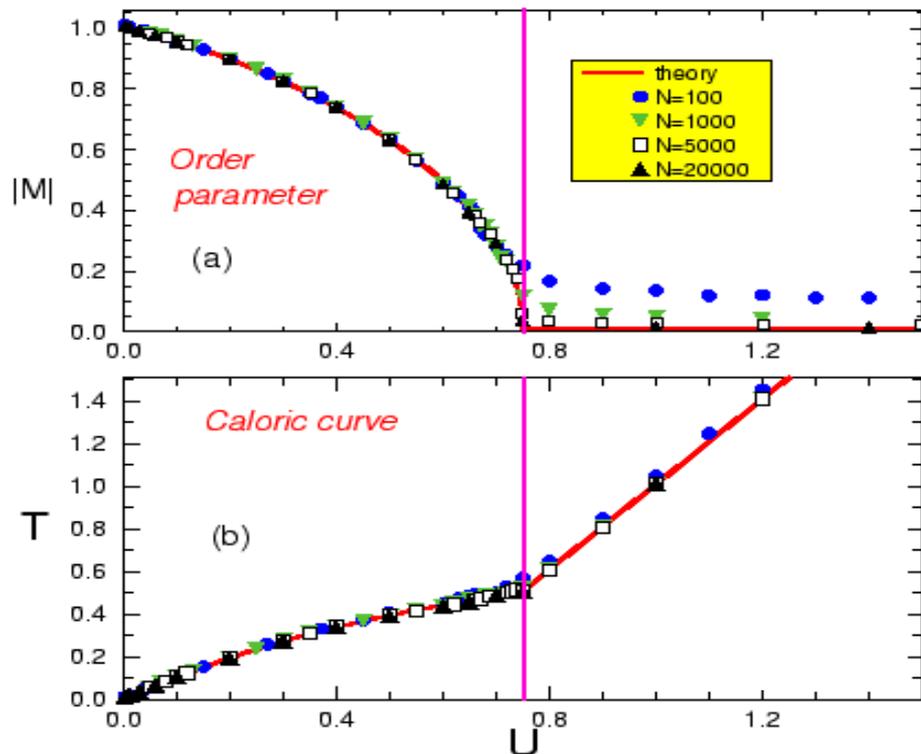
Entropia $S(U) = \min_{\beta > 0} \max_y \left[\beta U + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - \frac{\beta}{2} + \ln(2\pi I_0(y)) - \frac{y^2}{2\beta} \right]$

Dinamica del Modello HMF (simulazioni)

Equazioni del moto di Hamilton in campo medio

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = p_i \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} = -M_x \sin \theta_i + M_y \cos \theta_i \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_i = M \sin(\Phi - \theta_i)$$
$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}$$

Le equazioni del moto che si ricavano dall'Hamiltoniana del modello HMF possono essere integrate numericamente ad **energia costante** usando un algoritmo **simplettico del 4° ordine**.
Yoshida , Physica A 150 (1990) 262



Si trova così un buon accordo tra le **soluzioni canoniche esatte** e le **simulazioni microcanoniche** all'equilibrio per varie size N del sistema...

Nota: dinamicamente la **temperatura** viene calcolata per mezzo della sua relazione con l'**energia cinetica media** $\langle K \rangle$ dei rotatori (teorema di equipartizione):

$$T = \frac{2\langle K \rangle}{N}$$

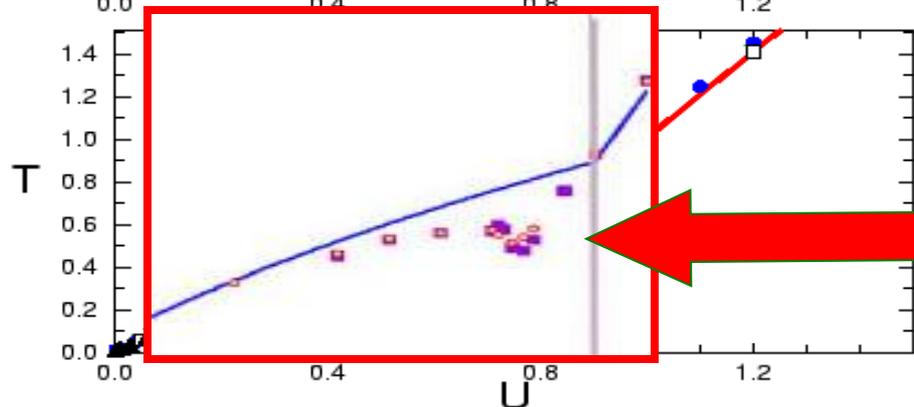
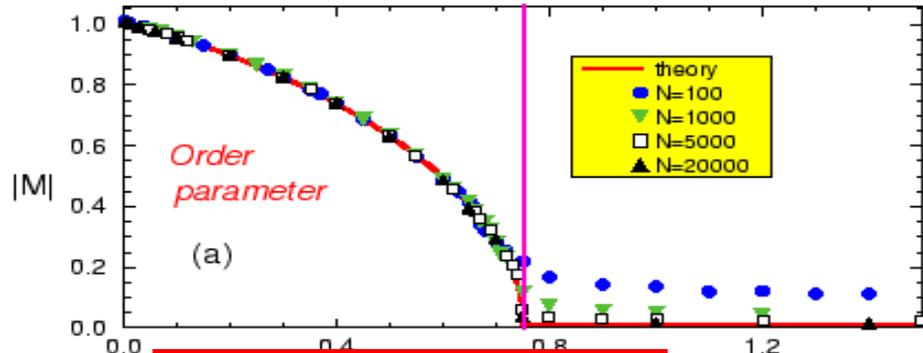
Anomalie dinamiche e inequivalenza degli Ensemble

Equazioni del moto di Hamilton in campo medio

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = p_i \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} = -M_x \sin \theta_i + M_y \cos \theta_i \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta}_i = M \sin(\Phi - \theta_i)$$

$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}$$

Le equazioni del moto che si ricavano dall'Hamiltoniana del modello HMF possono essere integrate numericamente ad **energia costante** usando un algoritmo symplettico del 4° ordine. Yoshida, Physica A 150 (1990) 262

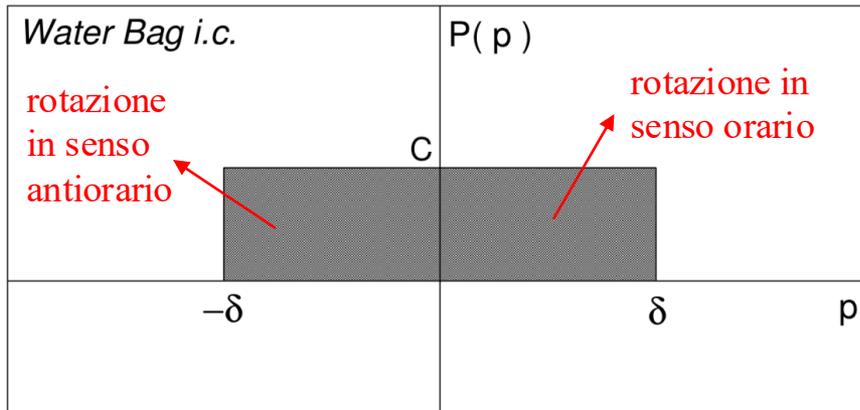


Si trova così un buon accordo tra le **soluzioni canoniche esatte** e le **simulazioni microcanoniche** all'equilibrio per varie size N del sistema...

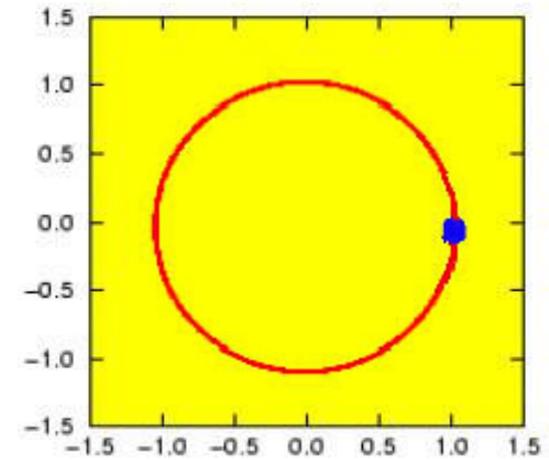
ma...

Quando il sistema viene fatto partire da **condizioni iniziali sufficientemente lontane dall'equilibrio**, si osservano molte **anomalie dinamiche**. In particolare ci concentreremo su un range di energie situate subito **sotto il punto critico** ($0.5 < U < 0.75$).

Condizioni iniziali lontane dall' equilibrio: «esplosione cinetica» iniziale



Distribuzione uniforme delle velocità



Tutti gli angoli = 0

$$M(t=0)=1$$

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)] \longrightarrow U = \frac{T}{2} + \frac{1}{2} (1 - M^2)$$

A t=0 tutta l'energia è di tipo cinetico!

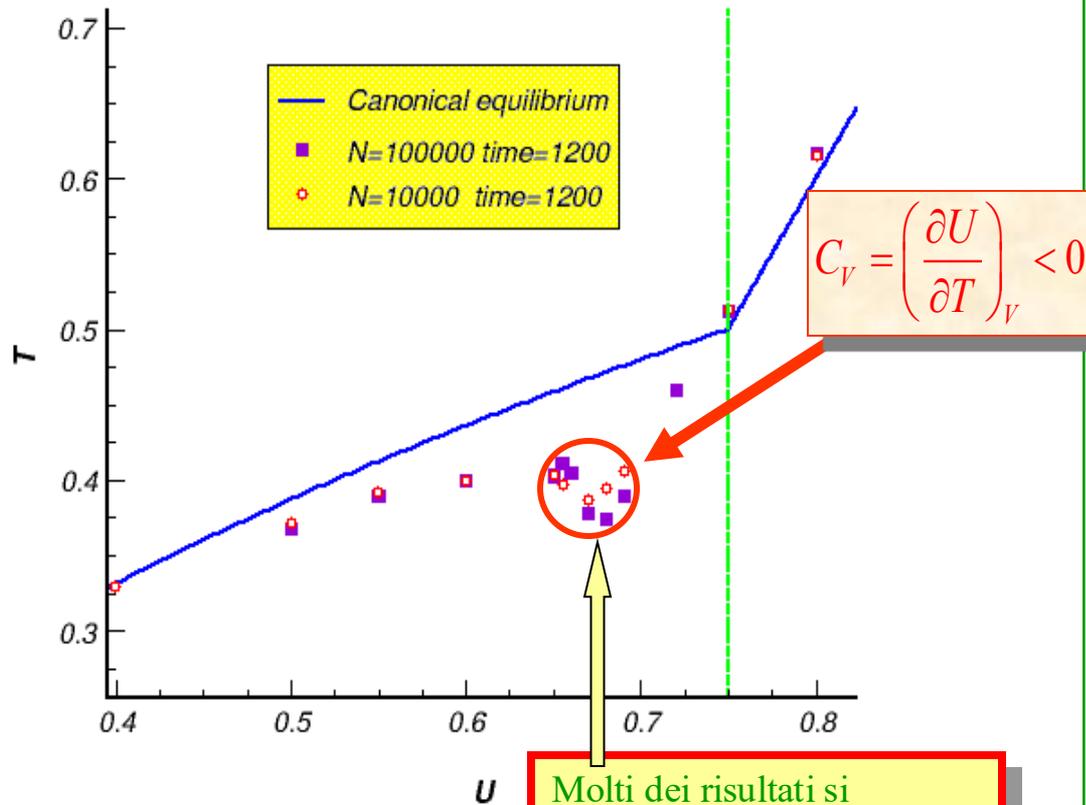
La prima anomalia: Calore specifico negativo

In tale regione il calore specifico diventa negativo. Infatti la temperatura *decrece, incrementando la densità di energia..*

Questo fenomeno è stato osservato nelle reazioni di multiframmentazione nucleare e nei clusters atomici, ma anche in oggetti stellari auto-gravitanti, cioè in sistemi non-estensivi.

Vedi per esempio:

- Thirring, Zeit. Physik 235 (1970) 339
- Lynden-Bell, Physica A 263 (1999) 293
- D.H.E.Gross, *Microcanonical Thermodynamics: Phase transitions in Small systems*, World Scientific (2001).
- M. D'Agostino et al, Phys. Lett. B 473 (2000) 279
- Schmidt et al, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 1191



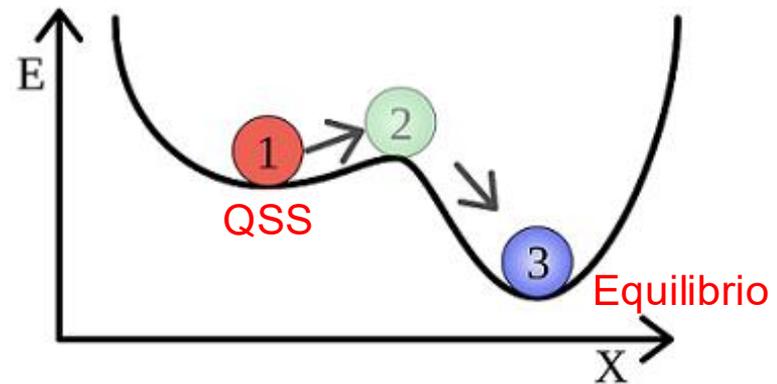
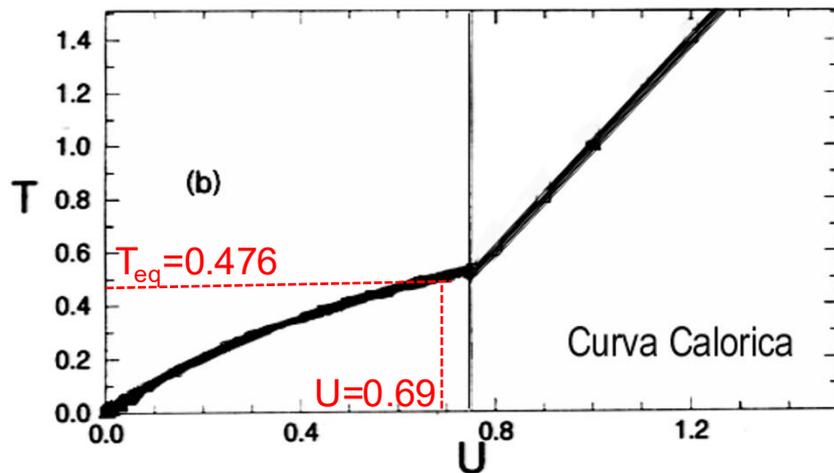
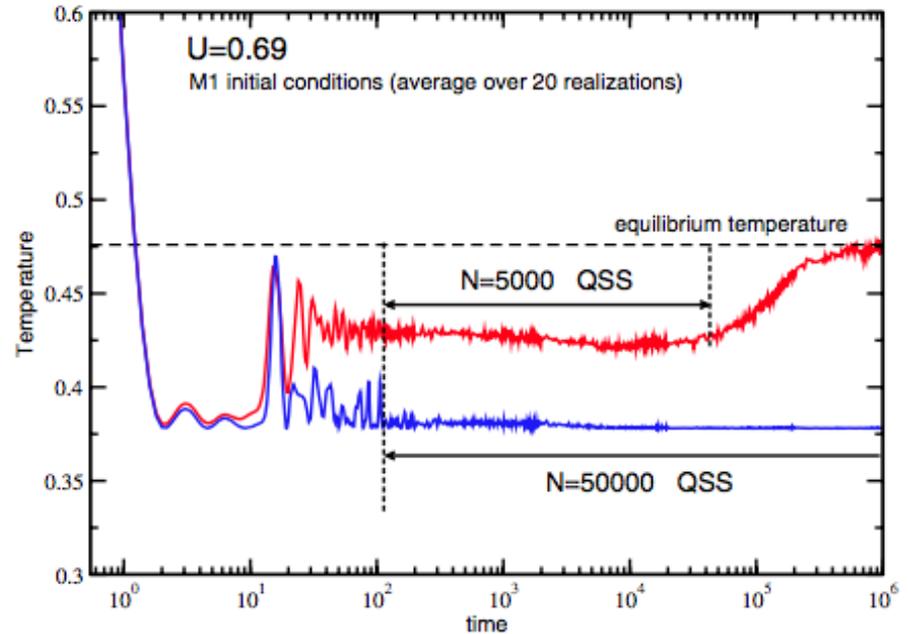
Molti dei risultati si riferiranno al caso $U=0.69$ dove le anomalie sono più evidenti

Stati Metastabili (QSS)

Partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio con $U=0.69$, il sistema rimane intrappolato per un certo tempo in **STATI QUASI-STAZIONARI (QSS) METASTABILI** dove la temperatura, sempre calcolata come:

$$T = \frac{2\langle K \rangle}{N}$$

rimane minore di quella prevista dalla curva calorica all'equilibrio ($T_{eq}=0.476$).

