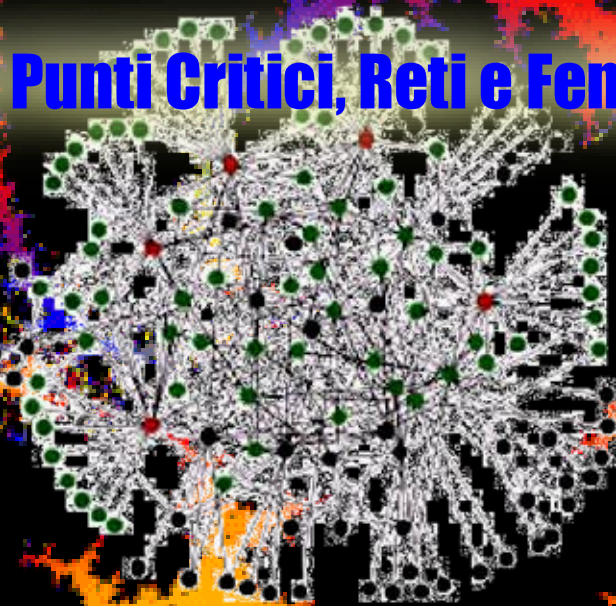


Introduzione alla Nuova Scienza della Complessità

Simulazioni, Punti Critici, Reti e Fenomeni Emergenti

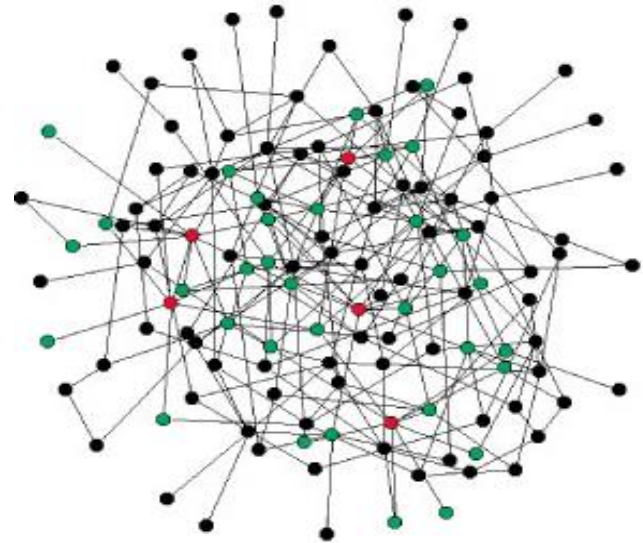


Due possibili descrizioni di un sistema complesso

Da un **punto di vista dinamico** è possibile descrivere un sistema complesso come un insieme costituito da numerosi elementi, detti anche “**agenti**” (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...), che **interagiscono** tra loro di solito in maniera **non lineare** spostandosi all'interno di un certo **spazio** (reale o virtuale) e secondo certe regole:



Da un **punto di vista topologico** (cioè se ci interessa invece sapere “chi interagisce con chi”) è anche possibile descrivere un sistema complesso come una **rete** (network) costituita da un certo numero di **nodi** (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...) collegati tra loro per mezzo di **links** che esprimono delle relazioni tra i nodi:

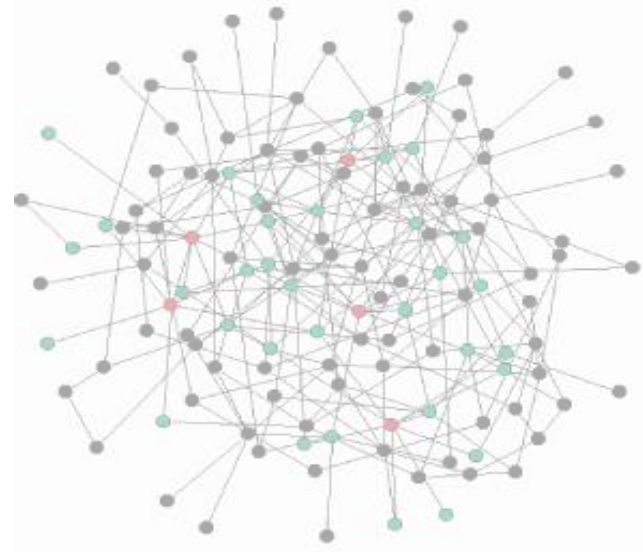


Due possibili descrizioni di un sistema complesso

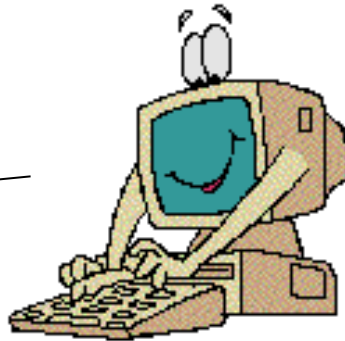
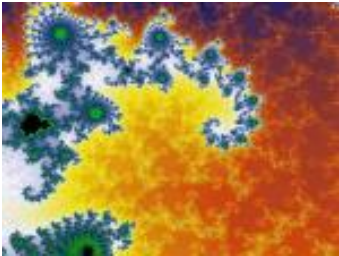
Da un **punto di vista dinamico** è possibile descrivere un sistema complesso come un insieme costituito da numerosi elementi, detti anche “**agenti**” (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...), che **interagiscono** tra loro di solito in maniera **non lineare** spostandosi all'interno di un certo **spazio** (reale o virtuale) e secondo certe regole:



Da un punto di vista topologico (cioè se ci interessa invece sapere “chi interagisce con chi”) è anche possibile descrivere un sistema complesso come una rete (network) costituita da un certo numero di nodi (particelle, cellule, piante, animali, individui, opinioni, automobili, etc...) collegati tra loro per mezzo di links che esprimono delle relazioni tra i nodi:



Autosimilarità e Invarianza di Scala



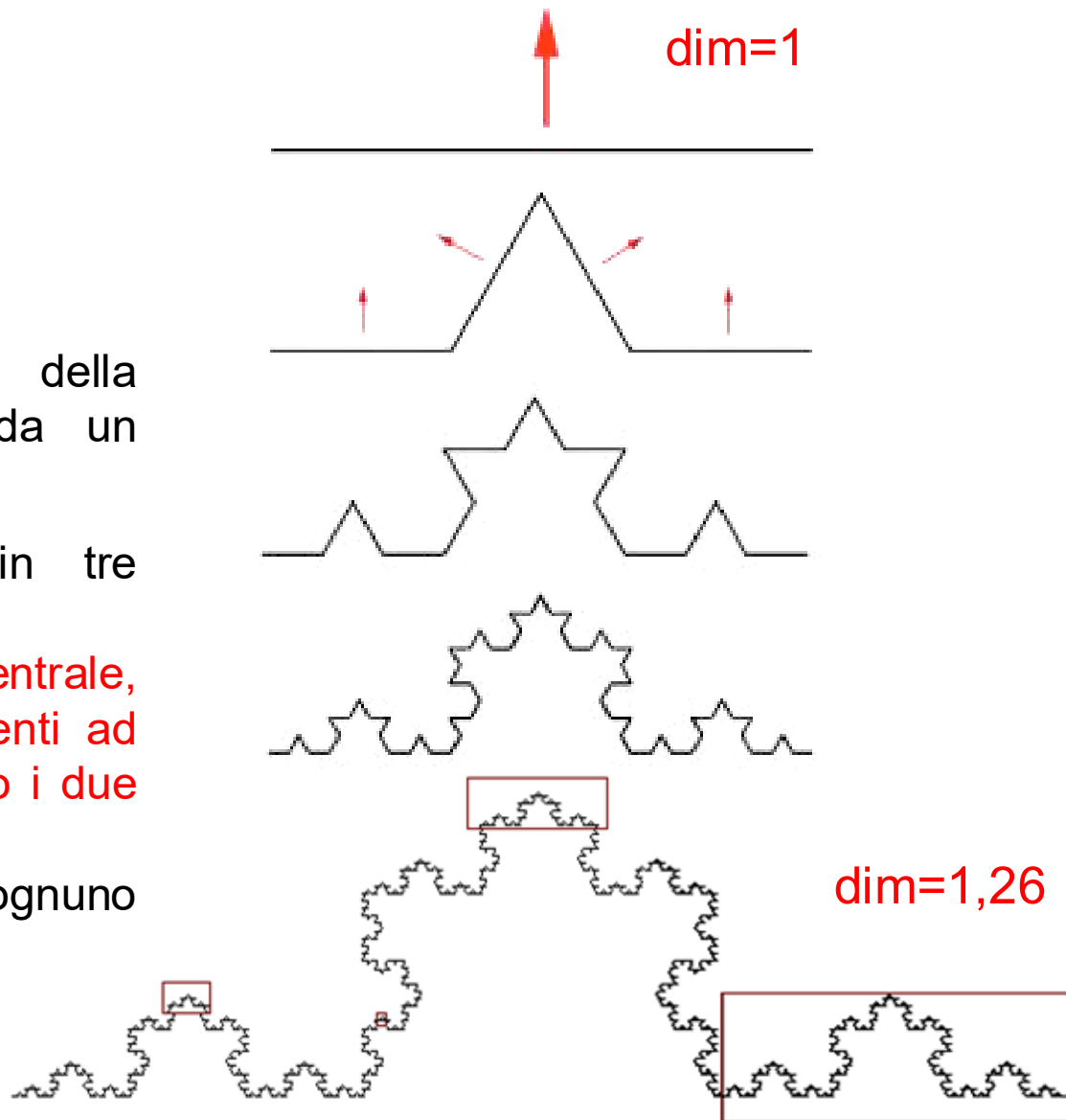
**Proprietà tipiche
dei sistemi complessi**

Autosimilarità negli oggetti frattali

La curva di Koch

Procedura di generazione della curva di Koch a partire da un segmento:

1. dividere il segmento in tre segmenti uguali;
2. cancellare il segmentino centrale, sostituendolo con due segmenti ad esso identici che costituiranno i due lati di un triangolo equilatero;
3. tornare al punto 1 per ognuno degli attuali segmenti.