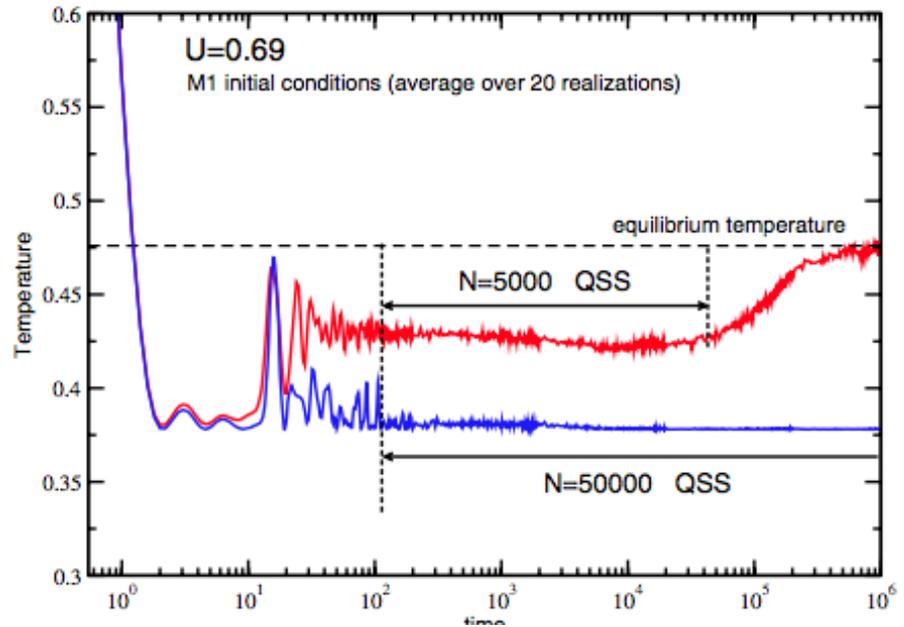


Stati Metastabili (QSS)

Partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio con $U=0.69$, il sistema rimane intrappolato per un certo tempo in **STATI QUASI-STAZIONARI (QSS) METASTABILI** dove la temperatura, sempre calcolata come:

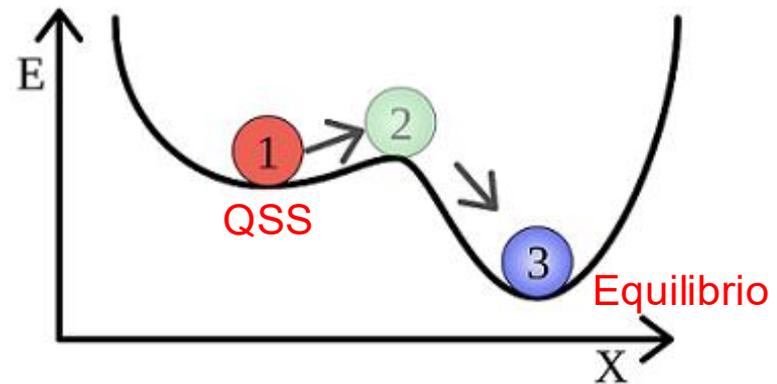
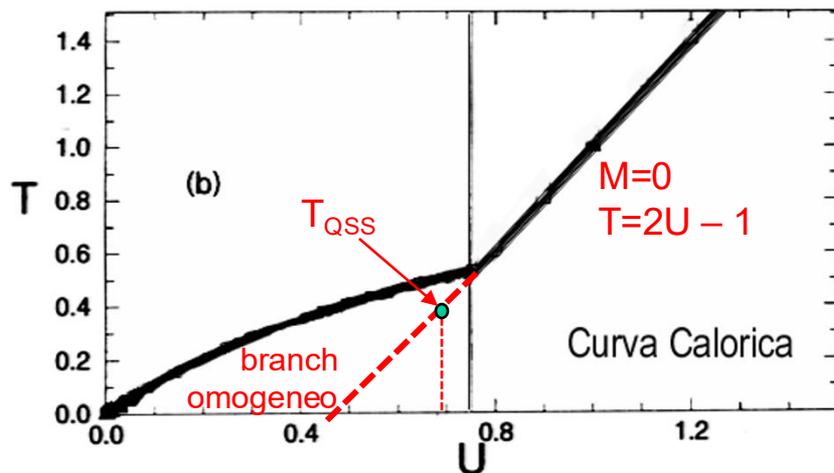
$$T = \frac{2\langle K \rangle}{N}$$

rimane minore di quella prevista dalla curva calorica all'equilibrio ($T_{eq}=0.476$).



Nel regime QSS la magnetizzazione va a zero con la size N del sistema:

$$M_{QSS} : N^{-1/6}$$



Stati Metastabili (QSS)

Partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio con $U=0.69$, il sistema rimane intrappolato per un certo tempo in **STATI QUASI-STAZIONARI (QSS) METASTABILI** dove la temperatura, sempre calcolata come:

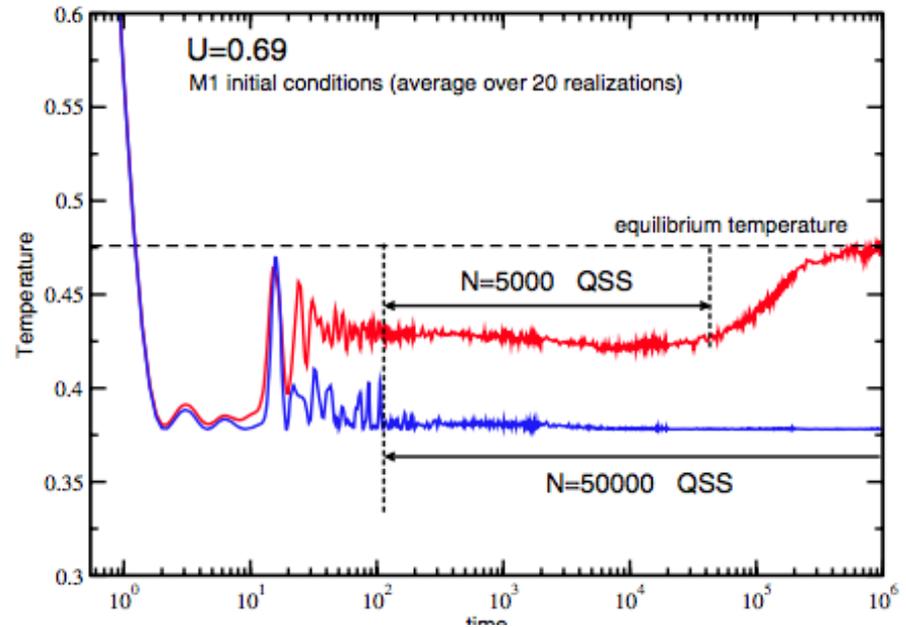
$$T = \frac{2\langle K \rangle}{N}$$

rimane minore di quella prevista dalla curva calorica all'equilibrio ($T_{eq}=0.476$).

e così fa anche la forza F_i agente sull' i -esimo spin, essendo:

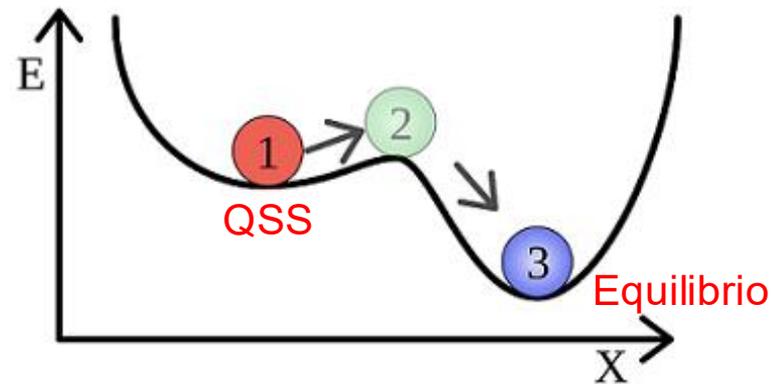
$$F_i = -M_x \sin \theta_i + M_y \cos \theta_i$$

Quindi maggiore è N , maggiore è il tempo di vita di questi stati metastabili...



Nel regime QSS la magnetizzazione va a zero con la size N del sistema:

$$M_{QSS} : N^{-1/6}$$

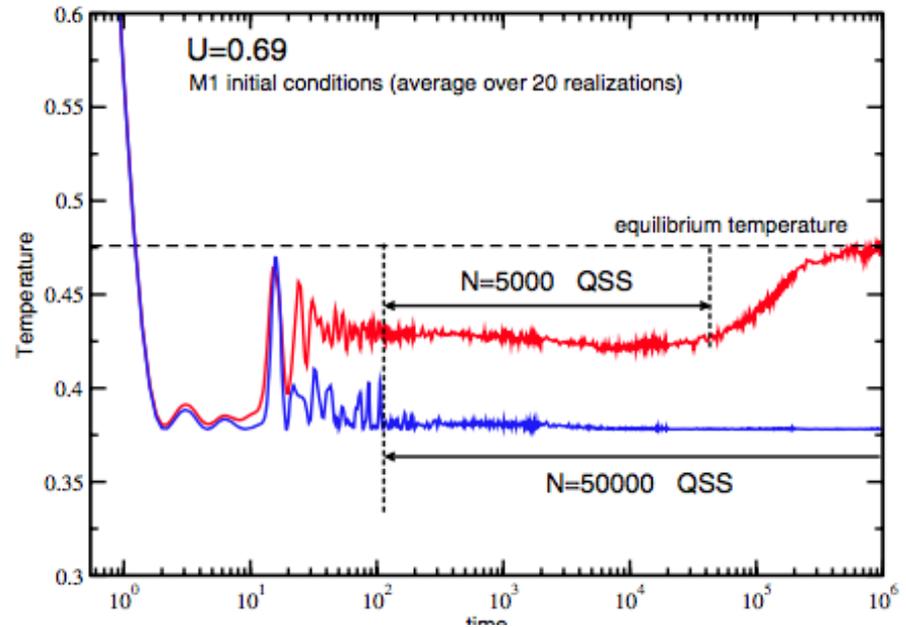


Stati Metastabili (QSS)

Partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio con $U=0.69$, il sistema rimane intrappolato per un certo tempo in **STATI QUASI-STAZIONARI (QSS) METASTABILI** dove la temperatura, sempre calcolata come:

$$T = \frac{2\langle K \rangle}{N}$$

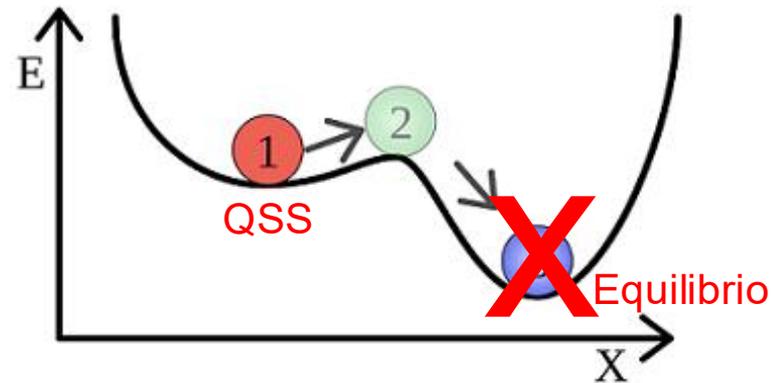
rimane minore di quella prevista dalla curva calorica all'equilibrio ($T_{eq}=0.476$).



Nel regime QSS la magnetizzazione va a zero con la size N del sistema:

$$M_{QSS} : N^{-1/6}$$

Alla fine, per $N \rightarrow \infty$, la temperatura dei QSS tende al valore limite $T_{QSS} = 0.38$ e il sistema non raggiunge MAI il regime di equilibrio!

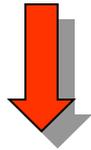


Ordine dei limiti

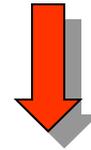
Le simulazioni mostrano chiaramente che, andando verso il limite termodinamico, diventa cruciale l'ordine in cui vengono presi i due limiti per N infinito e per t infinito...

In generale, cioè, i due limiti non commutano
(come invece dovrebbe teoricamente accadere):

$$N \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty \quad \neq \quad t \rightarrow \infty \quad N \rightarrow \infty$$

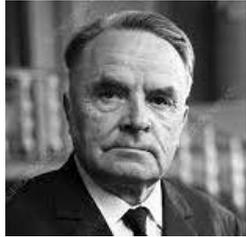


QSS



Boltzmann-Gibbs
equilibrium

Entropia e correlazioni nel θ -space



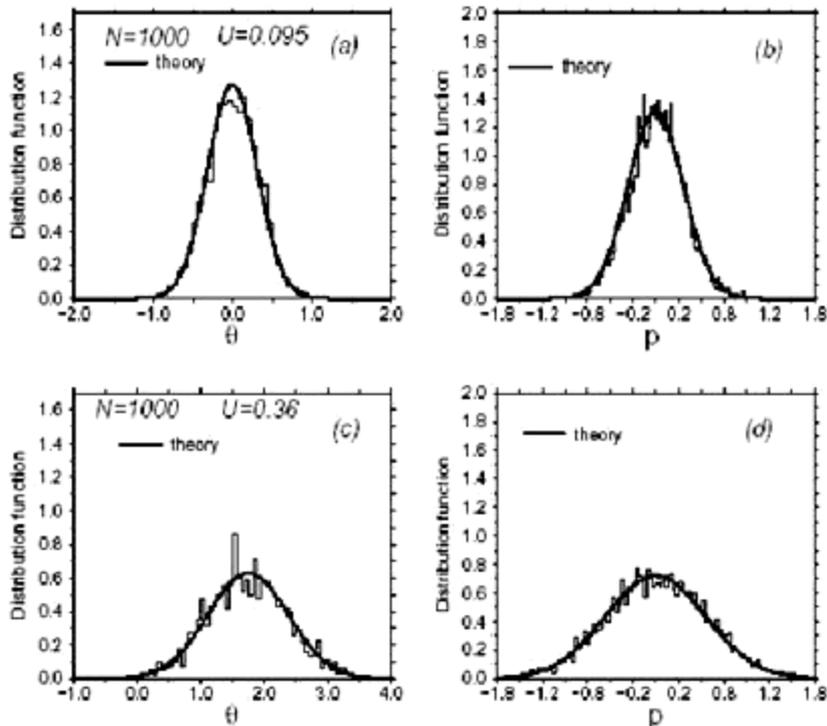
A. Vlasov (1908-75)

Equazione di Vlasov

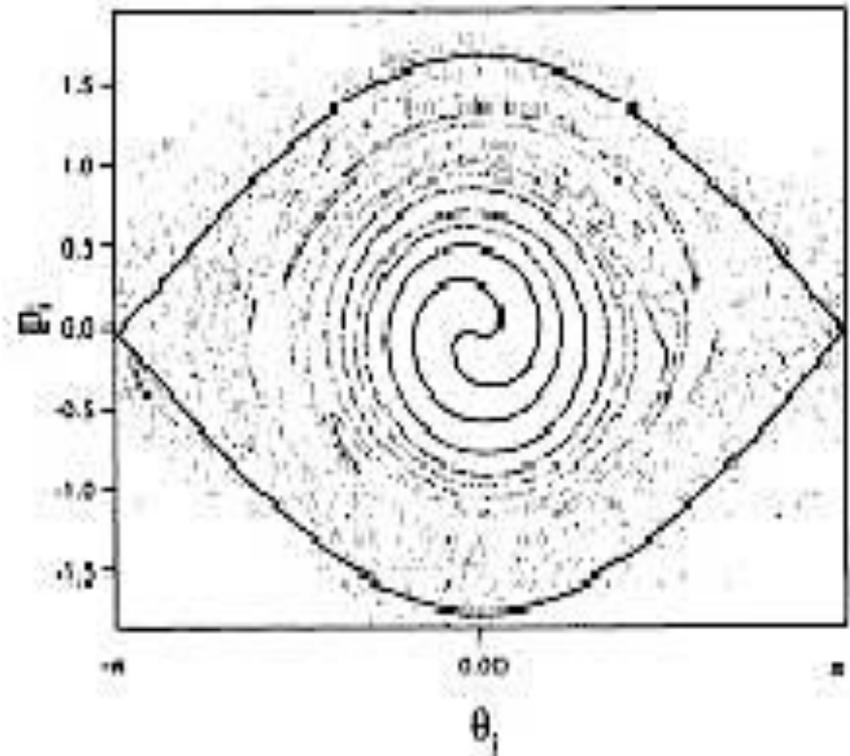
$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

Eq. del trasporto di Boltzmann in assenza di collisioni
(introdotta per lo studio di sistemi con correlazioni a lungo raggio, come i plasmi)

$f(\theta, p, t)$: funzione di distribuzione

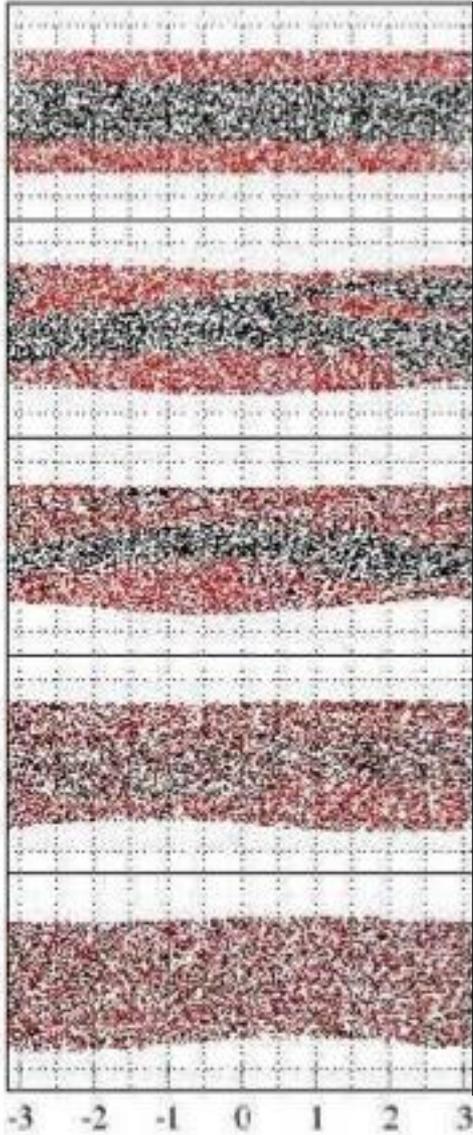


θ -space



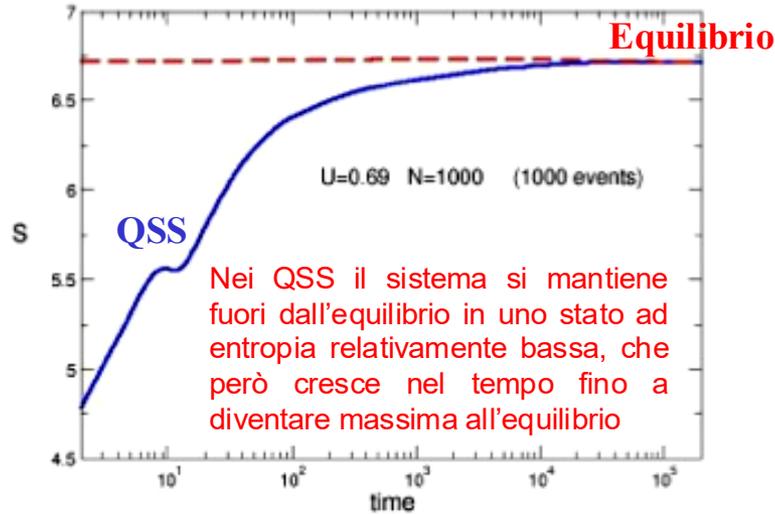
Entropia e correlazioni nel space

Equilibrio (ergodicity)

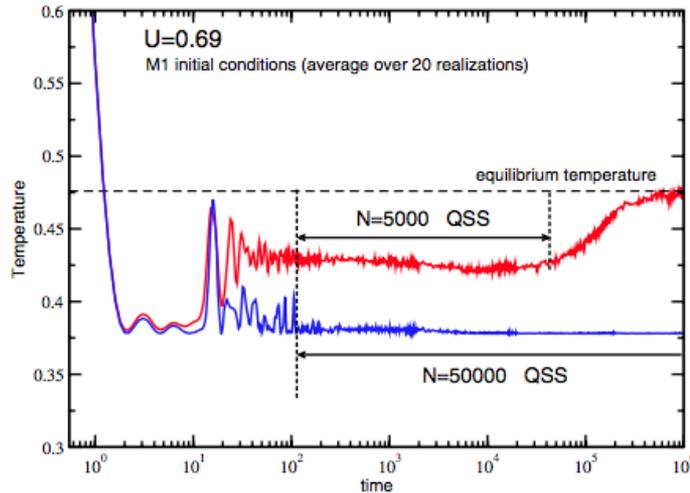


$$S(t) = \left\langle - \sum_{k=1}^n f_k(t) \ln(f_k(t)) \right\rangle$$

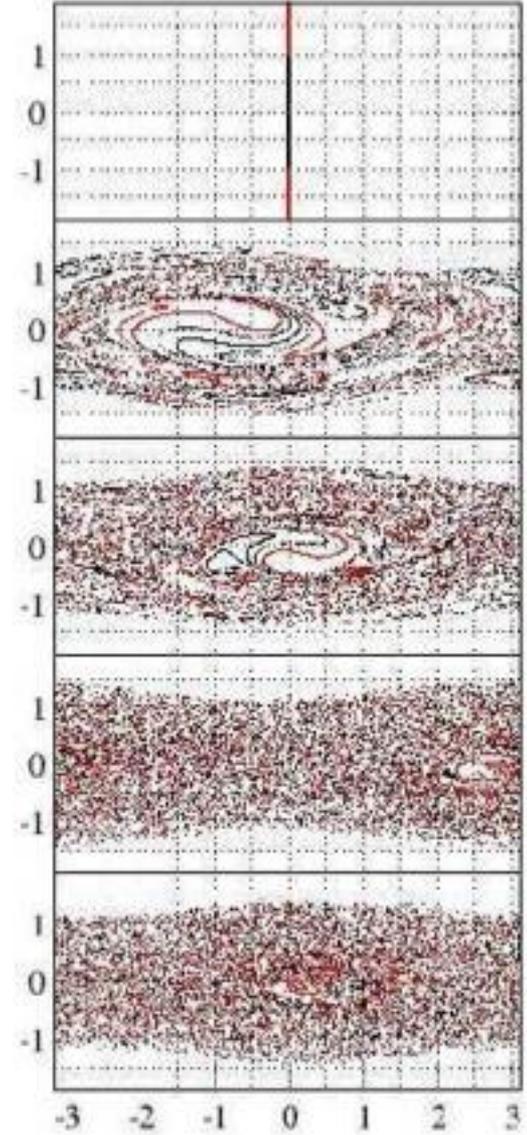
Fig.5 - A. Pluchino, V. Latora and A. Rapisarda



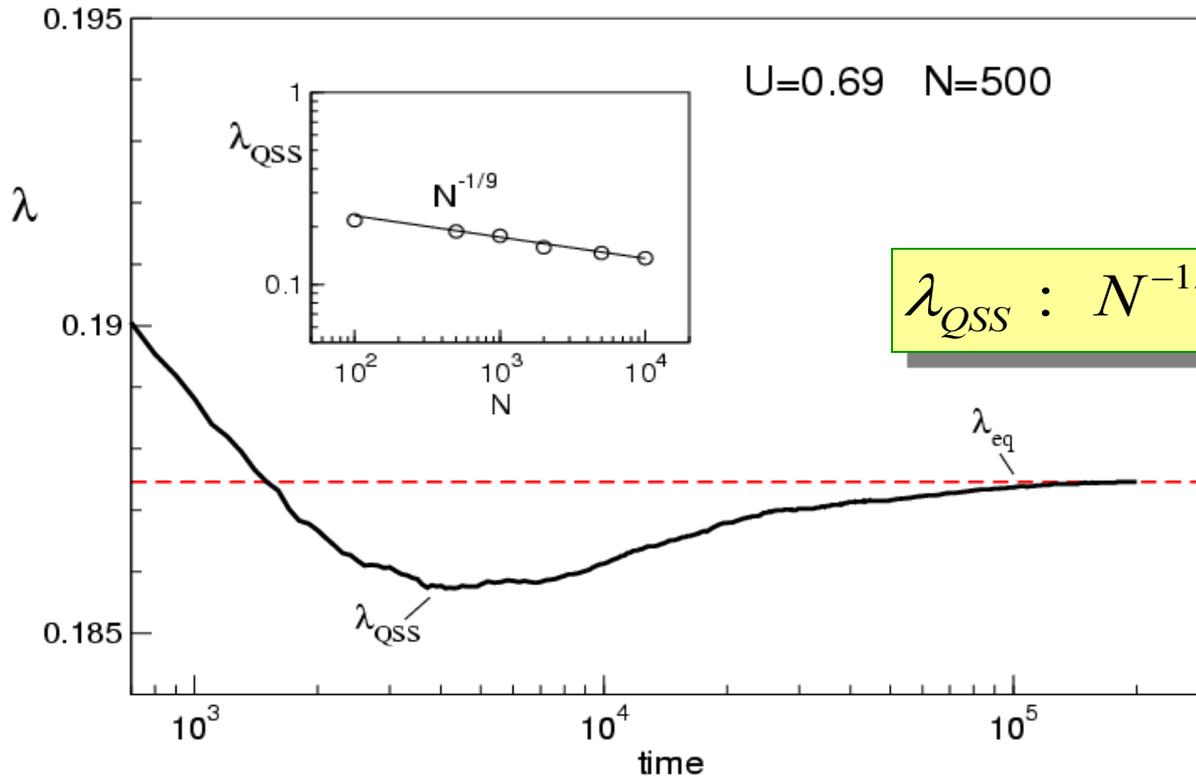
Nei QSS il sistema si mantiene fuori dall'equilibrio in uno stato ad entropia relativamente bassa, che però cresce nel tempo fino a diventare massima all'equilibrio



QSS (NO ergodicity)



L'esponente max. di Lyapunov tende a zero nei QSS

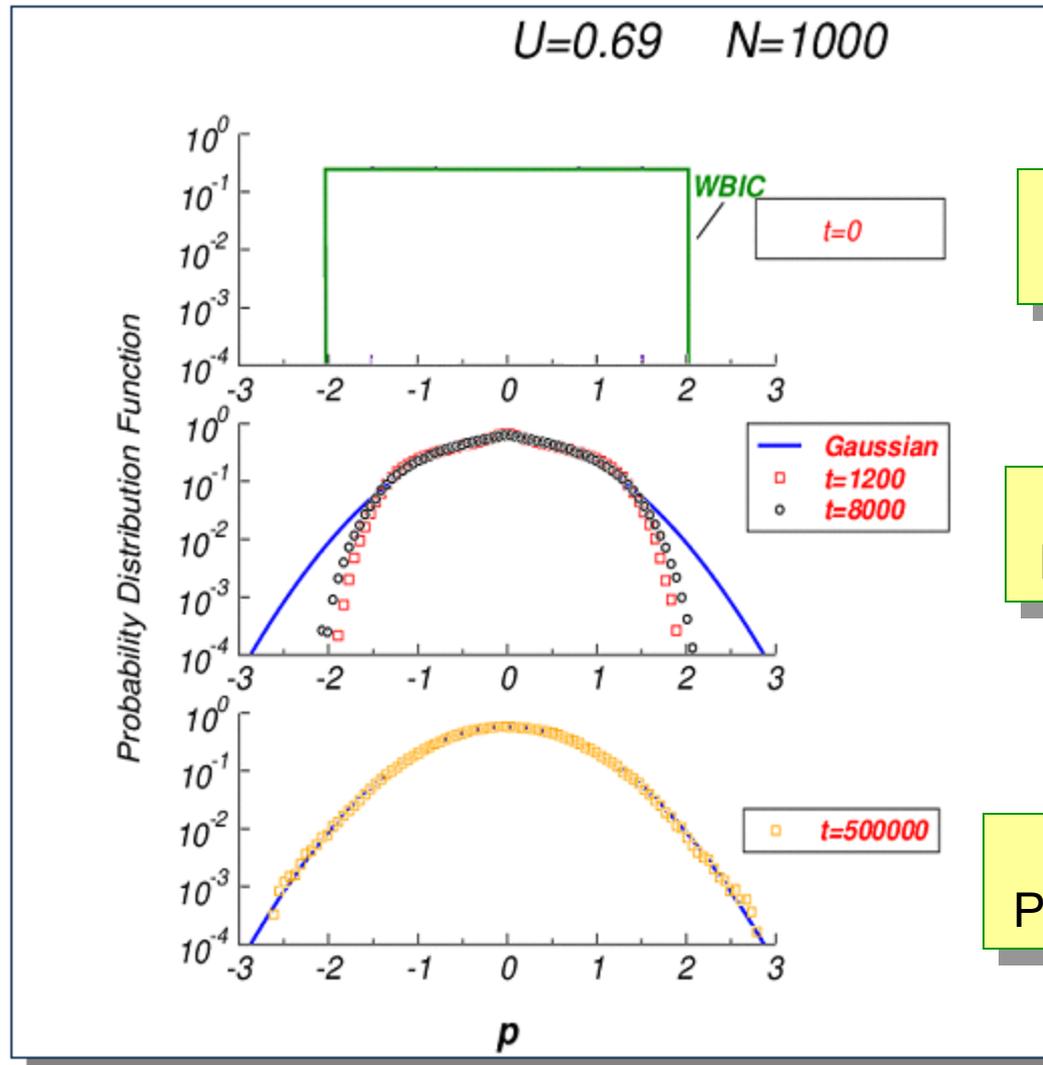


Nel regime QSS
 l'esponente
 massimale di
 Lyapunov tende a
 zero quando la size
 N del sistema tende
 all'infinito, rivelando
 così una situazione
 di "WEAK MIXING".

Questo scaling può essere
 ottenuto dalla relazione...

$$\lambda \propto M^{2/3} \propto (N^{-1/3})^{1/3} = N^{-1/9}$$

Distribuzione di probabilità delle velocità non Gaussiana nei QSS

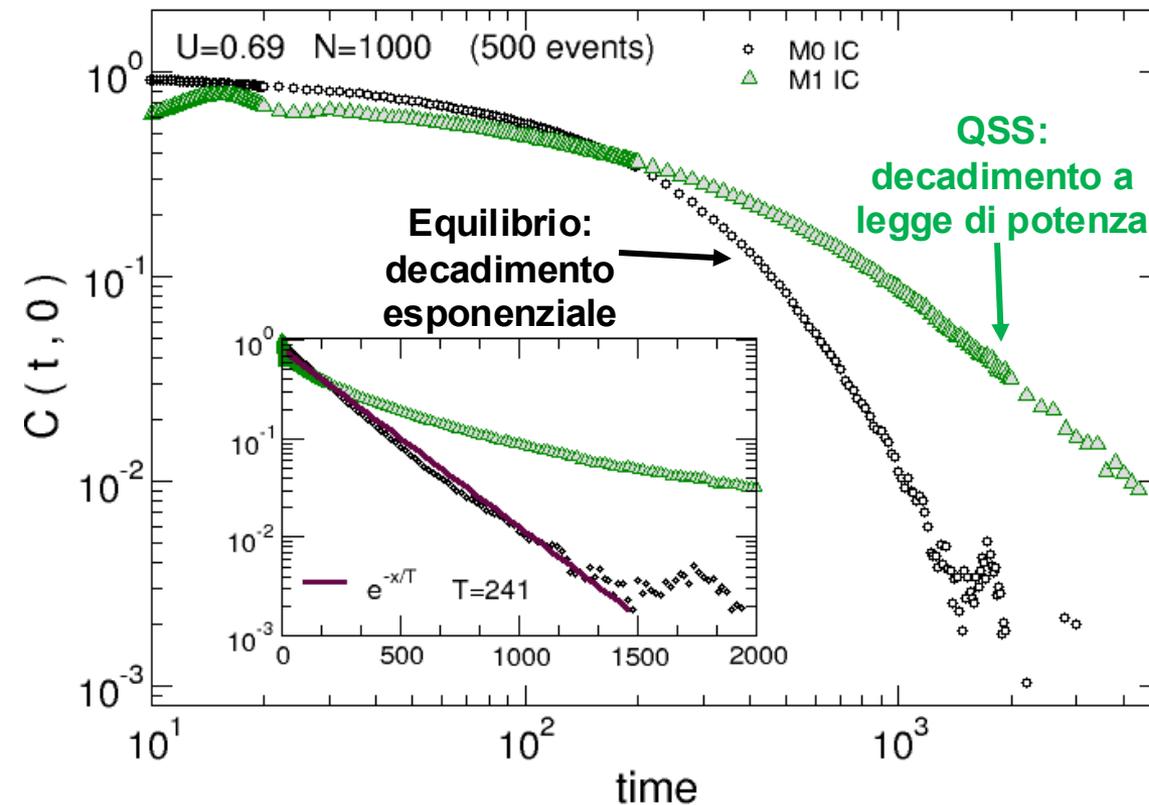


Condizioni iniziali
Water Bag

Regime QSS:
PDF non gaussiana

Equilibrio:
PDF gaussiana (MB)