L'insieme di Mandelbrot

. $P_0 \rightarrow$ successione
divergente

$$P_0 = x + i y$$

$$Z_0 = 0$$

$$Z_1 = Z_0^2 + P_0$$

$$Z_2 = Z_1^2 + P_0$$

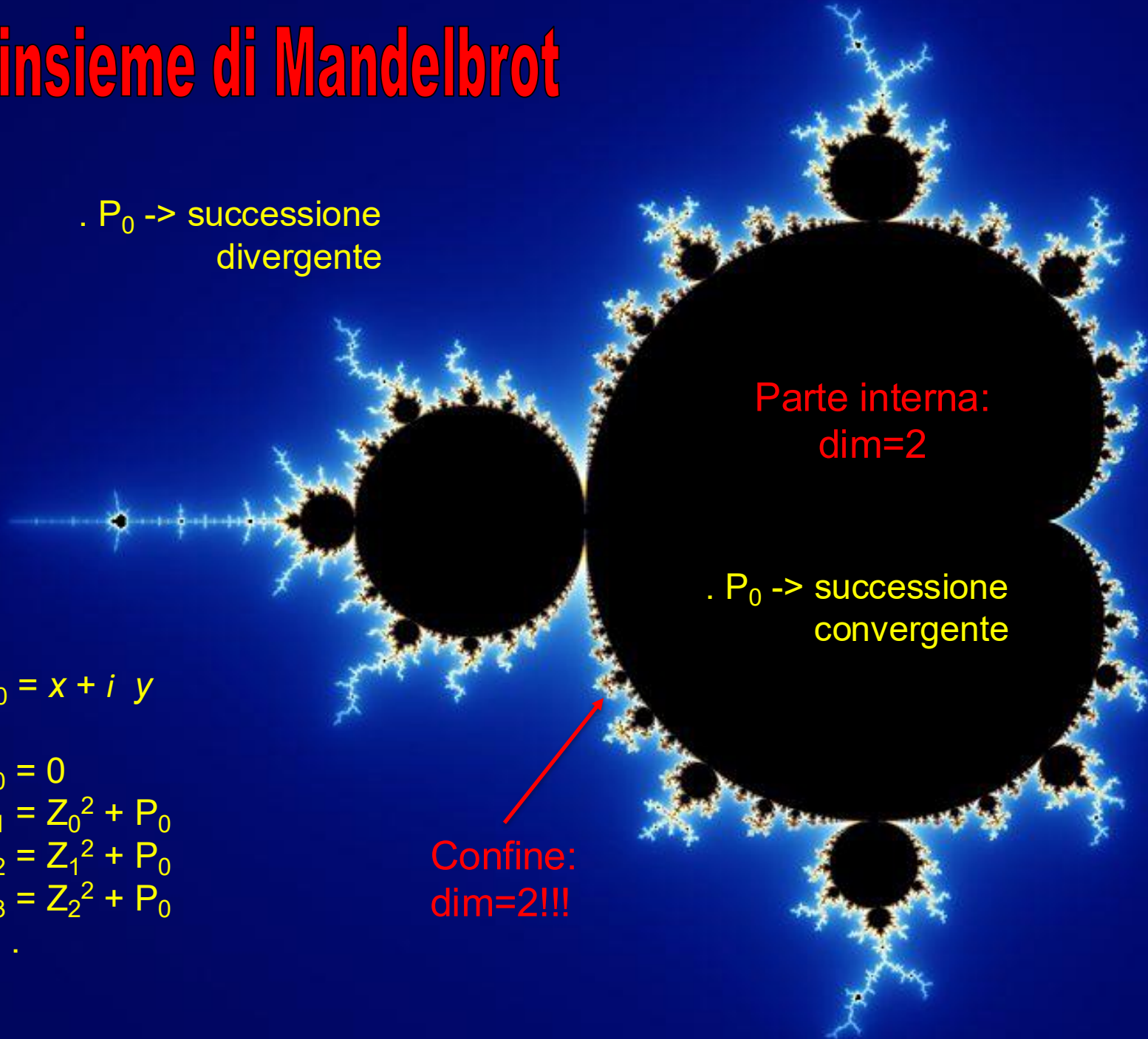
$$Z_3 = Z_2^2 + P_0$$

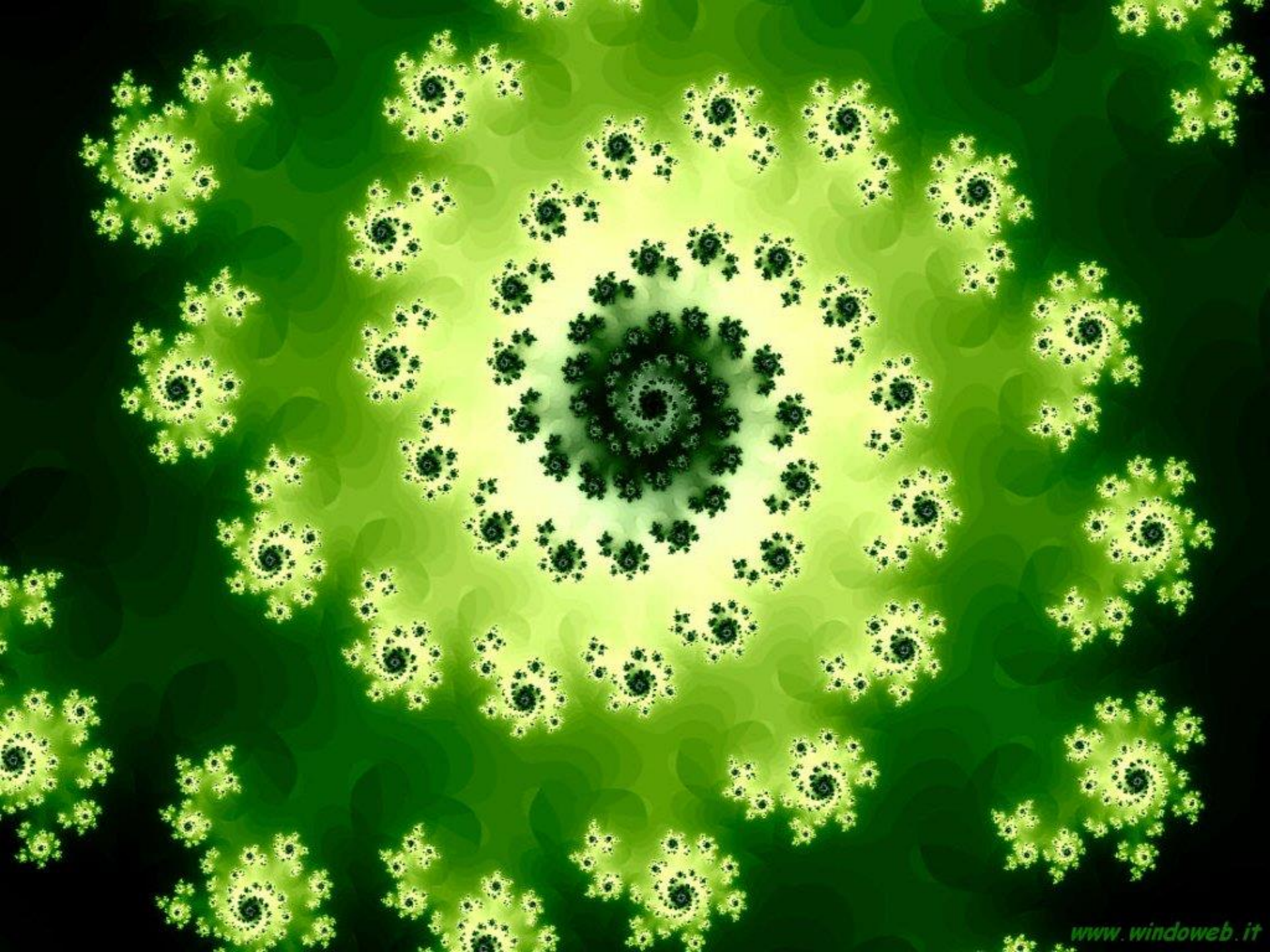
...

Parte interna:
dim=2

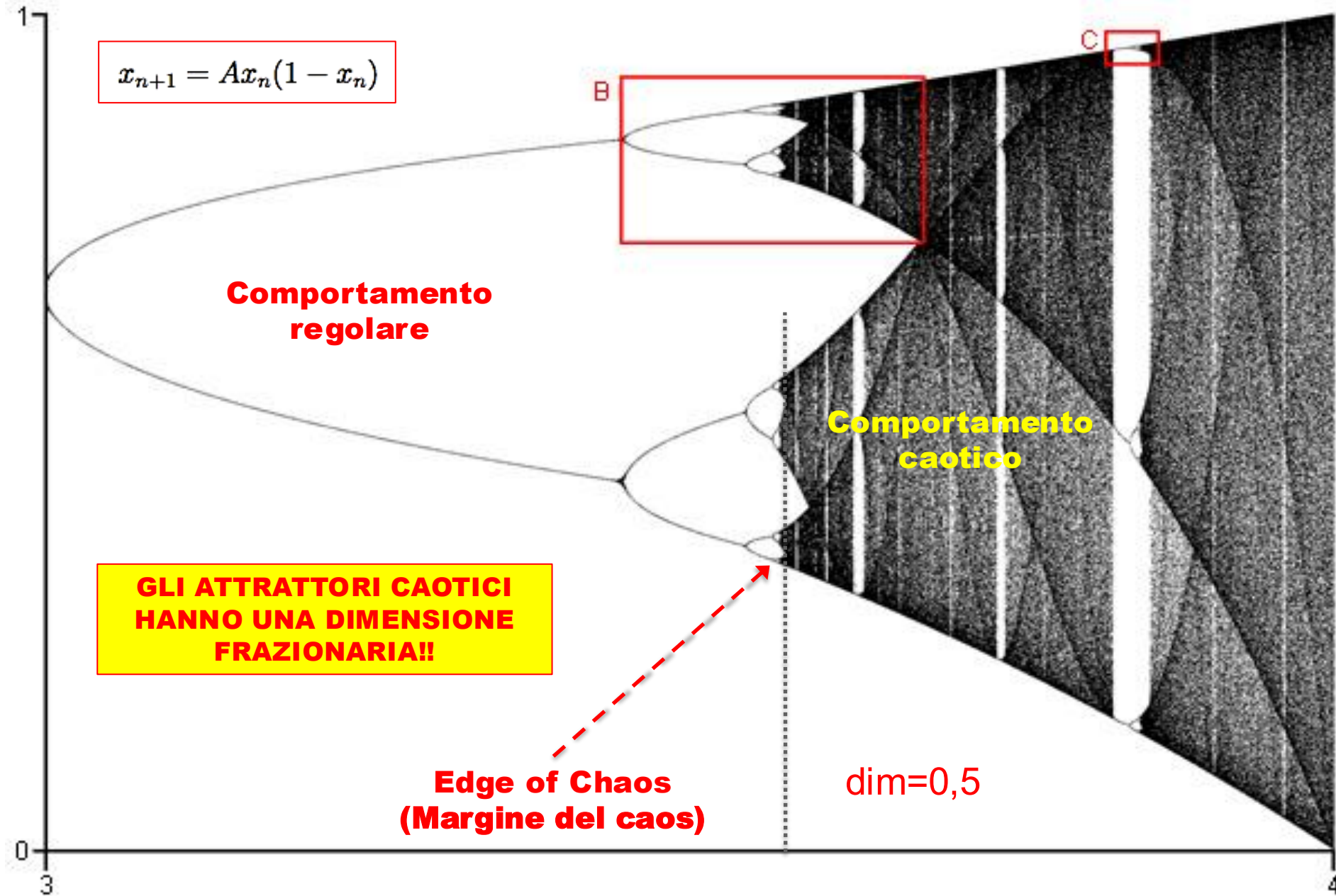
. $P_0 \rightarrow$ successione
convergente

Confine:
dim=2!!!