Correlazioni delle velocità



Funzione di auto-correlazione delle velocità

$$C(t,0) = \frac{\langle \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(0) \rangle - \langle \mathbf{P}(t) \rangle \langle \mathbf{P}(0) \rangle}{\sigma(t)\sigma(0)}$$

dove:

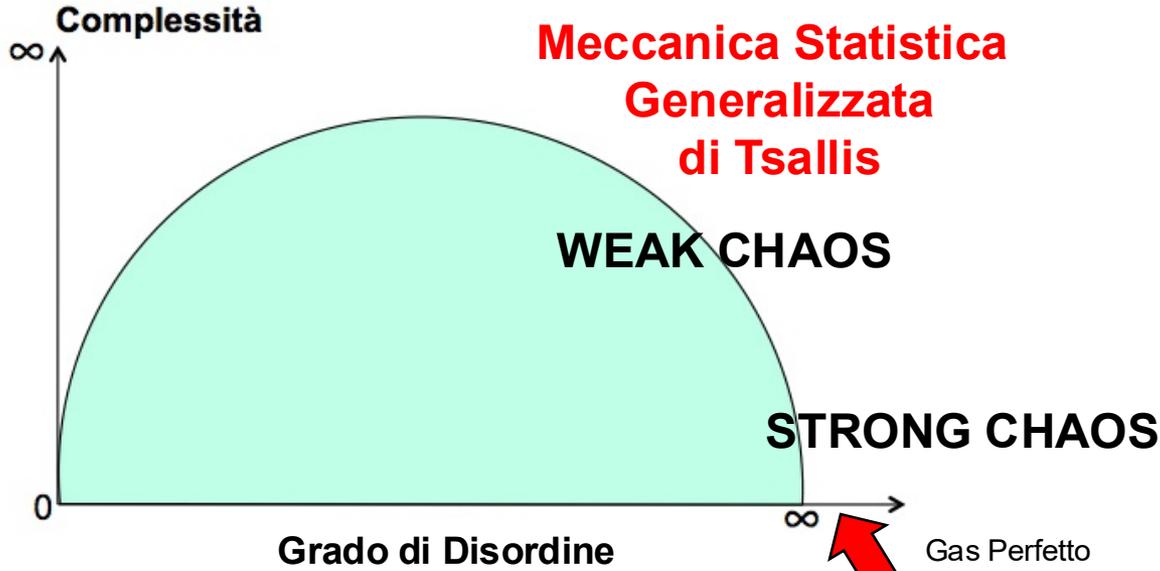
$$\mathbf{P}(t) = (p_1, p_2, \dots, p_N)$$

è il **vettore velocità**, le parentesi angolari indicano una media sugli eventi, e $\sigma(t)$ è la deviazione standard al tempo t.

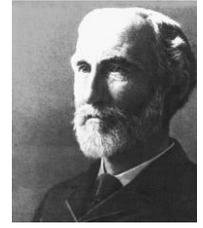
La Legge di Potenza



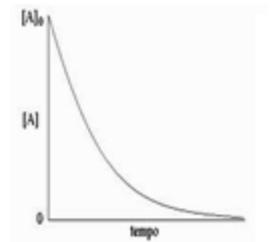
Tutti gli indizi conducono verso una Meccanica Statistica generalizzata....



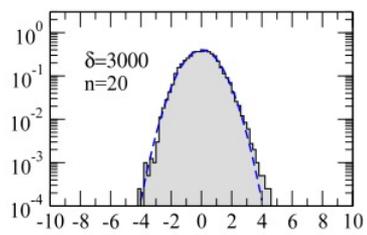
Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis



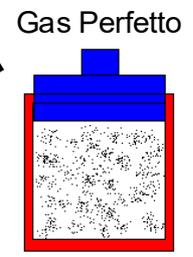
Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs



ESPONENZIALE



GAUSSIANA

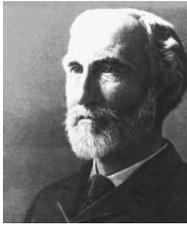


Meccanica Statistica di Tsallis

Nell'ultima decade molti sforzi sono stati compiuti per capire se e fino a che punto la Meccanica Statistica di Boltzmann Gibbs (BG) possa essere **generalizzata** ed estesa ai sistemi lontani dall'equilibrio, nei casi in cui le ipotesi di **strong chaos ed ergodicità** siano violate e la **dinamica** del sistema giochi un ruolo fondamentale...

In particolare, uno di questi tentativi è stato compiuto da **Constantino Tsallis** a partire dalla fine degli anni '80 con la sua **MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA o NON-ESTENSIVA**

J. Stat. Phys. 52 (1988) 479



Entropia di Boltzmann-Gibbs

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i)$$

con $\sum_i p_i = 1$.

dove W indica il numero di microstati. Nel caso in cui valga il principio di equiprobabilità a priori $p_i = \frac{1}{W}$, allora si ritrova l'entropia microcanonica: $S = k \ln(W)$

Quella di BG è l'unica forma entropica a soddisfare gli «assiomi di Khinchin»

Si supponga di avere una funzione entropica $S(\{p_i\})$ tale che:

- 1) $S(\{p_i\})$ sia una funzione continua di $\{p_i\}$;
- 2) $S(p_i = \frac{1}{W}, \forall i)$ sia monotonicamente crescente rispetto al numero totale di possibilità W ;
- 3) $S(p_1, p_2, \dots, p_w, 0) = S(p_1, p_2, \dots, p_w)$;
- 4) $S(A + B) = S(A) + S(B|A)$, con $S(B|A) \equiv \sum_{i=1}^{W_A} p_i^A S(\{p_{ij}^{A+B} / p_i^A\})$.

A e B indipendenti: S è ADDITIVA

$$S(A + B) = S(A) + S(B)$$

Meccanica Statistica di Tsallis

Nell'ultima decade molti sforzi sono stati compiuti per capire se e fino a che punto la Meccanica Statistica di Boltzmann Gibbs (BG) possa essere **generalizzata** ed estesa ai sistemi lontani dall'equilibrio, nei casi in cui le ipotesi di **strong chaos ed ergodicità** siano violate e la **dinamica** del sistema giochi un ruolo fondamentale...

In particolare, uno di questi tentativi è stato compiuto da **Constantino Tsallis** a partire dalla fine degli anni '80 con la sua **MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA o NON-ESTENSIVA**

J. Stat. Phys. 52 (1988) 479



Entropia di Tsallis

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad p_i = \frac{1}{W} \quad \longrightarrow \quad S_q = k \ln_q W \quad (S_1 = S_{BG})$$

con $\sum_i p_i = 1$.

dove

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \equiv \ln_q x \quad (x > 0; \ln_1 x = \ln x)$$

è il q-logaritmo

limite notevole

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{x^a - 1}{a} = \ln(x)$$

Meccanica Statistica di Tsallis

Nell'ultima decade molti sforzi sono stati compiuti per capire se e fino a che punto la Meccanica Statistica di Boltzmann Gibbs (BG) possa essere **generalizzata** ed estesa ai sistemi lontani dall'equilibrio, nei casi in cui le ipotesi di **strong chaos ed ergodicità** siano violate e la **dinamica** del sistema giochi un ruolo fondamentale...

In particolare, uno di questi tentativi è stato compiuto da **Constantino Tsallis** a partire dalla fine degli anni '80 con la sua **MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA o NON-ESTENSIVA**

J. Stat. Phys. 52 (1988) 479



Entropia di Tsallis

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad \xrightarrow{p_i = \frac{1}{W}} \quad S_q = k \ln_q W \quad (S_1 = S_{BG})$$

con $\sum_i p_i = 1$,

dove
 $y = \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \equiv \ln_q x \quad (x > 0; \ln_1 x = \ln x)$
 è il q-logaritmo

Quella di Tsallis è l'unica forma entropica a soddisfare gli «assiomi di Abe»

Si supponga di avere una funzione entropica $S(\{p_i\})$ tale che:

- 1) $S(\{p_i\})$ sia una funzione continua di $\{p_i\}$;
- 2) $S(p_i = \frac{1}{W}, \forall i)$ sia monotonicamente crescente rispetto al numero totale di possibilità W ;
- 3) $S(p_1, p_2, \dots, p_w, 0) = S(p_1, p_2, \dots, p_w)$;
- 4) $\frac{S(A+B)}{k} = \frac{S(A)}{k} + \frac{S(B|A)}{k} + (1 - q) \frac{S(A)}{k} \frac{S(B|A)}{k}$

A e B indipendenti: S_q è NON ADDITIVA (per $q \neq 1$)

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}$$

La Meccanica Statistica è q-invariante!

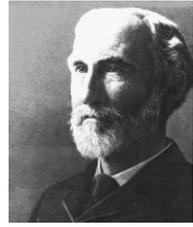
Nell'ultima decade molti sforzi sono stati compiuti per capire se e fino a che punto la Meccanica Statistica di Boltzmann Gibbs (BG) possa essere **generalizzata** ed estesa ai sistemi lontani dall'equilibrio, nei casi in cui le ipotesi di **strong chaos ed ergodicità** siano violate e la **dinamica** del sistema giochi un ruolo fondamentale...

In particolare, uno di questi tentativi è stato compiuto da **Constantino Tsallis** a partire dalla fine degli anni '80 con la sua **MECCANICA STATISTICA GENERALIZZATA o NON-ESTENSIVA**

J. Stat. Phys. 52 (1988) 479



L'entropia di Tsallis si riduce all'entropia di Boltzmann-Gibbs quando l'indice entropico **q** tende al valore **1**



La quantità $|q - 1|$ misura dunque le correlazioni presenti nel sistema!

L'entropia di BG è sempre **additiva** ed è **estensiva** per sistemi all'equilibrio privi di correlazioni (**strong mixing**, $q=1$)

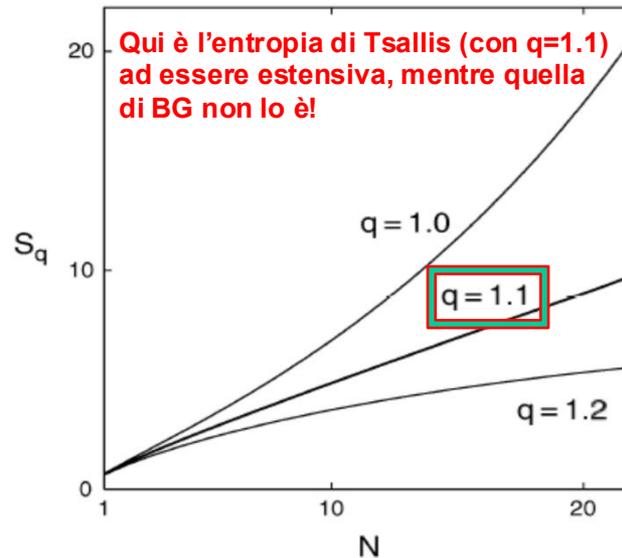
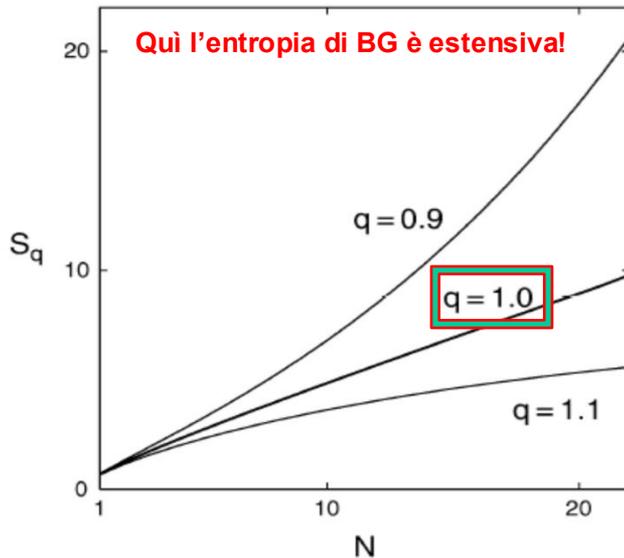
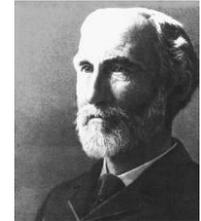
$$S(A + B) = S(A) + S(B)$$

L'entropia di Tsallis è sempre **non additiva** ed è **estensiva** per sistemi fuori equilibrio con correlazioni (**weak mixing**, $q>1$)

$$\frac{S_q(A + B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}$$

E' il sistema a «scegliere» la forma entropica corretta

QUINDI E' IL SISTEMA A «DECIDERE» QUAL'E' L'ENTROPIA PIU' CORRETTA DA UTILIZZARE PER DESCRIVERLO: SARA' QUELLA CHE SODDISFA L'ESTENSIVITA', OSSIA QUELLA CHE SCALA LINEARMENTE CON N NEL LIMITE TERMODINAMICO (TEST DELL'ESTENSIVITA').



La massimizzazione della S_q permette di ottenere una generalizzazione del peso di Boltzmann che si può esprimere attraverso una funzione q -esponenziale, che per $q > 1$ è una legge di potenza:

$$e_q\left(-\frac{E}{kT}\right) = \left[1 - (1-q)\frac{E}{kT}\right]^{\frac{1}{1-q}} \rightarrow e^{-\frac{E}{kT}} \text{ per } q \rightarrow 1$$

limite notevole

$$\lim_{a \rightarrow 0} (1 - ax)^{\frac{1}{a}} = e^{-x}$$

La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

TYPICAL SIMPLE SYSTEMS:

$$W(N) \propto \mu^N \quad (\mu > 1)$$

Short-range space-time correlations

Markovian processes (short memory), Additive noise

Strong chaos (positive maximal Lyapunov exponent), **Ergodic**, Riemannian geometry

Short-range many-body interactions, weakly quantum-entangled subsystems

Linear and homogeneous Fokker-Planck equations, Gaussians

→ Boltzmann-Gibbs entropy (additive)

→ Exponential dependences (Boltzmann-Gibbs weight, ...)



TYPICAL COMPLEX SYSTEMS:

$$\text{e.g., } W(N) \propto N^\rho \quad (\rho > 0)$$

Long-range space-time correlations

Non-Markovian processes (long memory), Additive and multiplicative noises

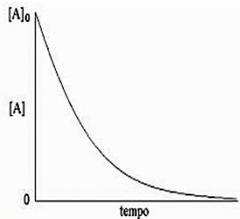
Weak chaos (zero maximal Lyapunov exponent), **Nonergodic**, Multifractal geometry

Long-range many-body interactions, strongly quantum-entangled subsystems

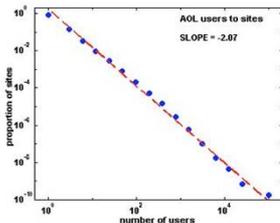
Nonlinear and/or inhomogeneous Fokker-Planck equations, q -Gaussian

→ Entropy S_q (nonadditive)

→ q -exponential dependences (asymptotic power-laws)