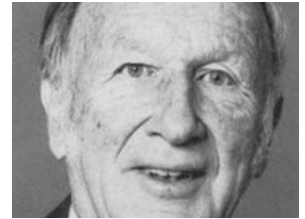
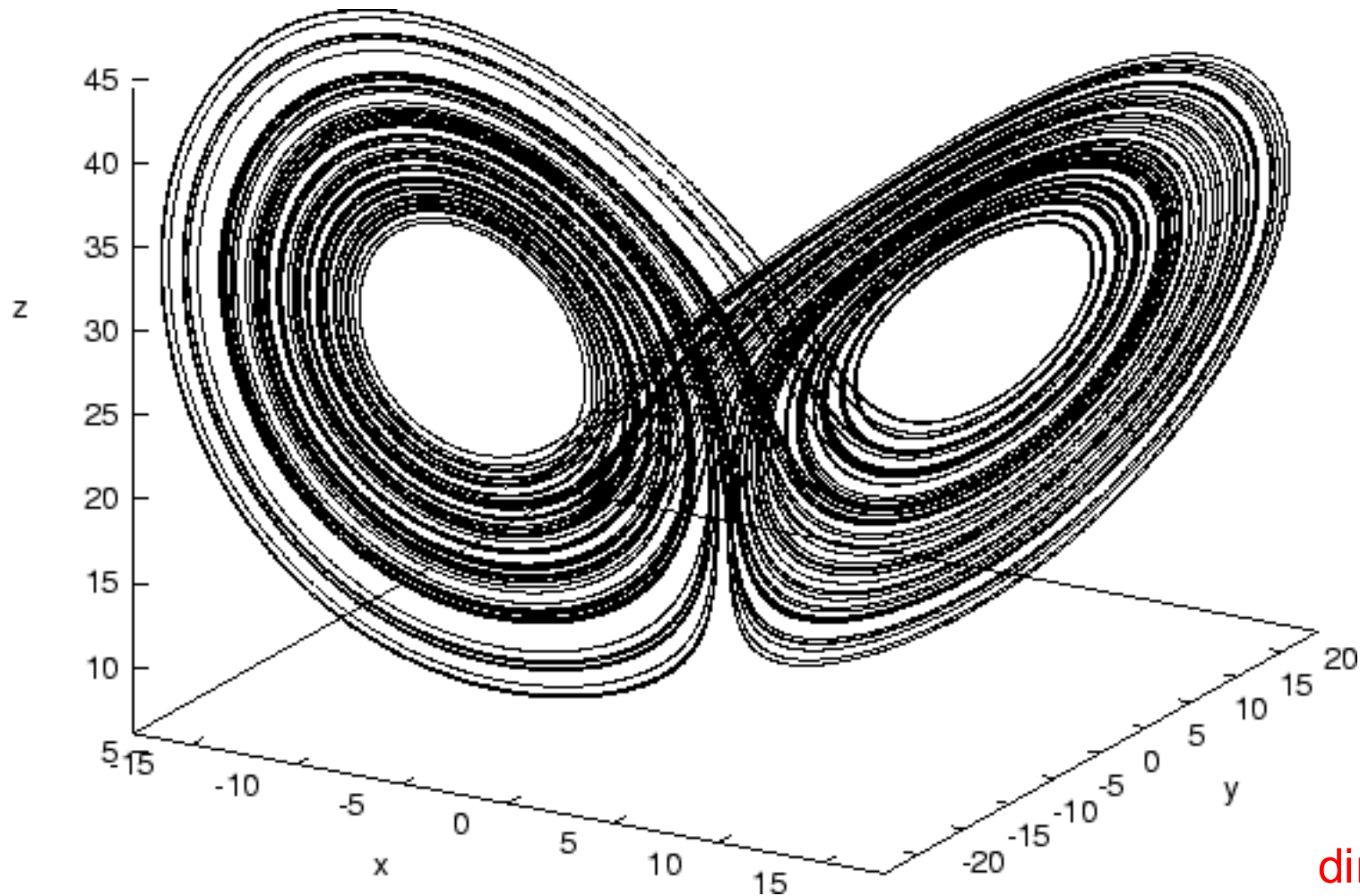




Autosimilarità e caos in una dimensione: la Mappa Logistica



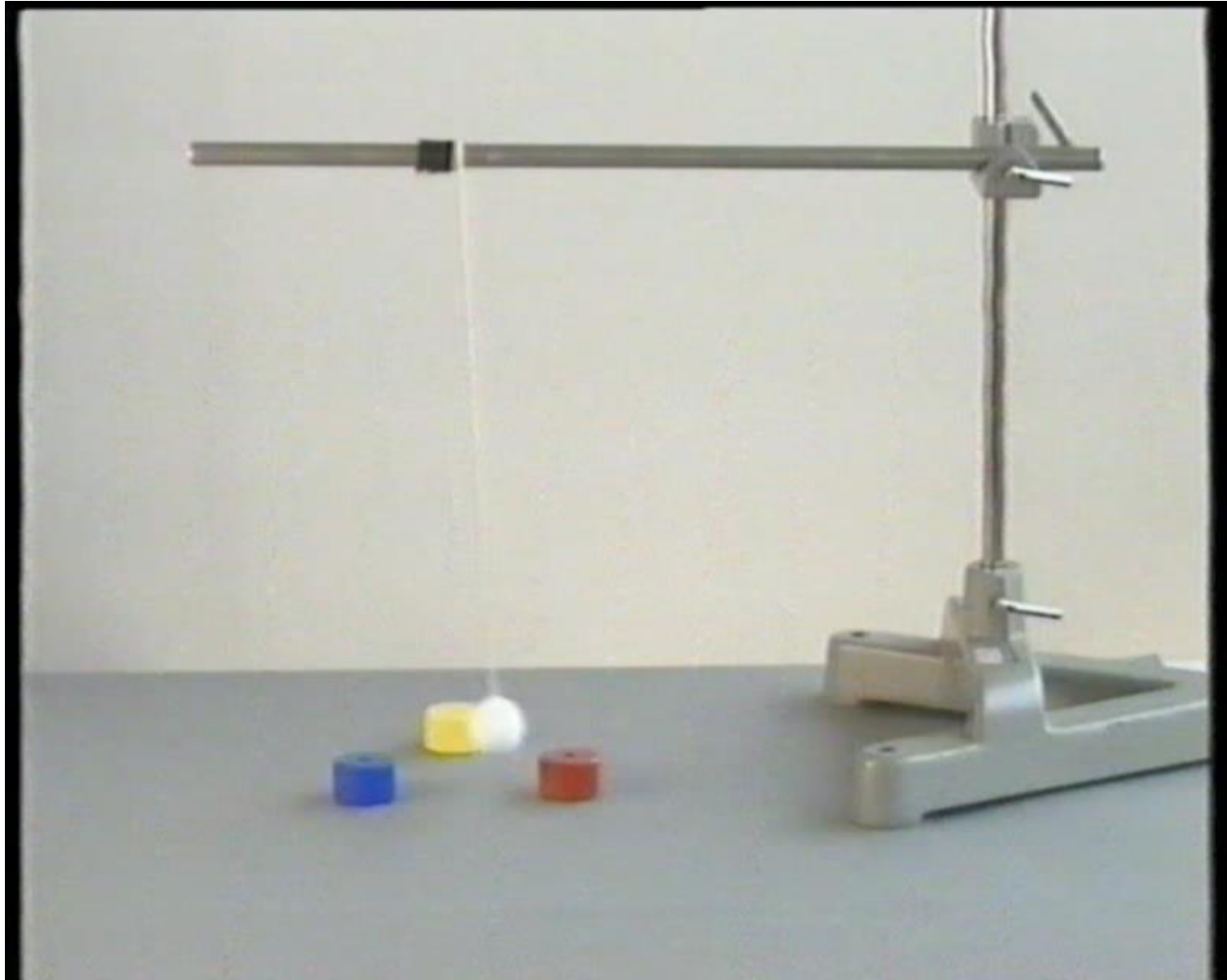
Autosimilarità e caos in 3 dimensioni: l'Attrattore di Lorenz



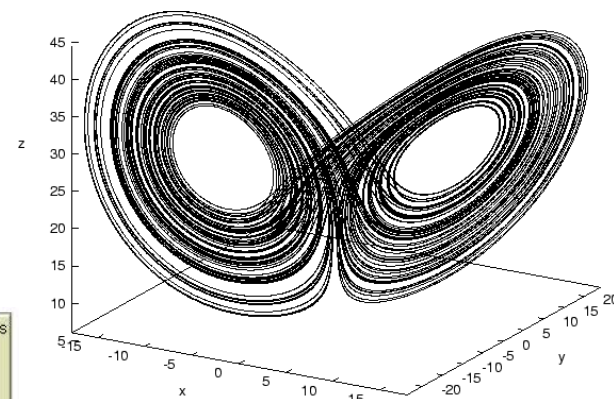
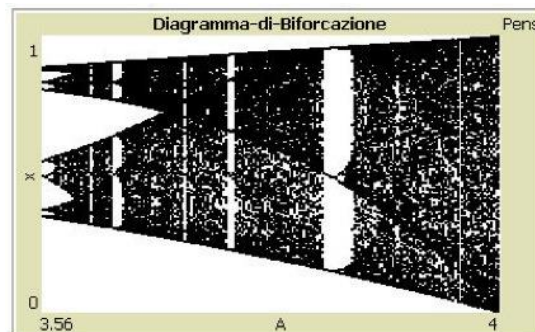
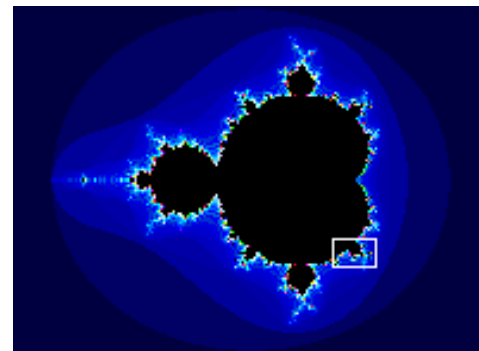
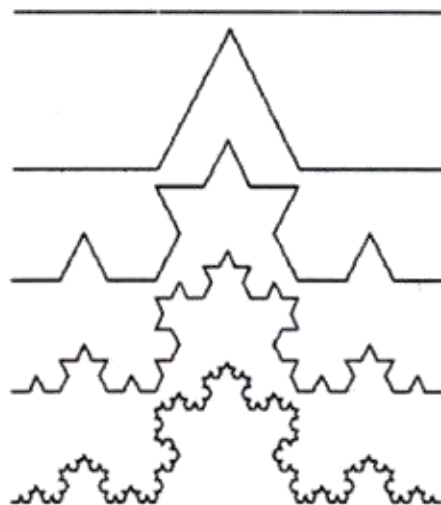
$$\begin{aligned}x' &= 10(y - x) \\ y' &= -xz + 13x - y \\ z' &= xy - (8/3)z\end{aligned}$$

dim=2,06

Autosimilarità e Attrattori : il Pendolo Caotico



**Ma esiste
una 'firma'
matematica
dell'autosimilarità
e dell'invarianza
di scala?**



PICCOLA DIGRESSIONE STATISTICA...

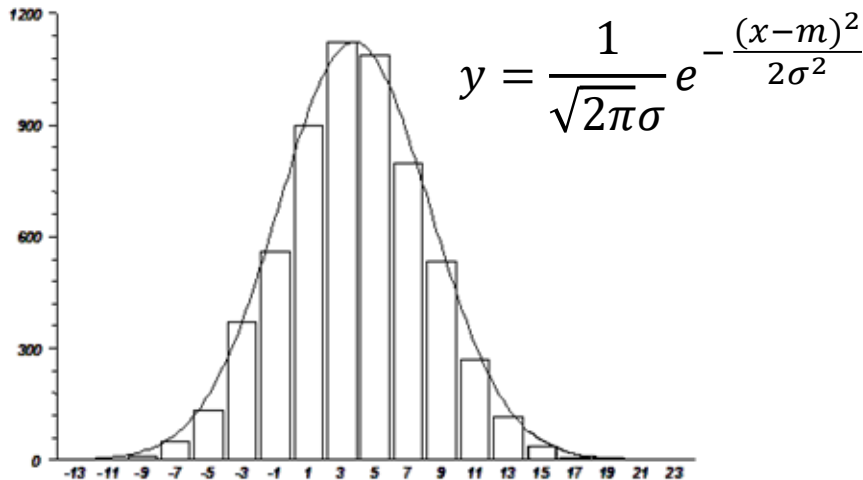
Qual'è la forma della distribuzione dell'altezza o del peso in una popolazione?



Qual'è la forma della distribuzione della ricchezza in una popolazione?

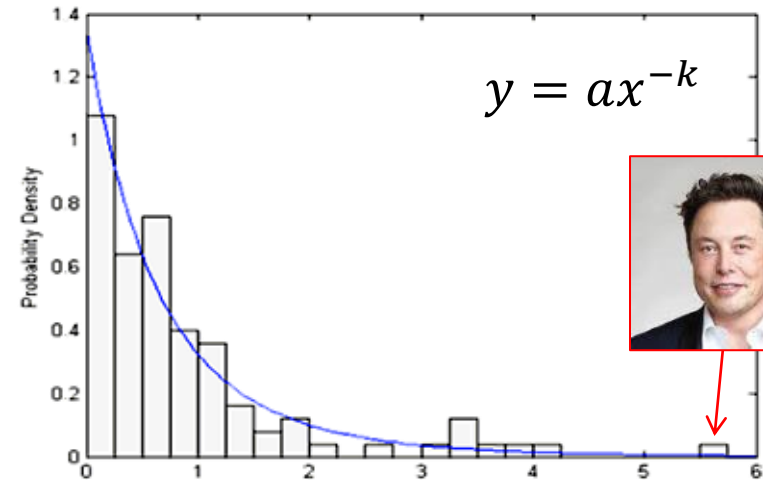


La curva Gaussiana



Esiste una dimensione tipica
(la «media» m)

La legge di potenza



NON esiste una dimensione tipica
(invarianza di scala)

PICCOLA DIGRESSIONE STATISTICA...

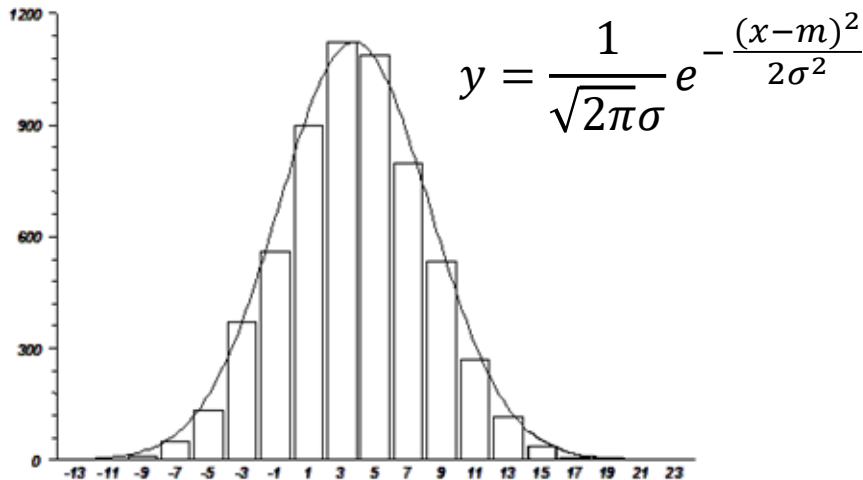
Qual'è la forma della distribuzione dell'altezza o del peso in una popolazione?



Qual'è la forma della distribuzione della ricchezza in una popolazione?

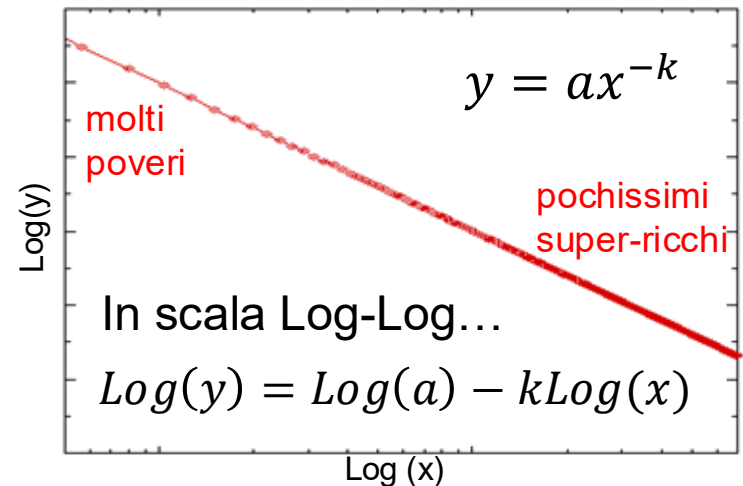


La curva Gaussiana



Esiste una dimensione tipica
(la «media» m)

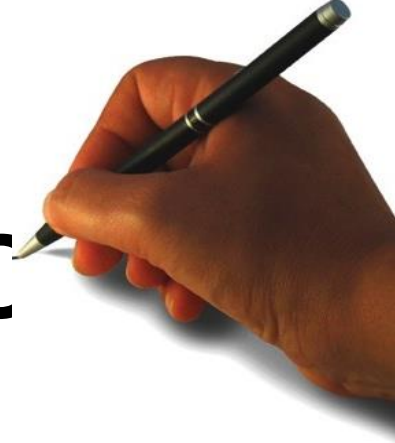
La legge di potenza



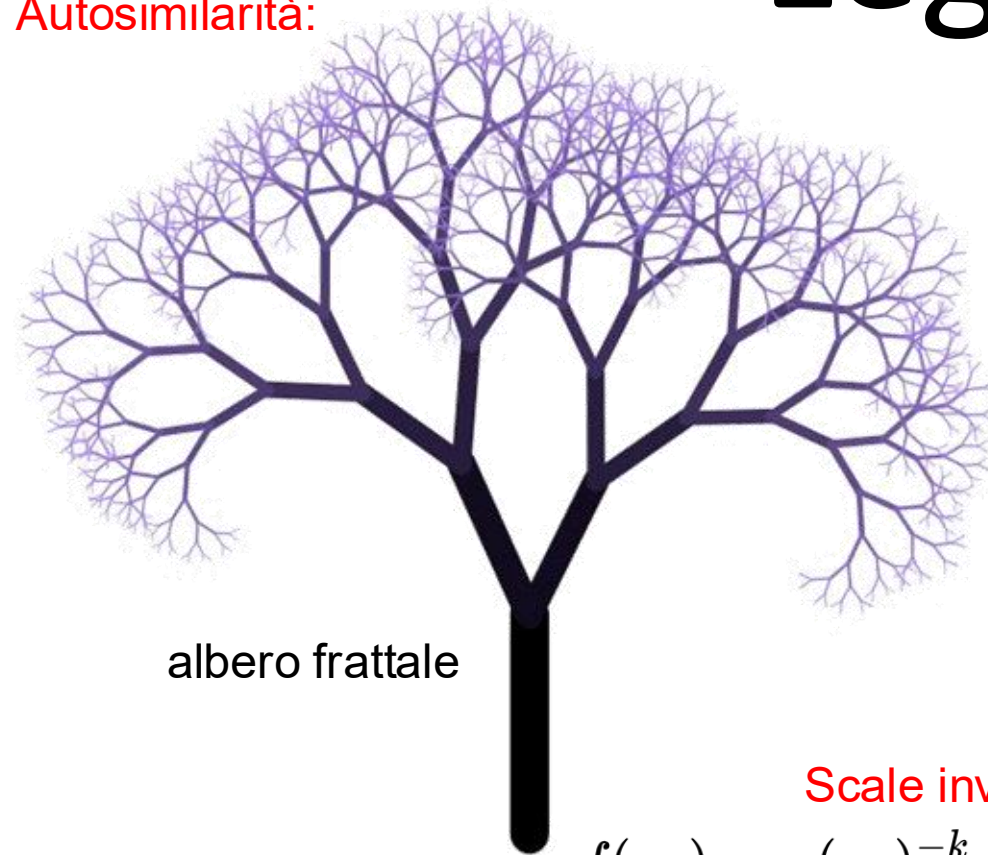
NON esiste una dimensione tipica
(invarianza di scala)

La 'firma' matematica dell'autosimilarità e della invarianza di scala è la:

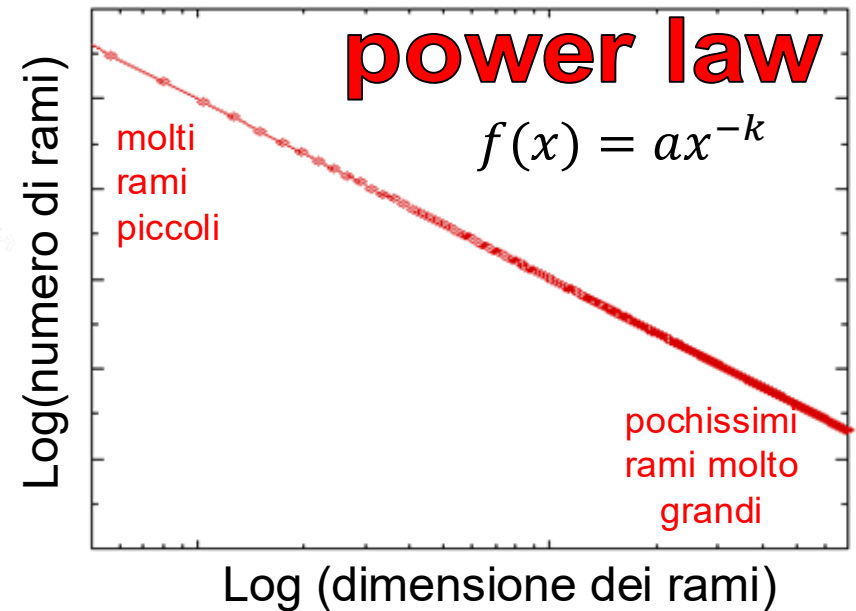
Legge di Pc



Autosimilarità:



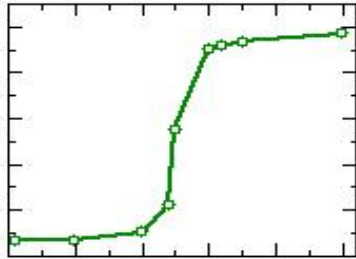
albero frattale



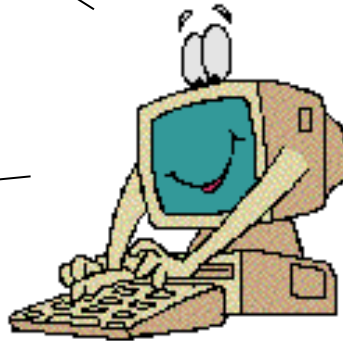
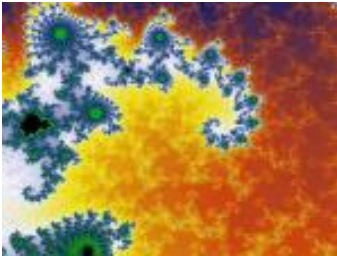
Scale invariance:

$$f(cx) = a(cx)^{-k} = c^{-k} f(x) \propto f(x)$$

**Non linearità e
Soglie Critiche**



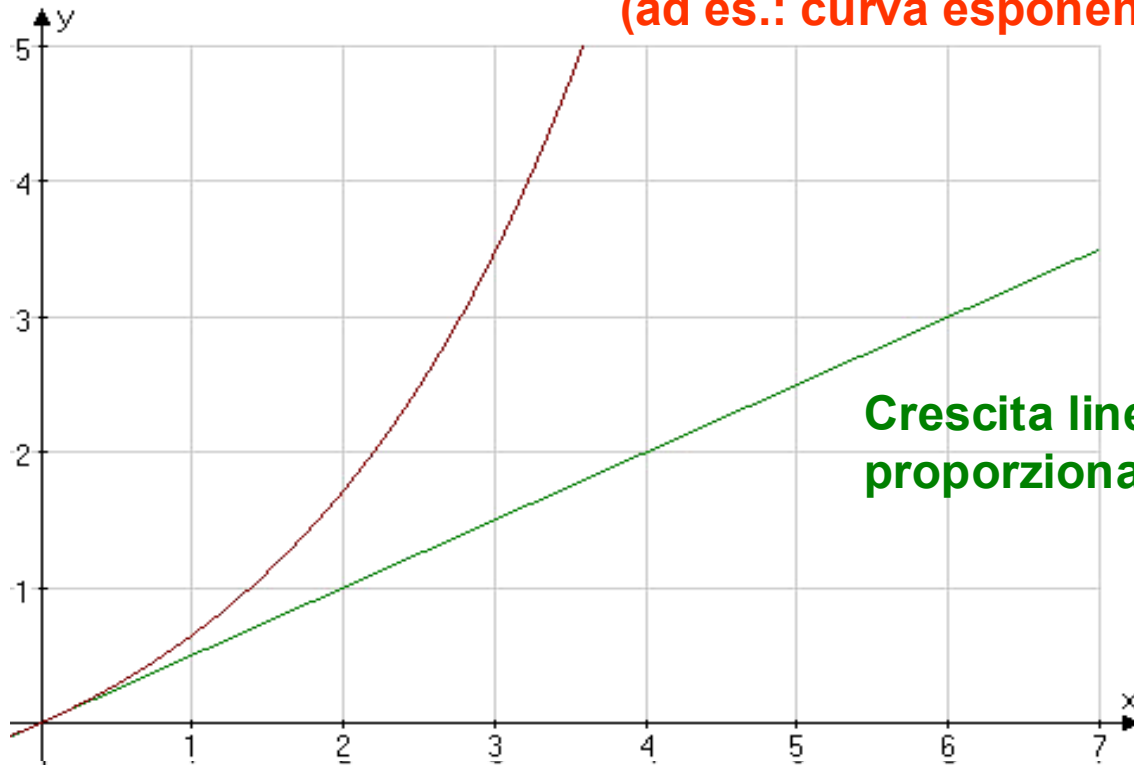
**Autosimilarità e
Invarianza di Scala**



**Proprietà tipiche
dei sistemi complessi**

Crescita lineare e non lineare

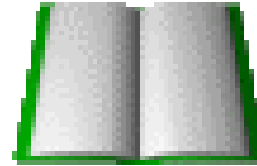
Crescita non-lineare: l'effetto y non è più proporzionale alla causa x (ad es.: curva esponenziale)



Crescita lineare: l'effetto y è proporzionale alla causa x

Crescita Esponenziale: esempio 1

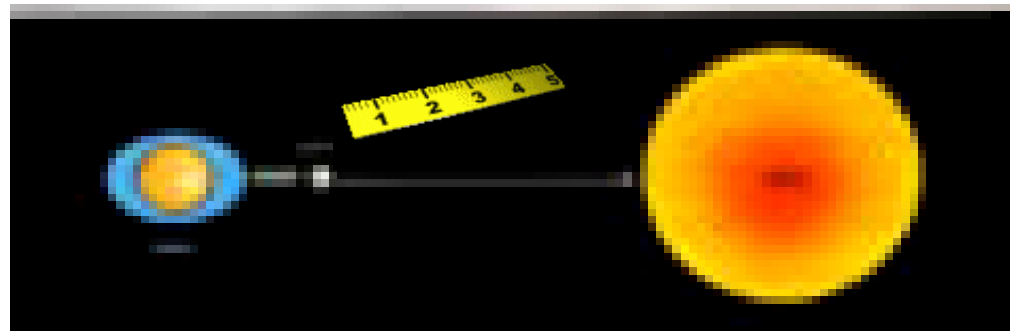
Domanda1: se si potesse piegare un **normale foglio di carta** (spesso circa 0.15mm) in due, poi di nuovo in due, e così via per **50 volte**, quale sarebbe lo **spessore finale** del foglio?



Risposta lineare: lo spessore di un elenco telefonico o al massimo l'altezza di un frigorifero

Risposta non-lineare: più della distanza tra la Terra e il Sole!!!

Infatti: $(0.15\text{mm}) \times 2 \times 2 \times 2 \dots \times 2 (50 \text{ volte})$
 $= 0.15\text{mm} \times 2^{50} = 169.000.000 \text{ Km}$



Crescita Esponenziale: esempio 2

$t = 0$



$t = 1 \text{ ora}$



Domanda2: al tempo $t=0$ in un barattolo ci sono solo **due pulci** che però **raddoppiano** di numero ogni secondo; se le pulci impiegano 1 ora esatta per riempire completamente il barattolo, quanto tempo impiegheranno a **riempirlo per metà**?



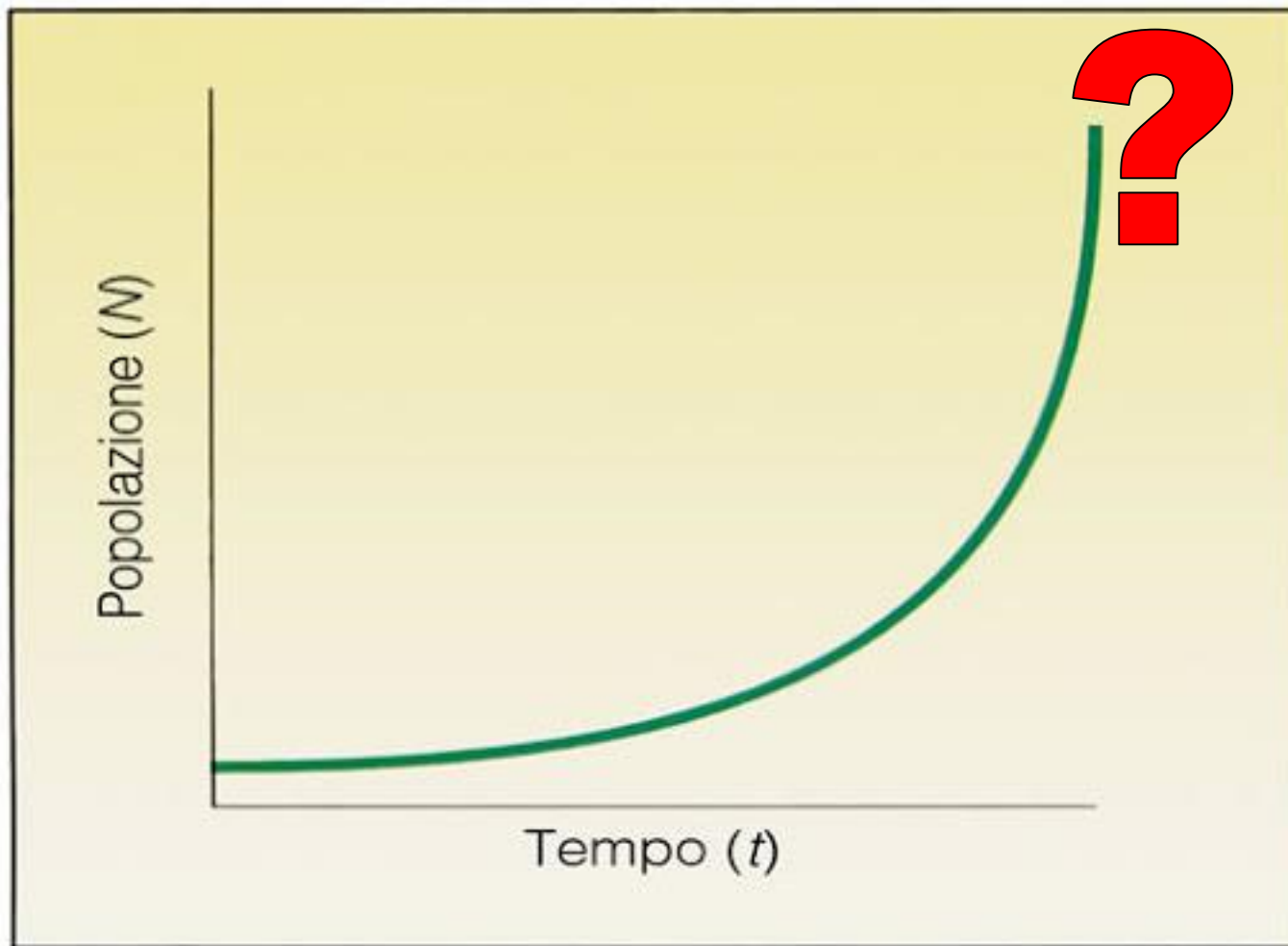
Risposta lineare:

mezz'ora

Risposta non-lineare:

59 minuti e 59 secondi!

**Ma... una Crescita Esponenziale
può proseguire illimitatamente?**



Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [\[modifica\]](#)

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

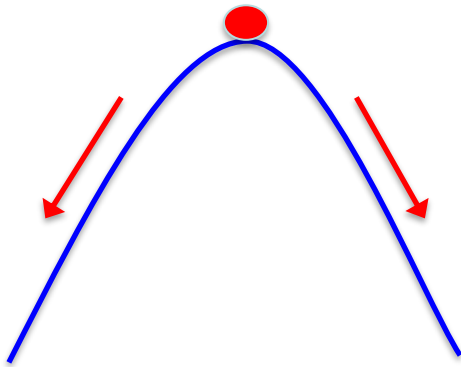
Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .

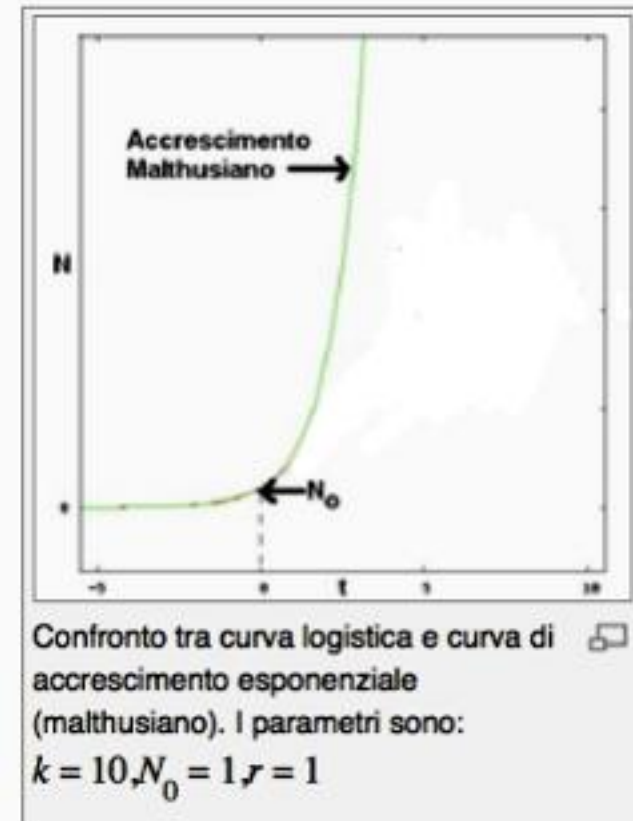
instabilità



T.R. Malthus
(1766-1834)

I sistemi dinamici «dissipativi» lineari possono avere solo un unico punto fisso:

- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)



Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

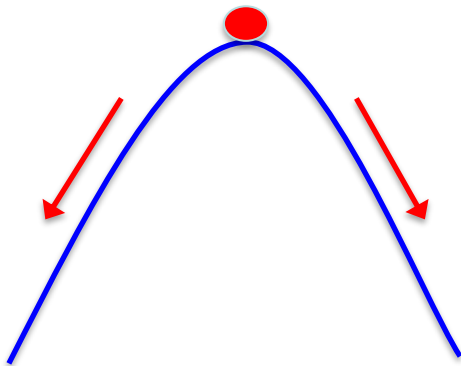
Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

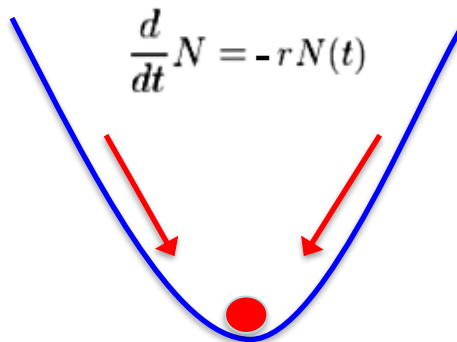
con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .

instabilità

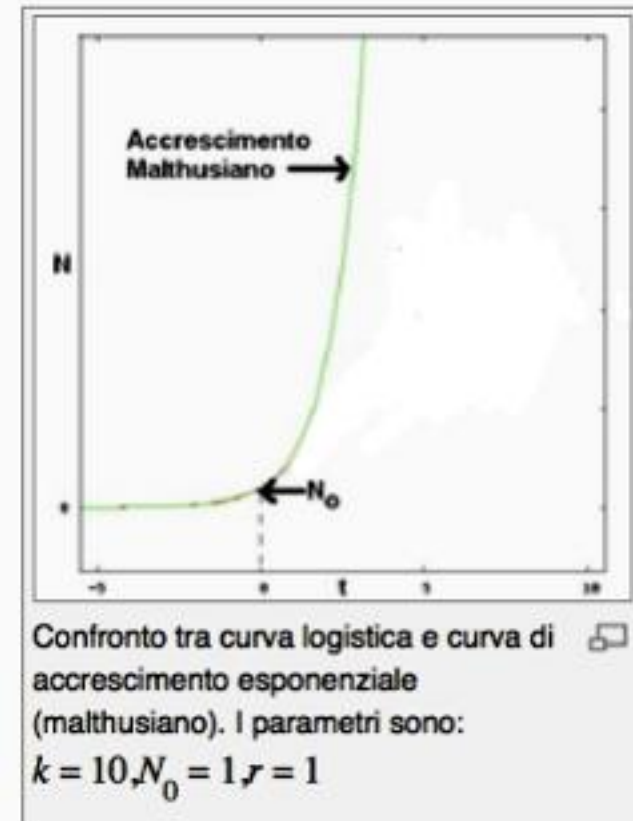


stabilità



I sistemi dinamici «dissipativi» lineari possono avere solo un unico punto fisso:

- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)



Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

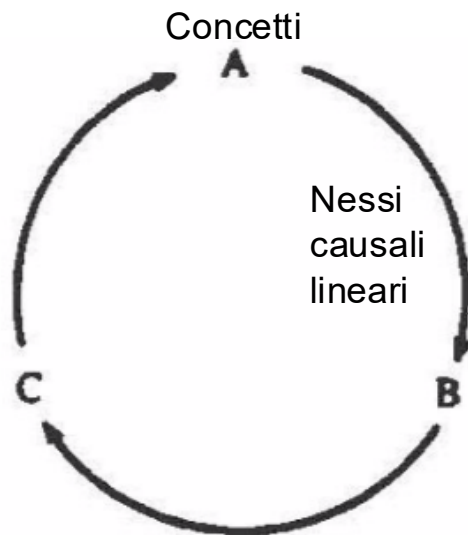
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

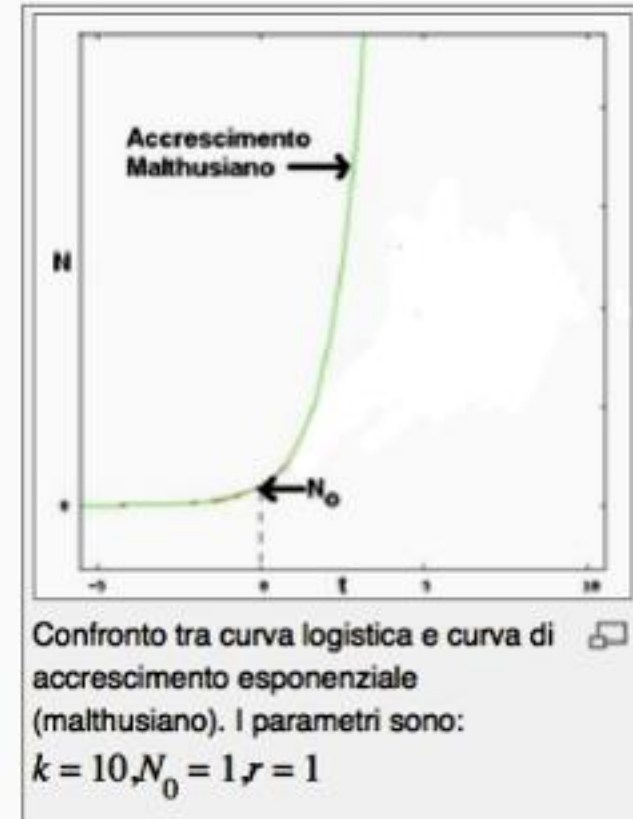
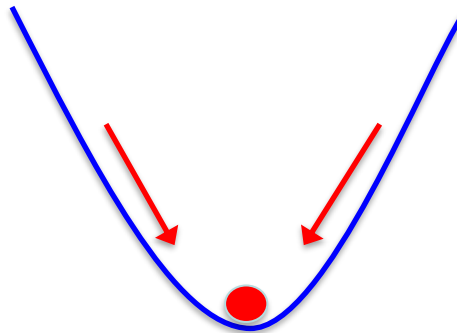
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .



stabilità



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

CIBERNETICA: anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener
(1894-1964)