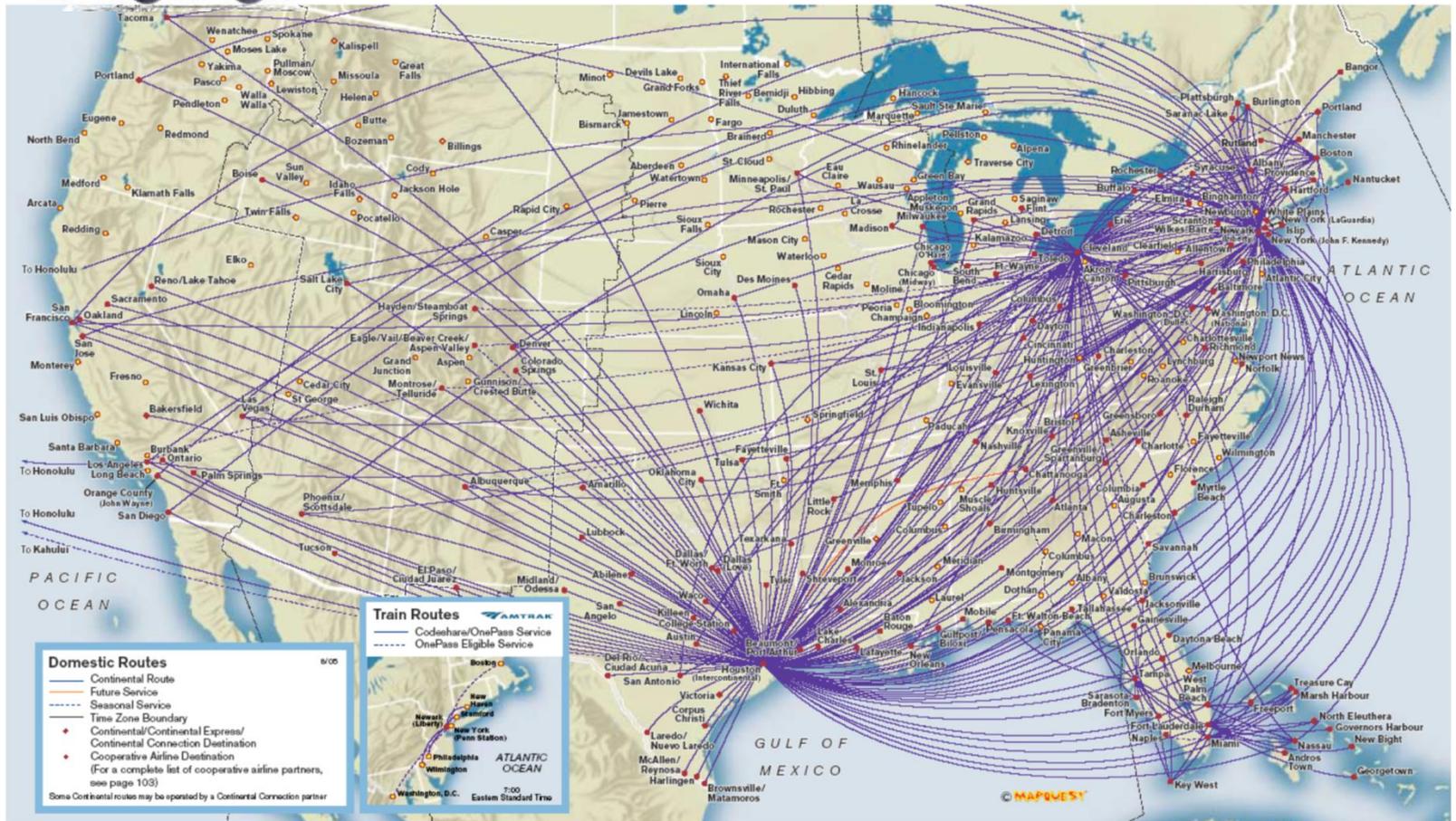


ESPONENZIALE



LEGGE DI POTENZA

La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi





La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

CONTRIBUTORS (6347 MANUSCRIPTS)

USA	2237	AUSTRIA	93	SLOVENIA	19	URUGUAY	5
ITALY	1035	AUSTRALIA	89	SAUDI ARABIA	17	VIETNAM	5
GERMANY	965	PORTUGAL	89	IRELAND	14	BOLIVIA	4
BRAZIL	885	ROMANIA	81	VENEZUELA	14	INDONESIA	4
UNITED KINGDOM	781	NORWAY	75	LITHUANIA	12	SENEGAL	4
CHINA	697	SWEDEN	69	CYPRUS	11	BELARUS	3
FRANCE	685	TAIWAN	63	MOROCCO	11	MACEDONIA	3
SWITZERLAND	643	UKRAINE	57	ARMENIA	10	MOLDOVA	2
RUSSIA	539	EGYPT	48	BELARUS	10	NORTH CYPRUS	2
JAPAN	488	PAKISTAN	47	PUERTO RICO	10	PANAMA	2
INDIA	402	SLOVAKIA	45	SINGAPORE	10	PHILIPINES	2
SPAIN	360	DENMARK	43	NEW ZEALAND	9	UN. ARAB EMIRATES	2
POLAND	208	SERBIA	37	FRENCH GUIANA	8	BAHRAIN	1
GREECE	190	FINLAND	35	GEORGIA	8	BENIN	1
CANADA	179	SOUTH AFRICA	33	KHAZHAKSTAN	8	ECUADOR	1
NETHERLANDS	149	BELGIUM	32	AZERBAIJAN	7	ETHIOPIA	1
CZECH REPUBLIC	141	COLOMBIA	32	ESTONIA	7	IRAQ	1
IRAN	136	BANGLADESH	31	JORDAN	7	LUXENBOURG	1
ARGENTINA	132	CHILE	31	ALBANIA	6	OMAN	1
TURKEY	128	ALGERIA	26	CAMEROON	6	QATAR	1
SOUTH KOREA	113	CROATIA	25	ICELAND	5	SRI LANKA	1
ISRAEL	112	BULGARIA	20	NIGERIA	5	TUNISIA	1
MEXICO	110	CUBA	19	PERU	5	UZBEKISTAN	1
HUNGARY	94	MALAYSIA	19	THAILAND	5	YEMEN	1

12820 SCIENTISTS 96 COUNTRIES

[Updated 7 October 2017]



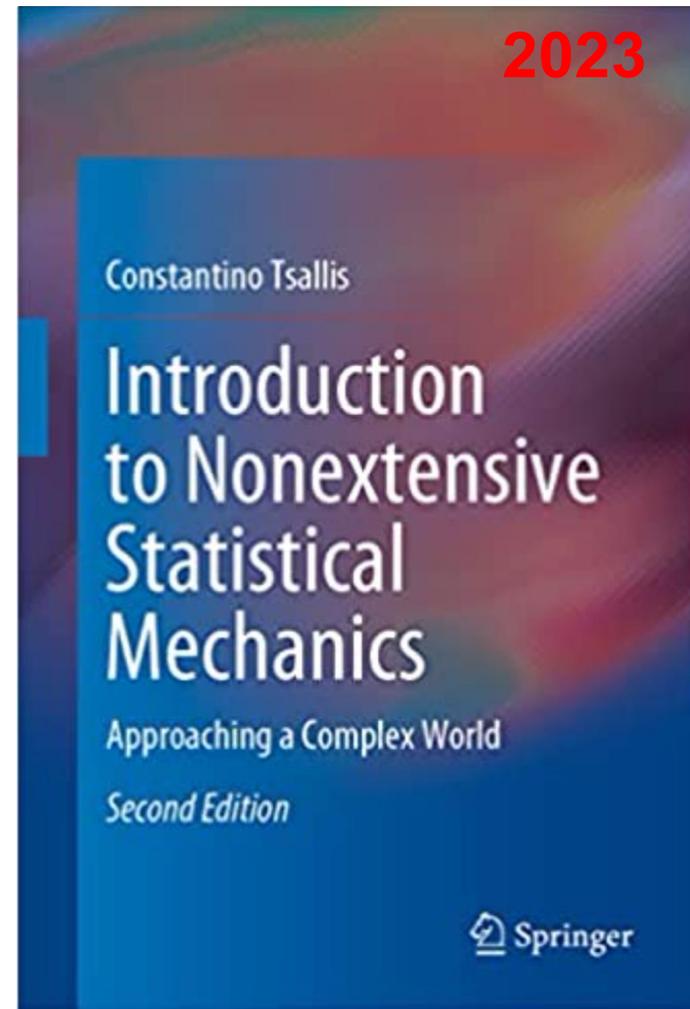
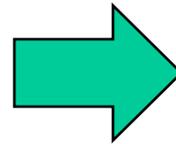
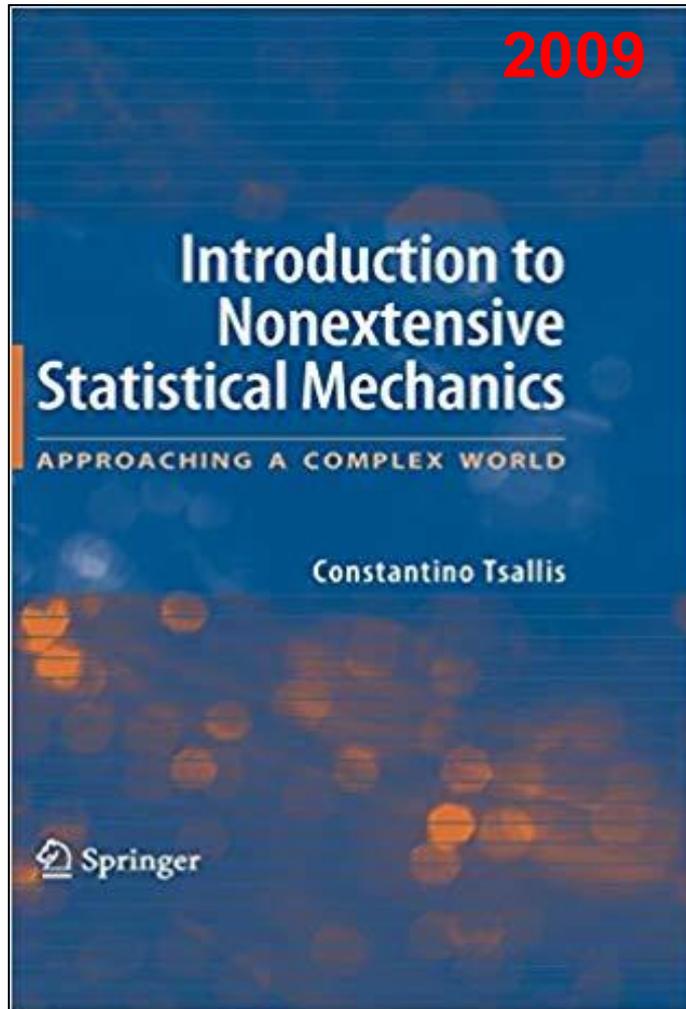
La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

BOOKS AND SPECIAL ISSUES ON NONEXTENSIVE STATISTICAL MECHANICS

1999	2001	2002	2002	2004	2004	2004	2004
2004	2005	2005	2006	2006	2007	2009	2009
							<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Generalized Entropies: C.T., E.M.F. Curado and F.D. Nobre, Cambridge Univ. Press, in preparation</div>
2009	2010	2011	2011	2012	2013	2016	~2017



La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi





La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi





La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi



Anomalie nei sistemi con interazioni a lungo raggio

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 13, NUMBER 2

15 JANUARY 1976

Black holes and thermodynamics*

S. W. Hawking †

California Institute of Technology, Pasadena, California 91125

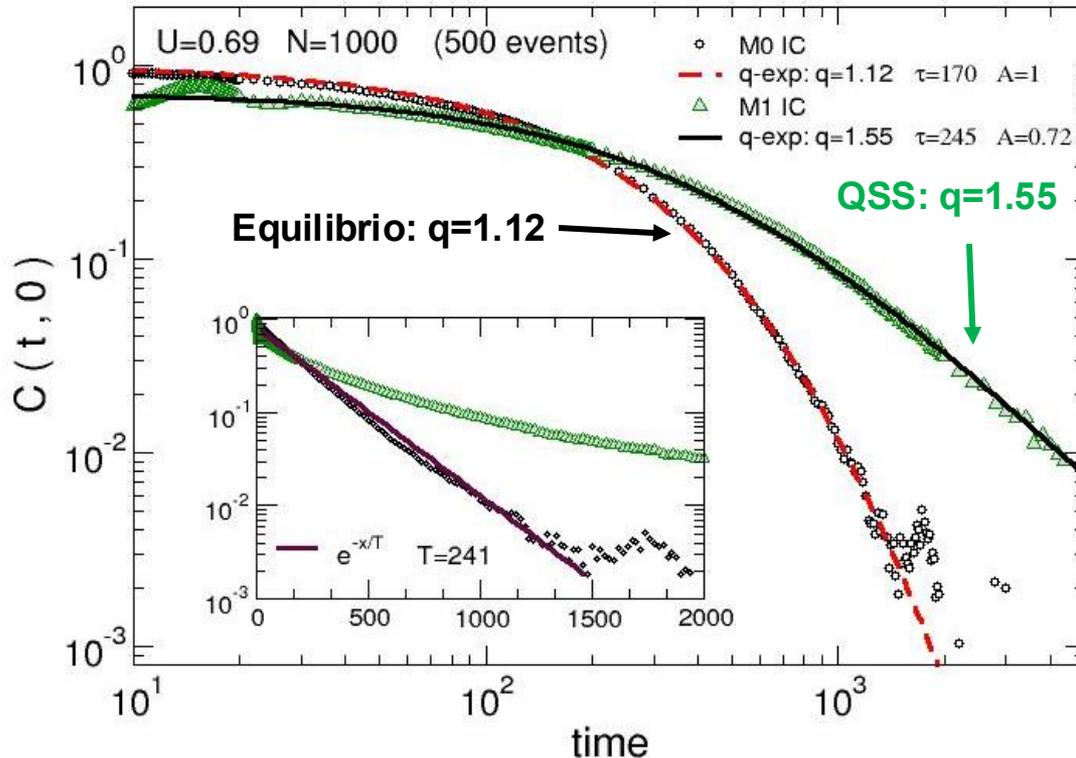
and Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England

(Received 30 June 1975)

A black hole of given mass, angular momentum, and charge can have a large number of different unobservable internal configurations which reflect the possible different initial configurations of the matter which collapsed to produce the hole. The logarithm of this number can be regarded as the entropy of the black hole and is a measure of the amount of information about the initial state which was lost in the formation of the black hole. If one makes the hypothesis that the entropy is finite, one can deduce that the black holes must emit thermal radiation at some nonzero temperature. Conversely, the recently derived quantum-mechanical result that black holes do emit thermal radiation at temperature $\kappa\hbar/2\pi kc$, where κ is the surface gravity, enables one to prove that the entropy is finite and is equal to $c^3A/4G\hbar$, where A is the surface area of the event horizon or boundary of the black hole. Because black holes have negative specific heat, they cannot be in stable thermal equilibrium except when the additional energy available is less than $1/4$ the mass of the black hole. This means that the standard statistical-mechanical canonical ensemble cannot be applied when gravitational interactions are important. Black holes behave in a completely random and time-symmetric way and are indistinguishable, for an external observer, from white holes. The irreversibility that appears in the classical limit is merely a statistical effect.



Decadimento q-exp delle correlazioni nel modello HMF



Pluchino, Latora, Rapisarda, Physica D 193 (2004) 315;

Ad esempio il decadimento della funzione di correlazione delle velocità nel modello HMF sembra essere ben riprodotto per mezzo di funzioni di tipo q-esponenziale:

$$Ae_q(x) = A[1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}$$

con $x = -t/\tau$.

Tsallis

Nel regime QSS troviamo $q = 1.55$, valore che indica uno scaling a legge di potenza (power law).

Boltzmann-Gibbs

D'altra parte, all'equilibrio il decadimento è quasi esponenziale e infatti il fit dà un q prossimo ad 1.

Violazione del Teorema Centrale del Limite

Il **Teorema Centrale del Limite** (CLT) afferma che la distribuzione delle somme di n variabili stocastiche indipendenti, per n tendente a infinito, tende ad una distribuzione normale (**gaussiana**, simmetrica con code esponenziali). Tsallis, con Umarov e Steinberg è riuscito a generalizzare il CLT a sistemi che presentino un certo tipo di **correlazioni** e ha dimostrato che in questo caso l'attrattore della distribuzione delle somme di n variabili q -correlate è una **distribuzione q -gaussiana**, che è una generalizzazione della gaussiana, sempre simmetrica ma (per $q > 1$) con code «larghe», a legge di potenza (*fat tails*).