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

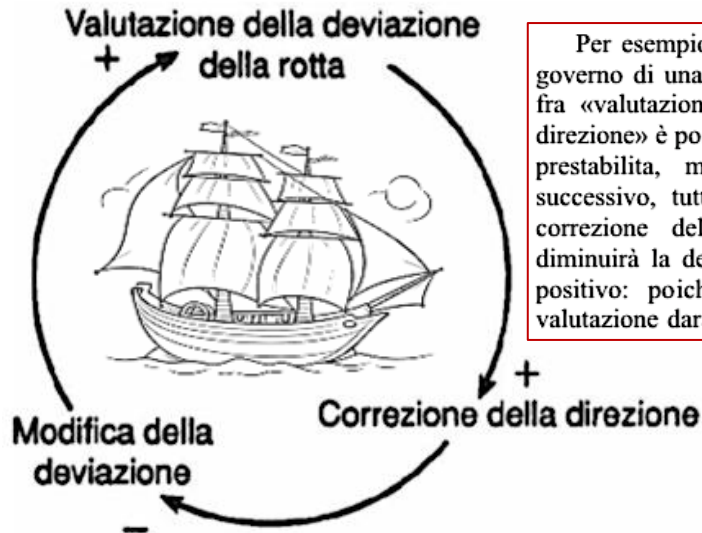
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

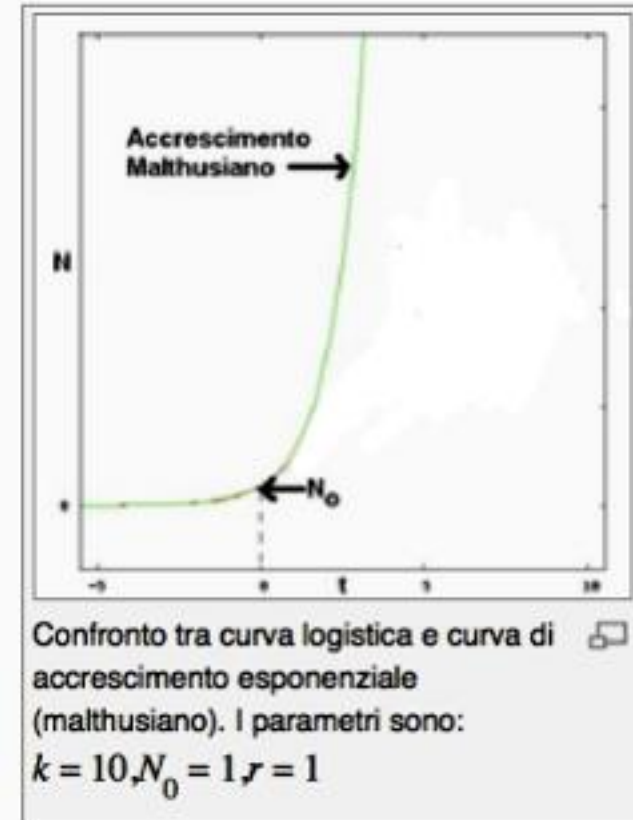
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .



Per esempio, nell'anello di retroazione che illustra il governo di una barca, riportato nella [figura 4-3](#), il nesso fra «valutazione della deviazione» e «correzione della direzione» è positivo: maggiore è la deviazione dalla rotta prestabilita, maggiore sarà la correzione. Il nesso successivo, tuttavia, è negativo: tanto più aumenta la correzione della direzione, quanto più rapidamente diminuirà la deviazione. Infine, l'ultimo nesso è ancora positivo: poiché la deviazione diminuisce, la nuova valutazione darà un risultato minore di quella precedente.



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

CIBERNETICA: anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener
(1894-1964)

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

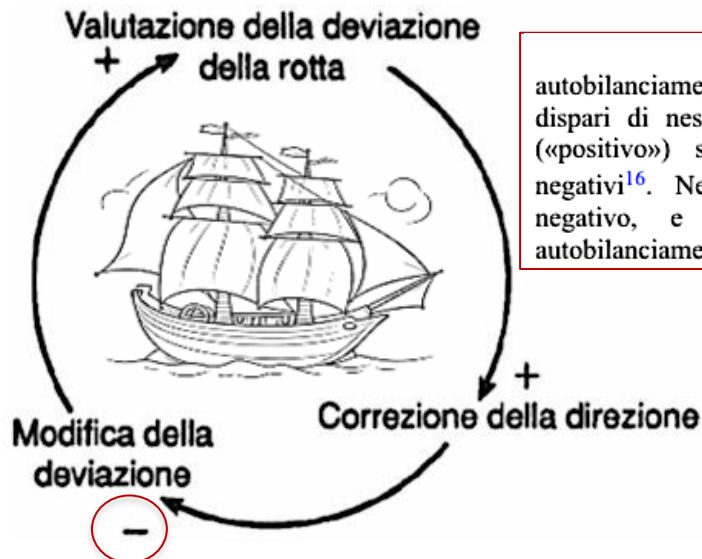
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

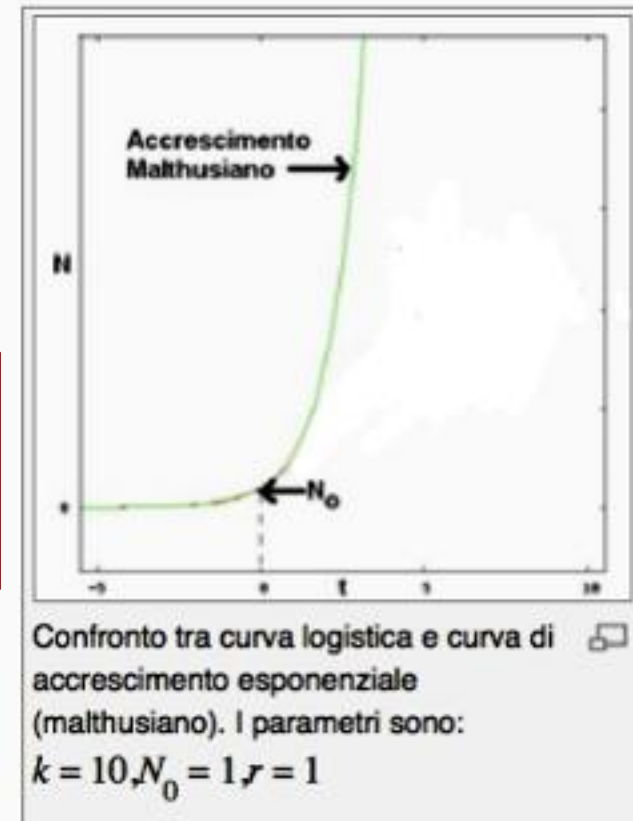
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .



L'anello sarà di autobilanciamento («negativo») se contiene un numero dispari di nessi negativi, e sarà di autorafforzamento («positivo») se contiene un numero pari di nessi negativi¹⁶. Nel nostro esempio, c'è un solo nesso negativo, e quindi l'anello è negativo, o di autobilanciamento.



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

CIBERNETICA: anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener
(1894-1964)

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

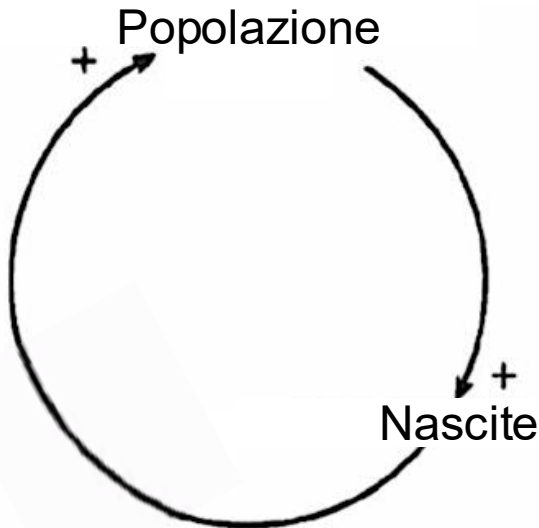
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

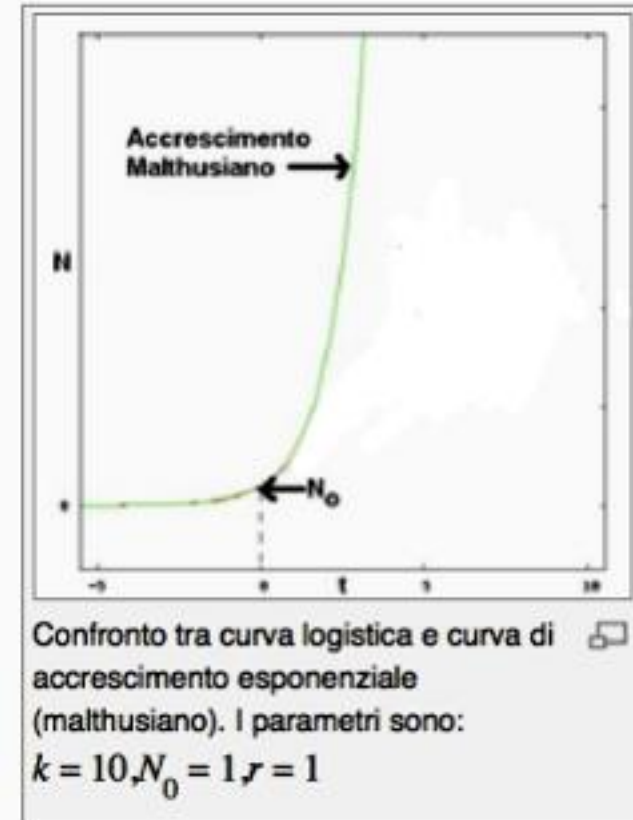
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .