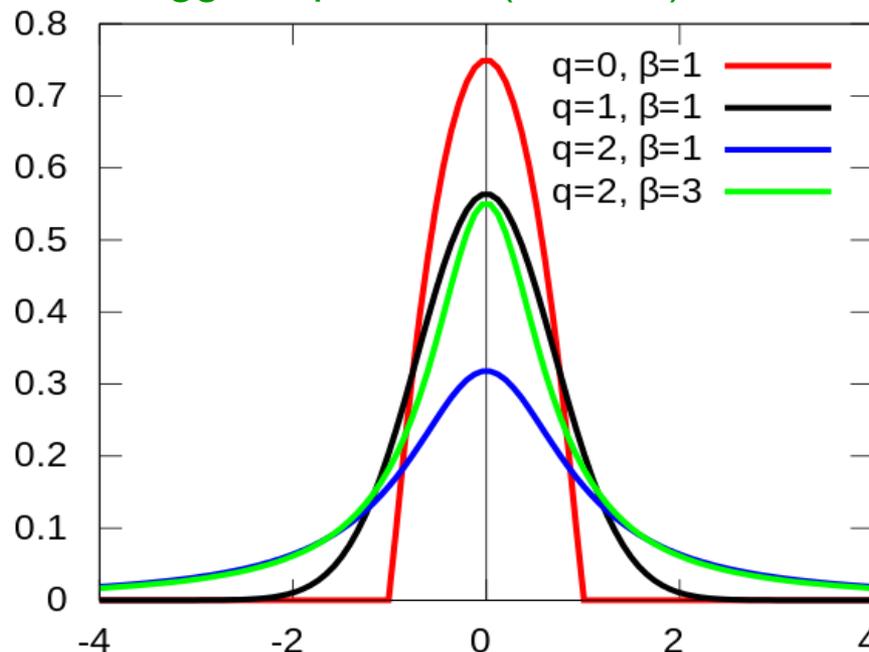
$$\bar{X}_n := X_1 + \dots + X_n$$

q -gaussiana

$$f(\bar{X}) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q(-\beta \bar{X}^2)$$

q -esponenziale

$$e_q(x) = [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}$$



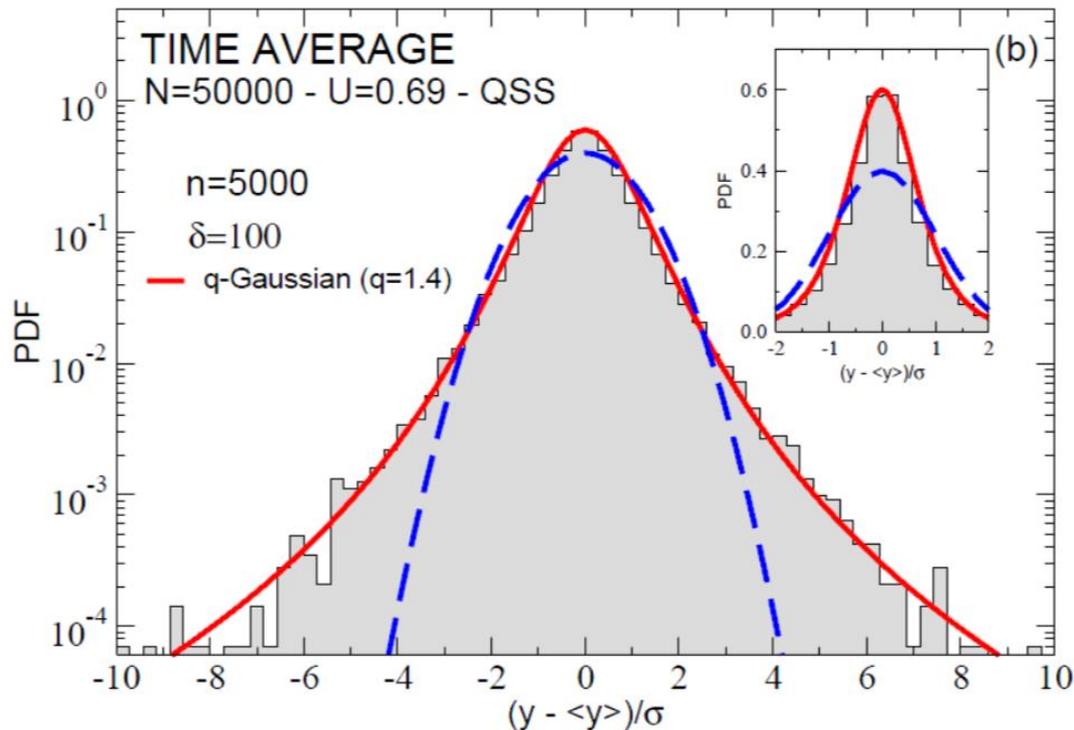
Per $q=1$
ovviamente si
ritrova la
distribuzione
gaussiana

Violazione del Teorema Centrale del Limite nel modello HMF

Se nel **modello HMF** costruiamo delle variabili y definite come somma delle velocità:

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (p_j(i) - \langle p_j \rangle) \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, N$$

si osservano delle **violazioni del CLT negli stati QSS**, dove si osservano delle distribuzioni $P(y)$ q-gaussiane, con code a legge di potenza:



La dipendenza dal range di interazione: il Modello α -XY

Il modello α -XY generalizza il modello HMF poiché adesso, data una coppia di rotatori planari i e j , tra di essi agisce una forza d'interazione che dipende dall'inverso di una certa potenza α della loro distanza reciproca in un reticolo d -dimensionale:

Anteneodo C. and Tsallis C. (1998) Phys. Rev. Lett. 80 5313

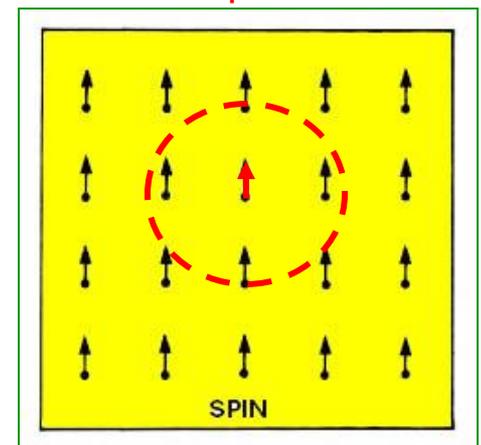
$$H_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N^0} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{1 - \cos(\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j)}{r_{ij}^\alpha}$$

α fissa il range dell'interazione ($\alpha = 0 \rightarrow$ HMF)

- se $\alpha > d$, l'interazione è a corto raggio poiché il range di interazione S assume un valore finito e ciò significa che ogni rotatore interagisce solo con pochi vicini dentro un intorno di raggio S (ad es. un cerchio in un reticolo 2D).

- se $0 \leq \alpha \leq d$, l'interazione è a lungo raggio e in particolare, per $\alpha = 0$, S tende a divergere, e si ritrovano le condizioni del modello HMF.

Esempio: $d=2$



QSS nel Modello α -XY per $d=1$

Stati quasi-stazionari (QSS) per $U=0.69$ si osservano anche nel modello α -XY:

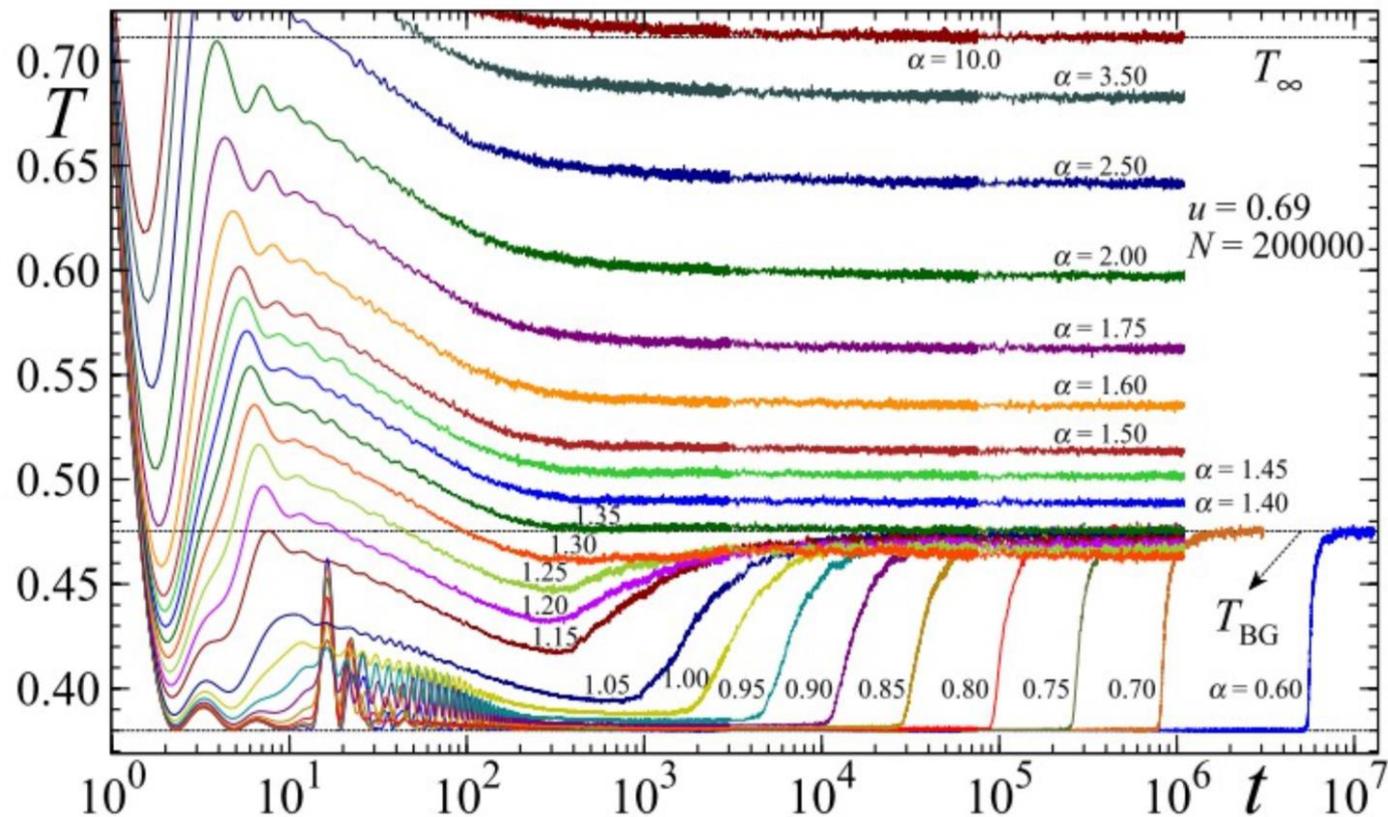
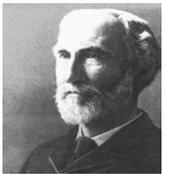
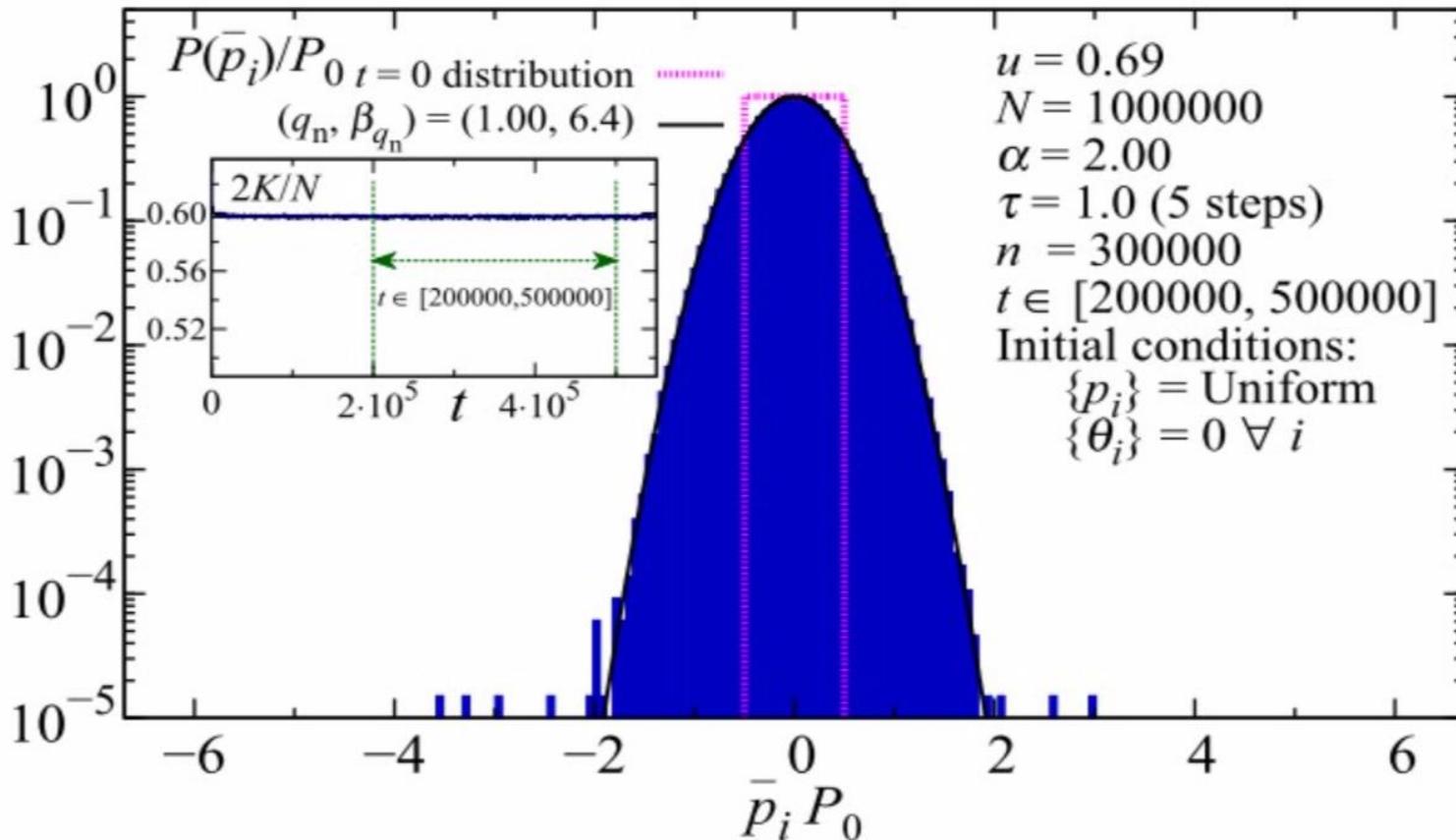


Figura 3.1.1: Dipendenza della temperatura dal tempo, $T(t)=2K(t)/N$ con valori fissati di $(u, N) = (0.69, 2000000)$, al variare del range di interazione α .

Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY ($d=1$)

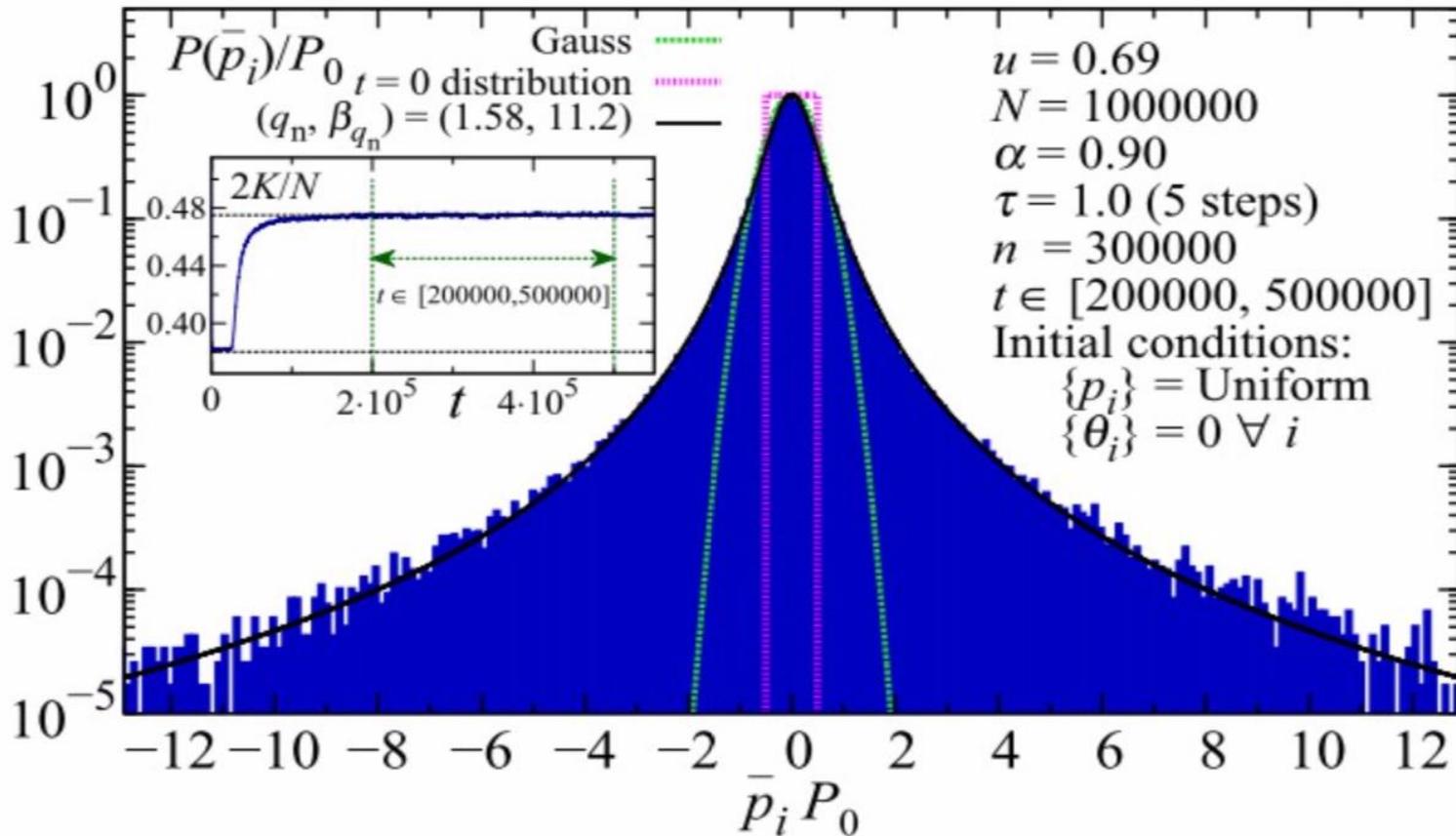
Se $d=1$, per $\alpha > 1$, ossia quando l'interazione è a corto raggio, la distribuzione delle velocità all'equilibrio è quella **gaussiana** di Boltzmann-Gibbs:



$\alpha = 2$
yields
 $q = 1$

Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY ($d=1$)

Per $\alpha < 1$, ossia quando l'interazione è a lungo raggio, il sistema resta lontano dall'equilibrio e, a parità di tutti gli altri parametri, la distribuzione delle velocità è **q-gaussiana**:



$\alpha = 0.9$
 yields
 $q = 1.58$

Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY ($d=1$)

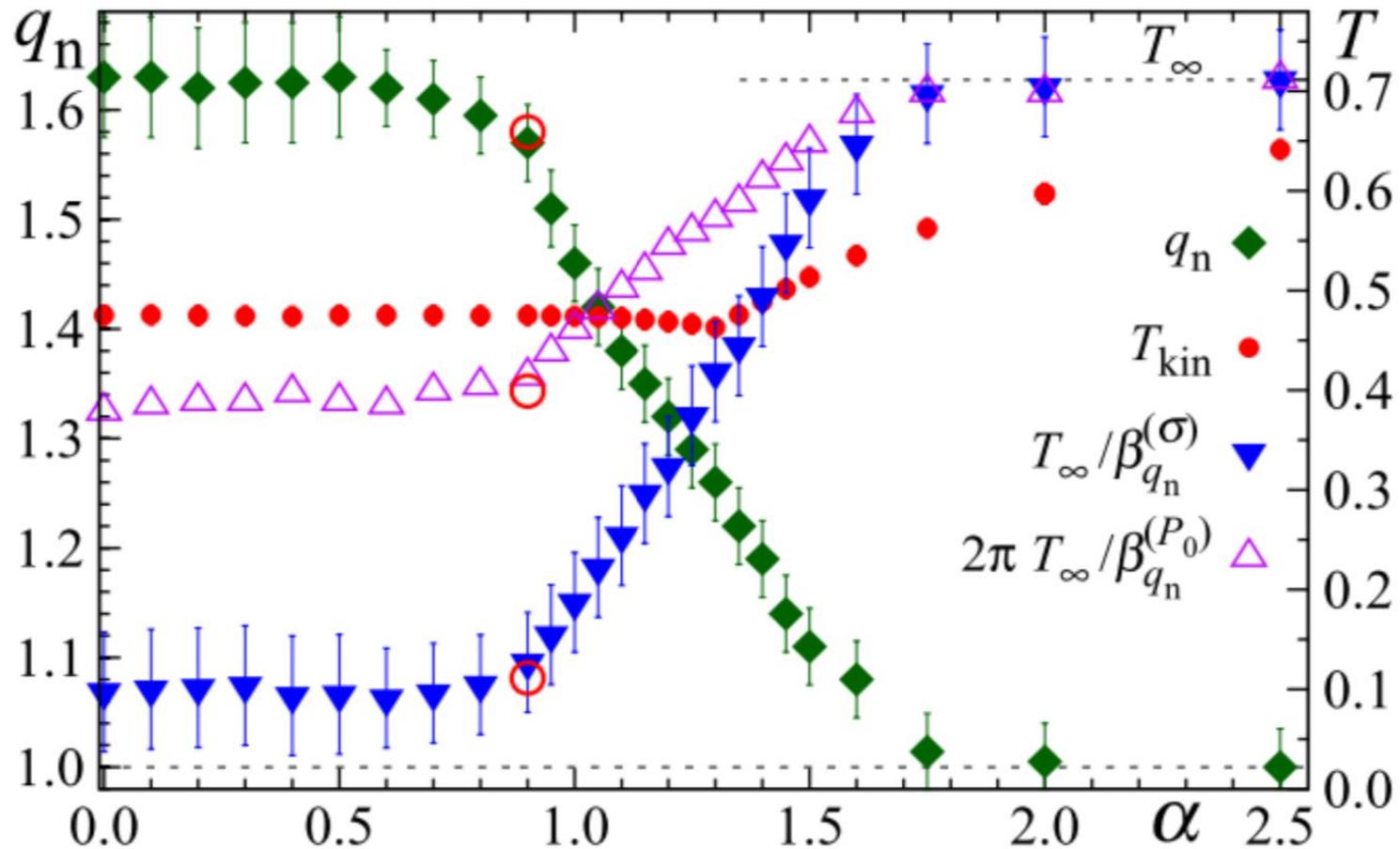
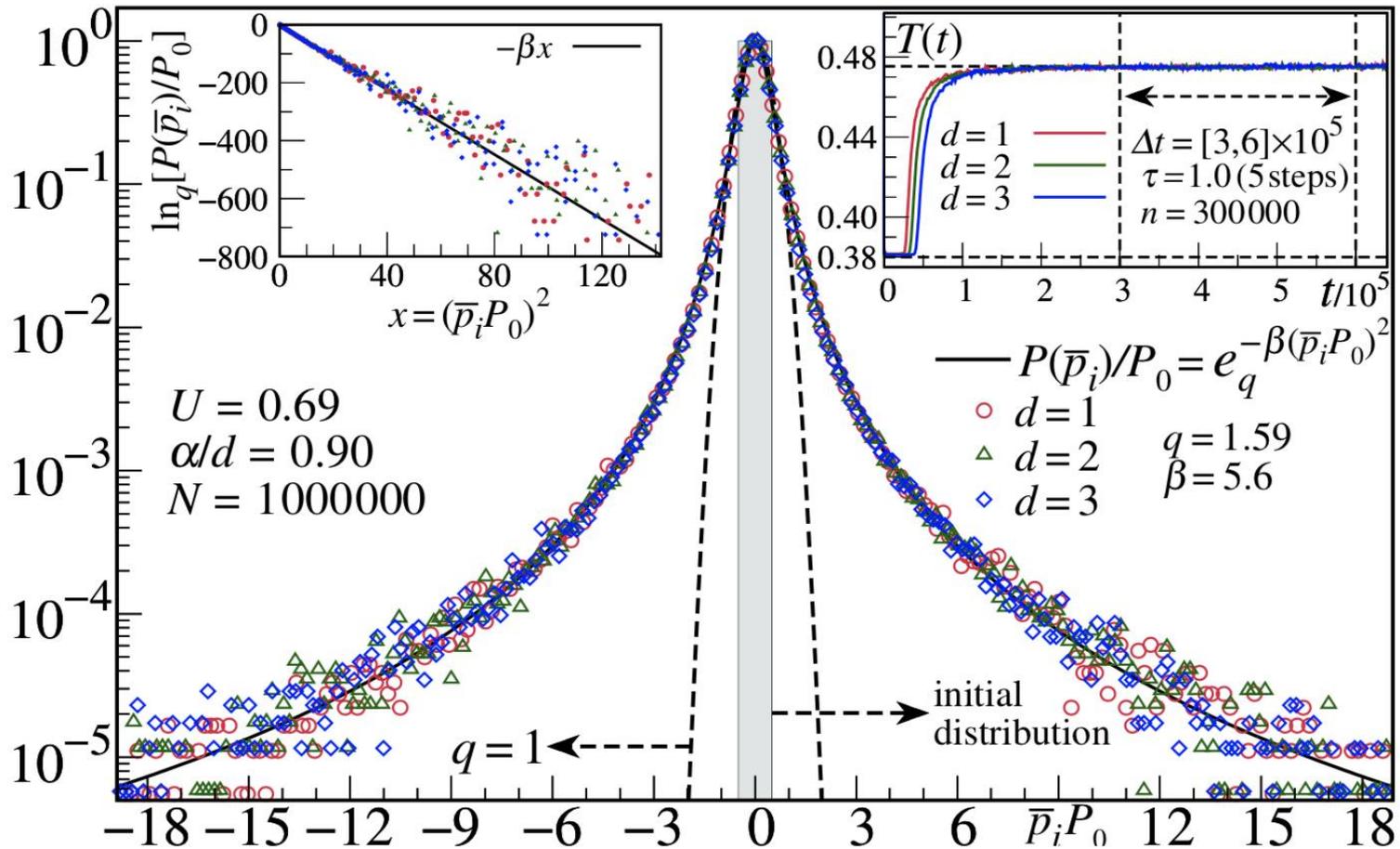


Figura 3.1.3: indice entropico q al variare del range di interazione α .

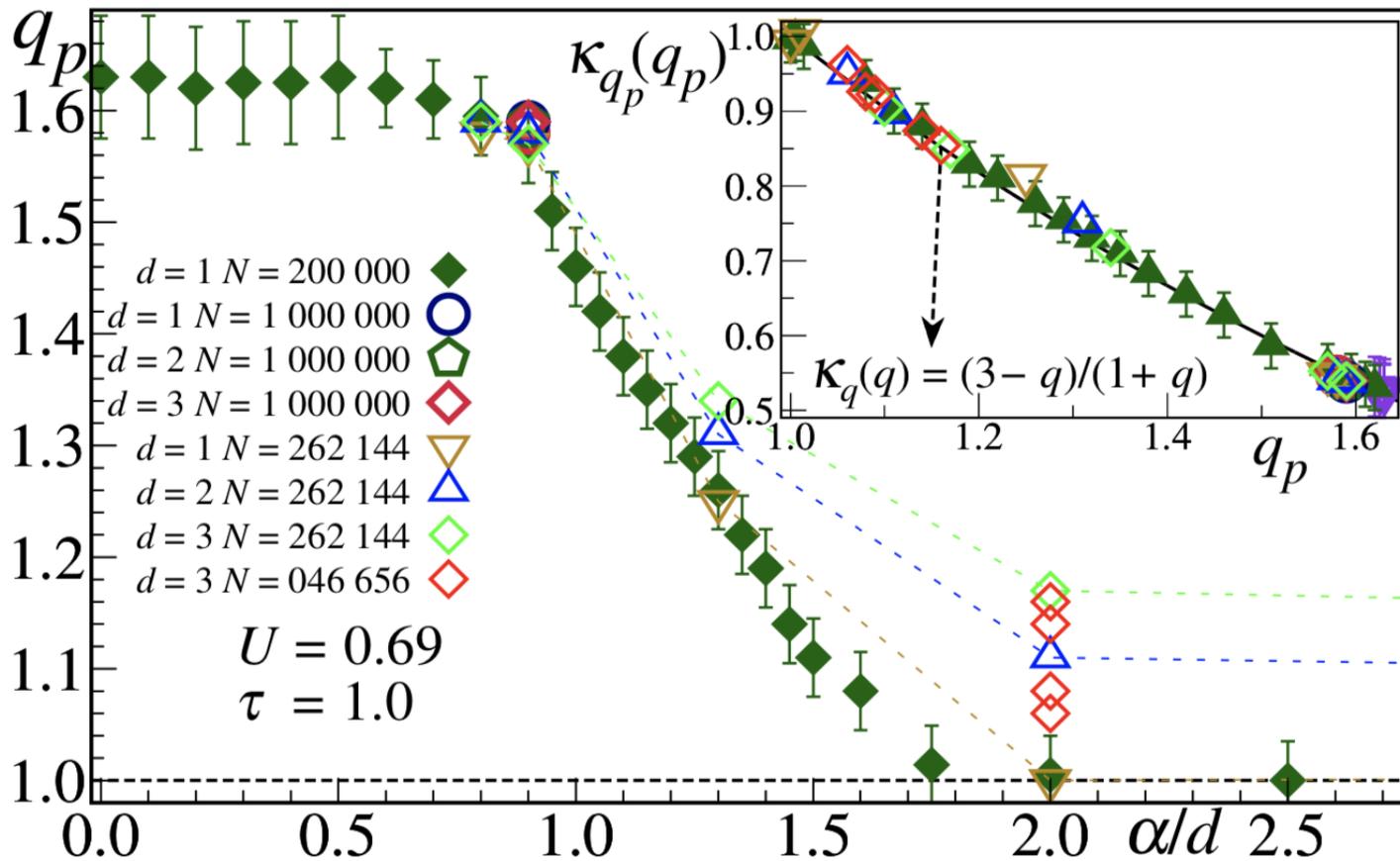
Distribuzione delle velocità nel Modello α -XY (d dimensioni)

d-DIMENSIONAL XY MODEL



CLT e sua violazione nel Modello α -XY in d dimensioni

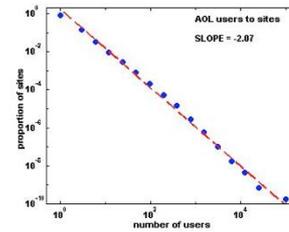
d -DIMENSIONAL XY MODEL



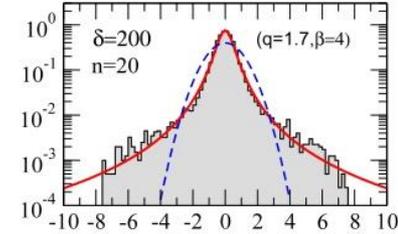
q-Statistica di Tsallis all'Edge of Chaos



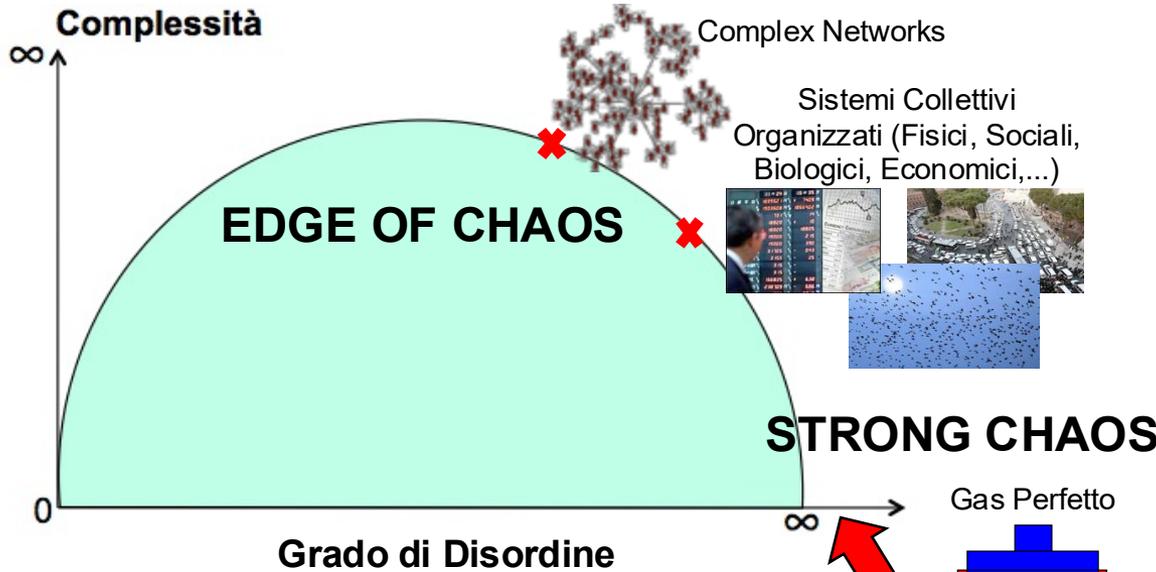
Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis



LEGGE DI POTENZA



q-GAUSSIANA

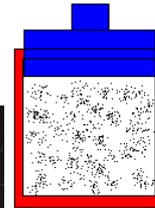


Complex Networks

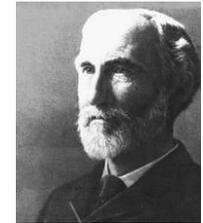
Sistemi Collettivi Organizzati (Fisici, Sociali, Biologici, Economici,...)



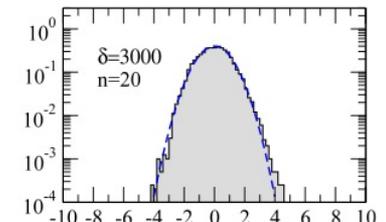
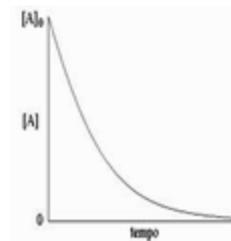
Gas Perfetto



Universo come gas perfetto di Galassie



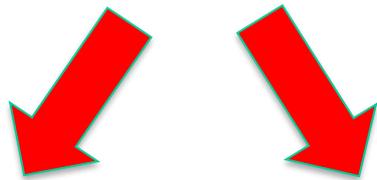
Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs



Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$



Flussi Dissipativi

Flussi Hamiltoniani

Attrattori

Orbite

1D

Punto
fisso

2D

Ciclo
Limite

3D

Caotici

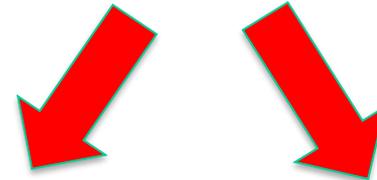
Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



Mappe Dissipative

Mappe Conservative
(area-preserving)

Attrattori

Orbite

Punto
fisso

Ciclo
Limite

Caotici

Periodiche

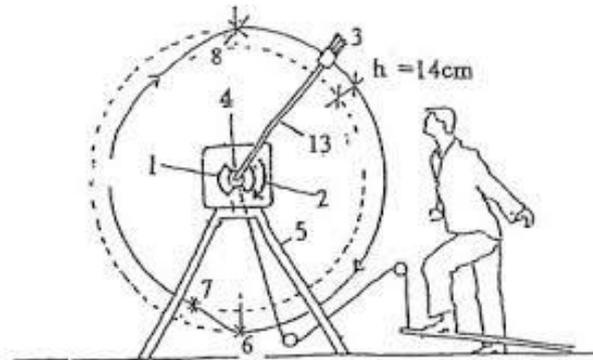
Quasi
Periodiche

Caotiche

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$



Kicked Rotator

Particle confinement in magnetic traps,
particle dynamics in accelerators,
comet dynamics,
ionization of Rydberg atoms,
electron magneto-transport

Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

STANDARD MAP (Chirikov 1969)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i \pmod{2\pi}$$

$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1} \pmod{2\pi}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$



Mappe Conservative
(area-preserving)

Orbite

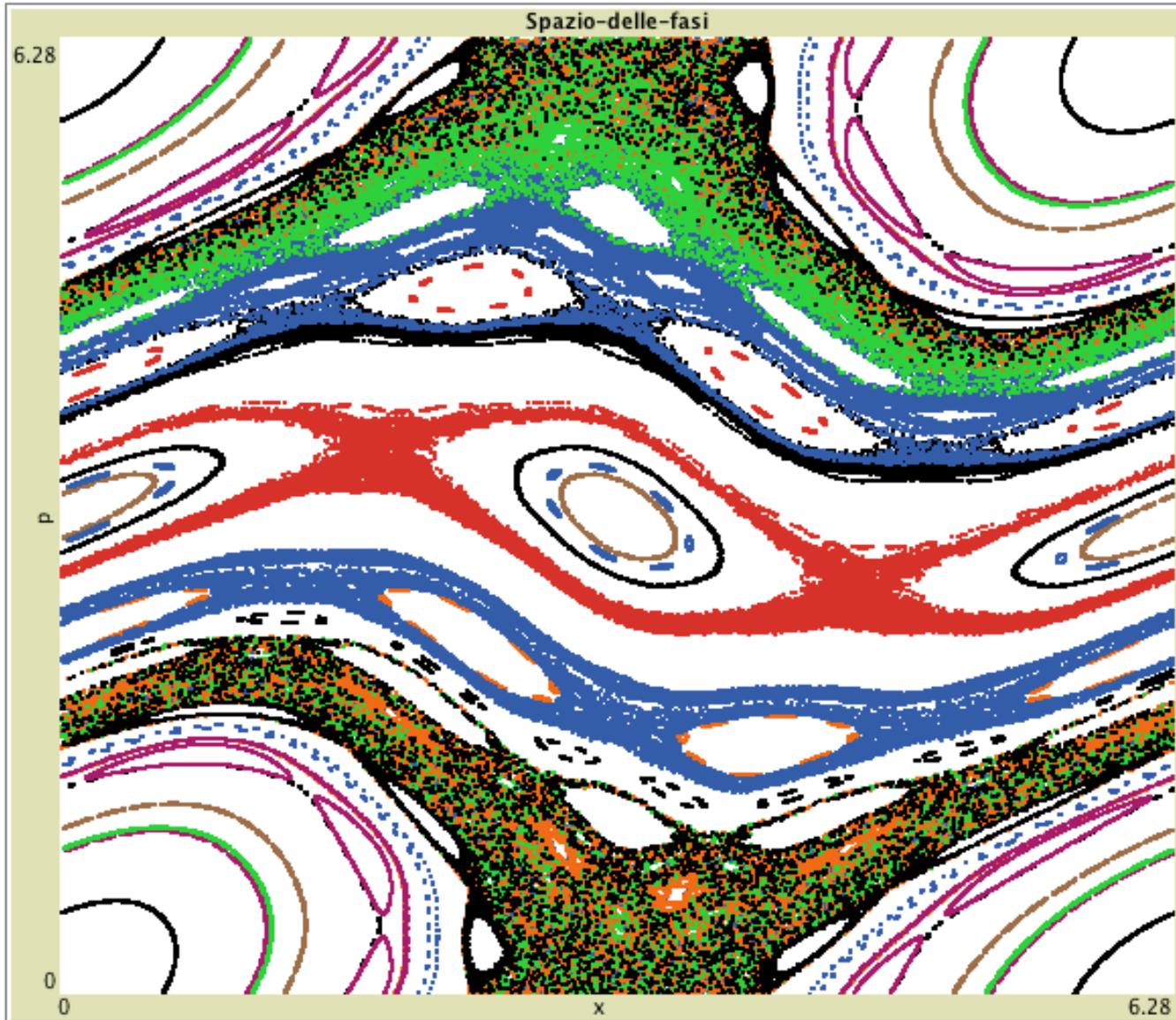
Periodiche

Quasi
Periodiche

Caotiche

Statistica di Tsallis e Mappe Conservative

MAPPA STANDARD



SETUP

GO

SETUP-NEW-IC

K

0.93

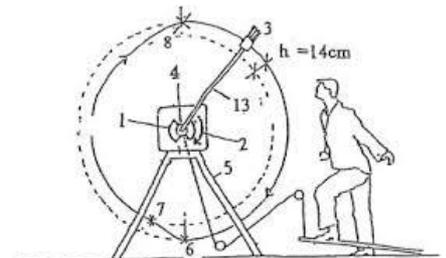
iteration

27877

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

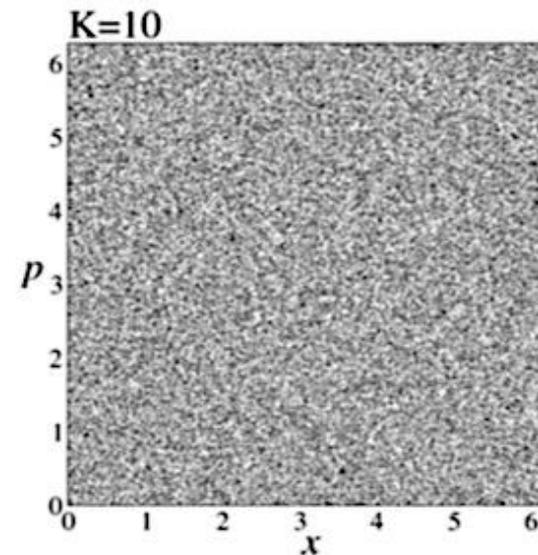
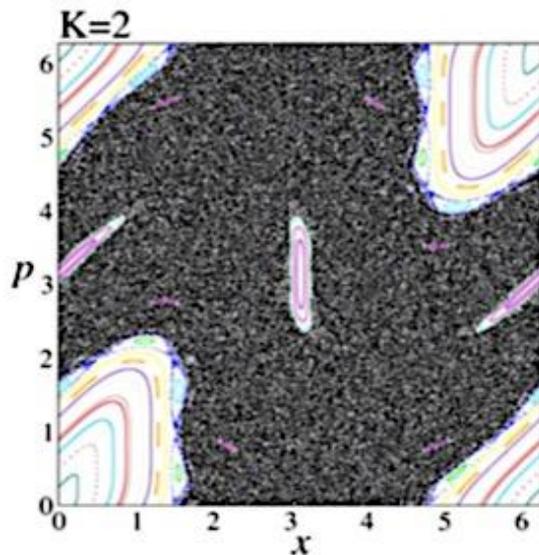
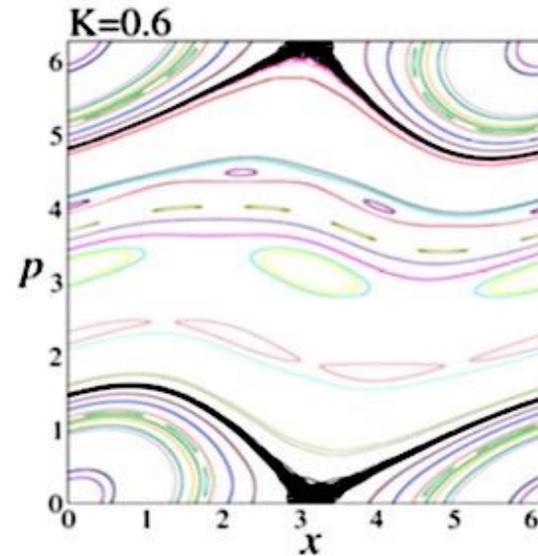
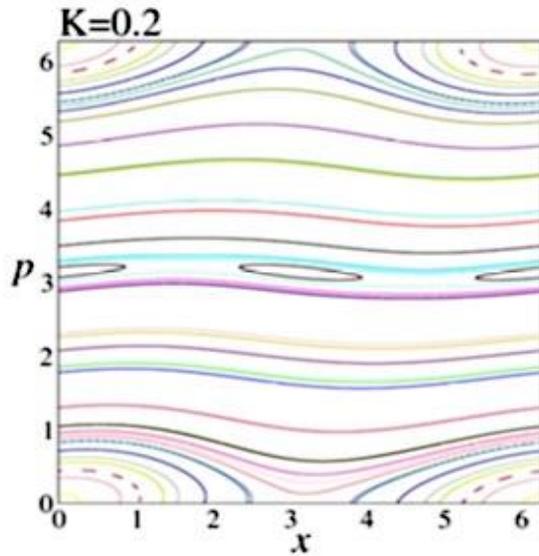
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π .



Kicked Rotator

Edge of Chaos nella Mappa Standard

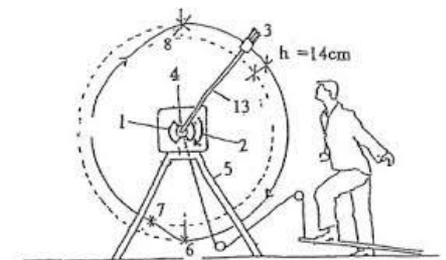


Tirnakli and Borges
Nature / Scientific Reports 6, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

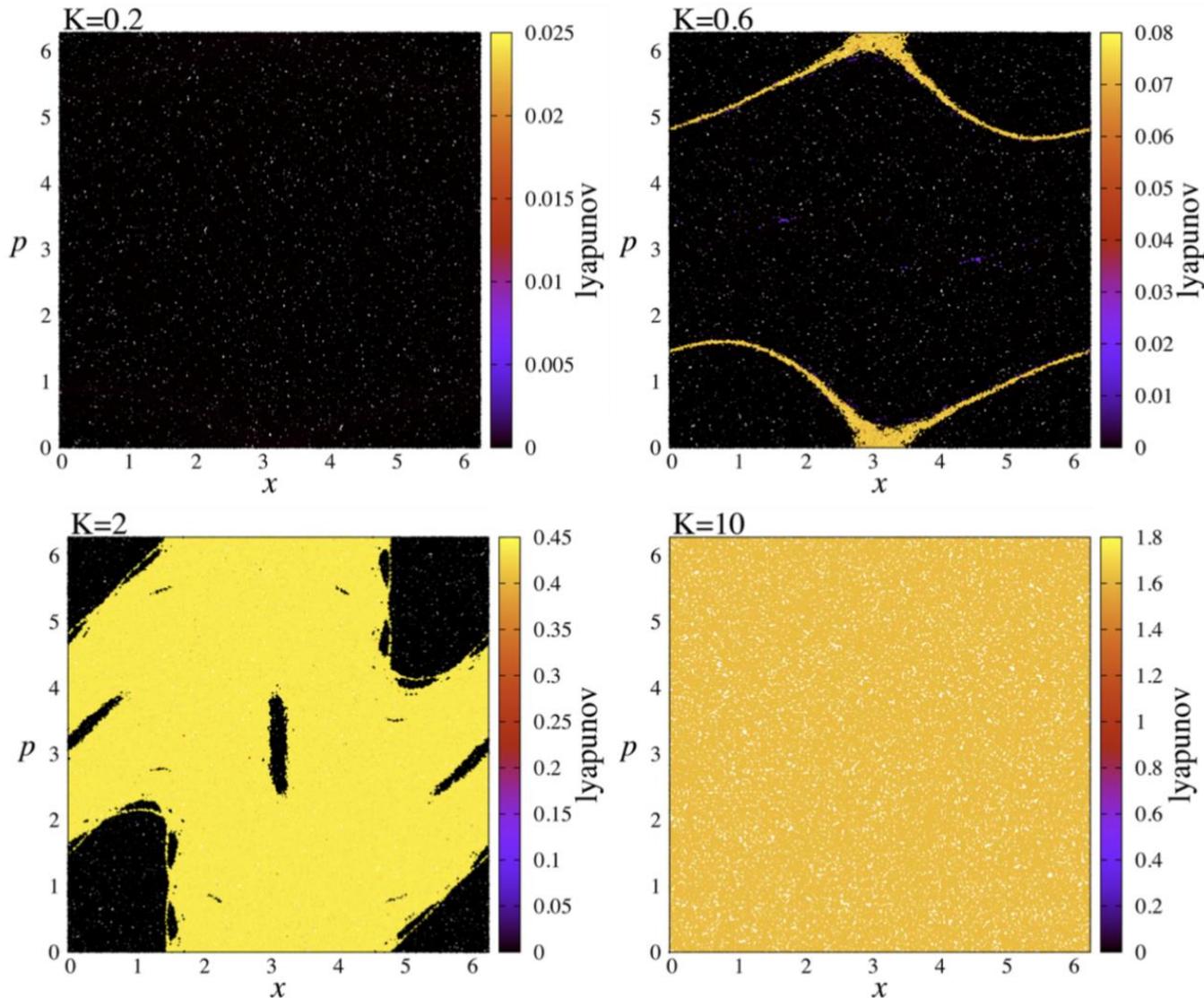
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π .



Kicked Rotator

Edge of Chaos nella Mappa Standard

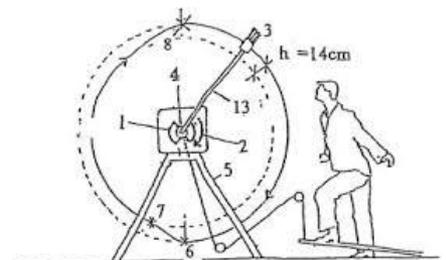


Tirnakli and Borges
Nature / Scientific Reports 6, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where p and x are taken as modulo 2π .

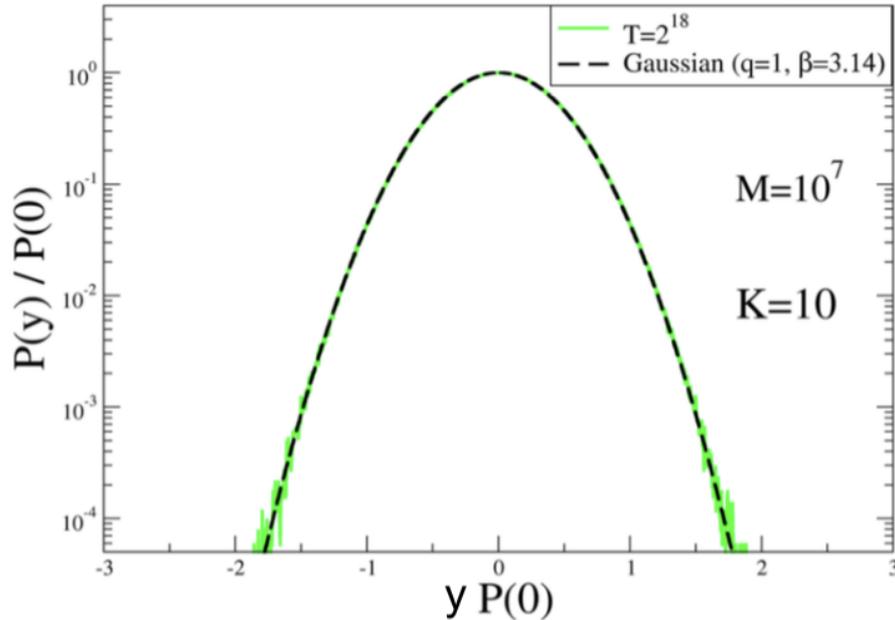


Kicked Rotator

Violazione del CLT nella Mappa Standard



STRONG CHAOS



EDGE OF CHAOS