La crescita malthusiana è prodotta da un anello di retroazione con **due soli nessi entrambi positivi** (zero nessi negativi, numero pari), dunque corrisponde ad un **autorafforzamento** (feedback positivo)



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

CIBERNETICA: anelli di retroazione e causalità circolare

(dal greco: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener
(1894-1964)

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

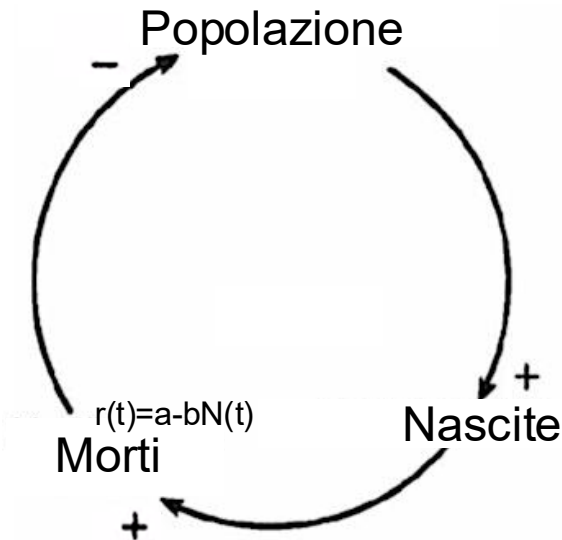
Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

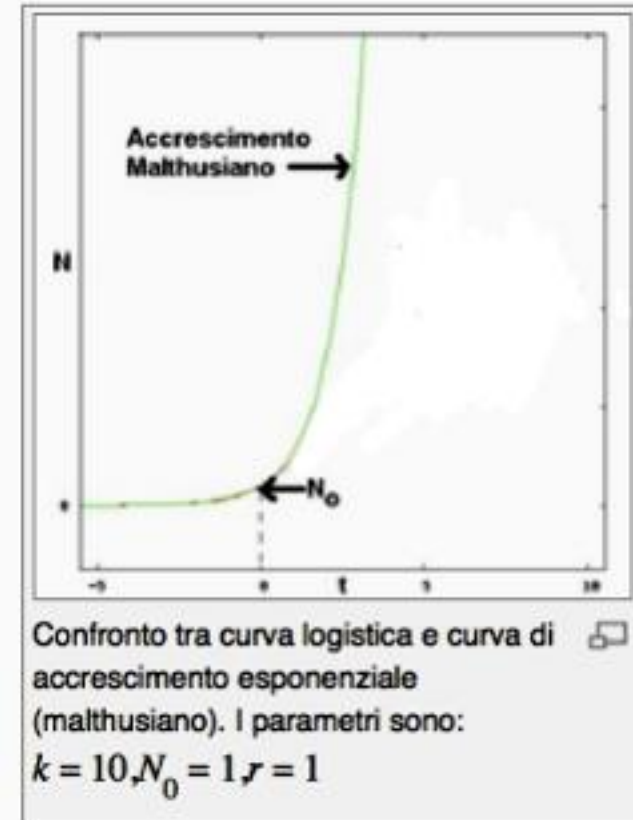
$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .



Per stabilizzare il sistema occorre aggiungere un **nesso negativo** all'anello di retroazione (mortalità), che così si trasformerà in un anello di **autobilanciamento**



- repulsivo (feedback positivo → autorafforzamento, crescita esponenziale)
- attrattivo (feedback negativo → autobilanciamento, omeostasi)

CIBERNETICA: anelli di retroazione e causalità circolare

(dal **greco**: κυβερνήτης, *kybernētēs*, 'pilota di navi')



N. Wiener
(1894-1964)

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .

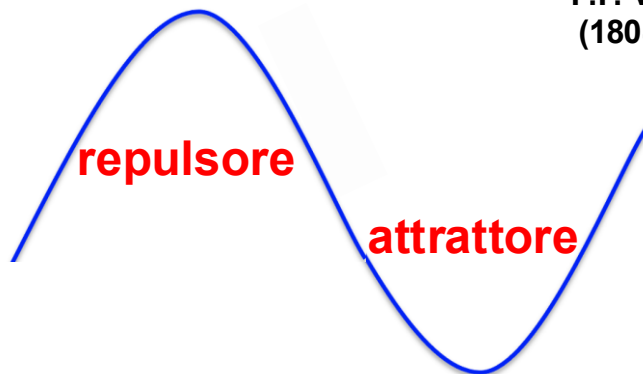
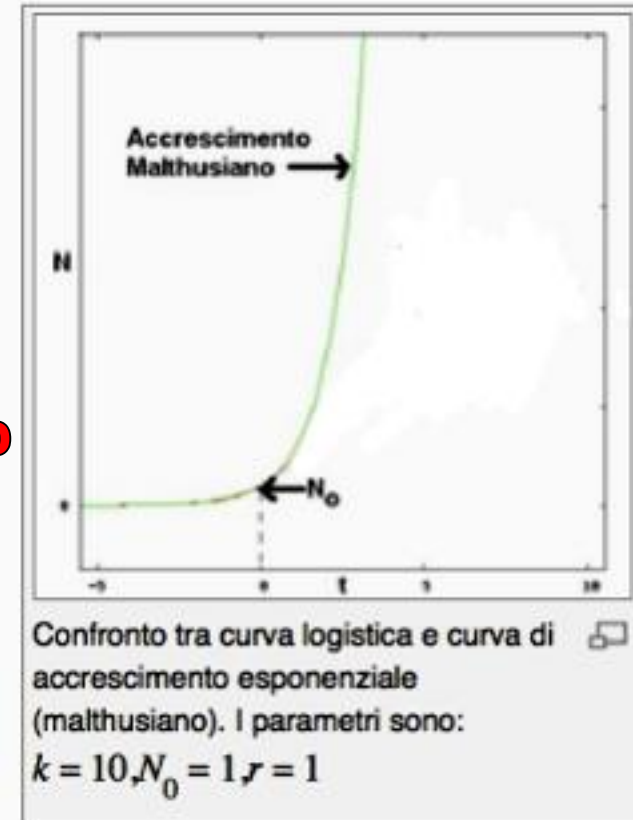
Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente r che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è $r(t) = a - bN(t)$ con a e b costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t) \quad \text{Flusso dissipativo non lineare 1D}$$

EQUAZIONE LOGISTICA



P.F. Verhulst
(1804-1849)



I sistemi dinamici «dissipativi» non lineari possono avere più di un punto fisso, ad esempio una coppia repulsore-attrattore: dalla crescita esponenziale si passa alla curva logistica (sigmoide).

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .

Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente r che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è $r(t) = a - bN(t)$ con a e b costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

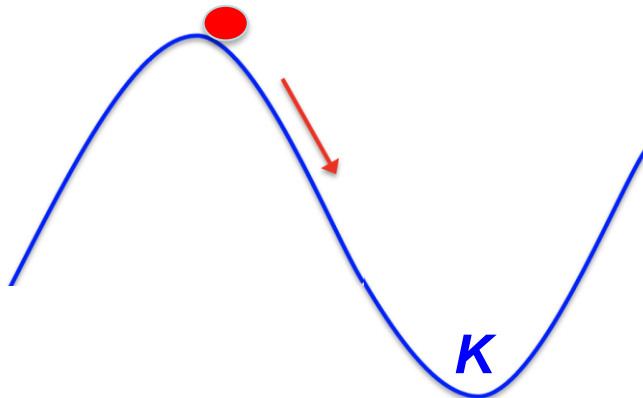
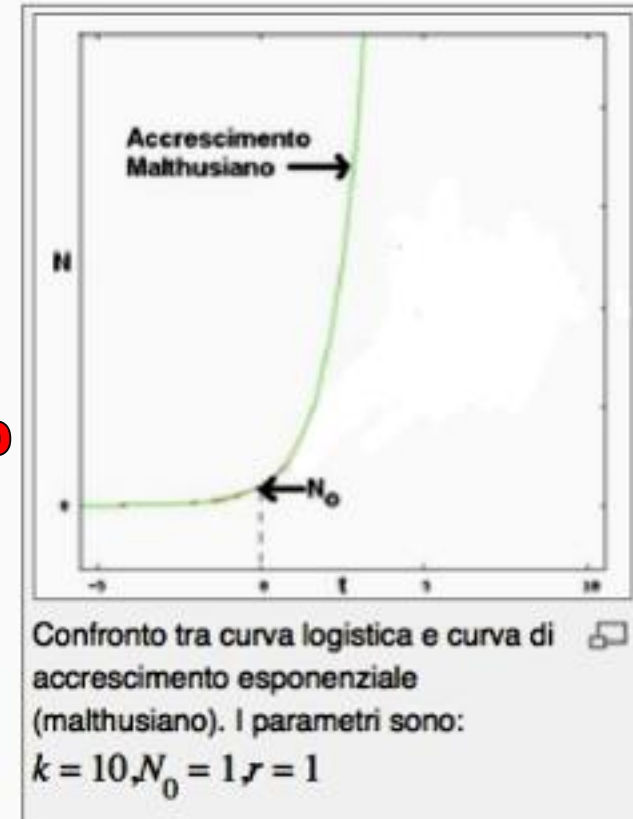
$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t) \quad \text{Flusso dissipativo non lineare 1D}$$

che può essere posta nella forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad K = \text{capacità di carico}$$

con $K = \frac{a}{b}$ che è la cosiddetta popolazione massima sostenibile ed è uguale al parametro di crescita malthusiana.

Questa è l'equazione logistica di Verhulst.



I sistemi dinamici «dissipativi» non lineari possono avere più di un punto fisso, ad esempio una coppia repulsore-attrattore: dalla crescita esponenziale si passa alla curva logistica (sigmoide).

Da Malthus all'Equazione Logistica (o di Verhulst)

Modello di crescita [modifica]

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo $N(t)$ che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di $N(t)$, che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t) \quad \text{Flusso dissipativo lineare 1D}$$

con r : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se r è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da r .

Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente r che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è $r(t) = a - bN(t)$ con a e b costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t) \quad \text{Flusso dissipativo non lineare 1D}$$

che può essere posta nella forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad K = \text{capacità di carico}$$

con $K = \frac{a}{b}$ che è la cosiddetta popolazione massima sostenibile ed è uguale al parametro di crescita malthusiana.

Questa è l'equazione logistica di Verhulst.

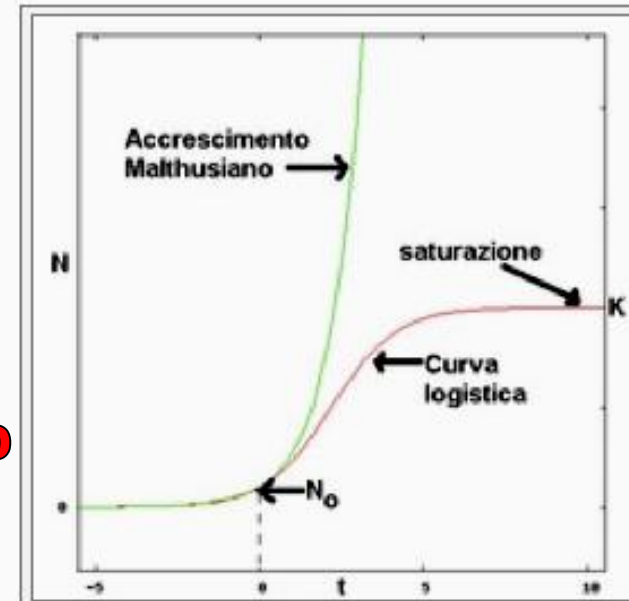
Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{b}{a - bN} \right) dN(t) = \int dt$$

risolvendo gli integrali, scegliendo come primitive quelle tali che $N(t_0) = N_0$ e utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene la soluzione:

$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right)e^{-a(t-t_0)}} \quad \text{sigmoide}$$

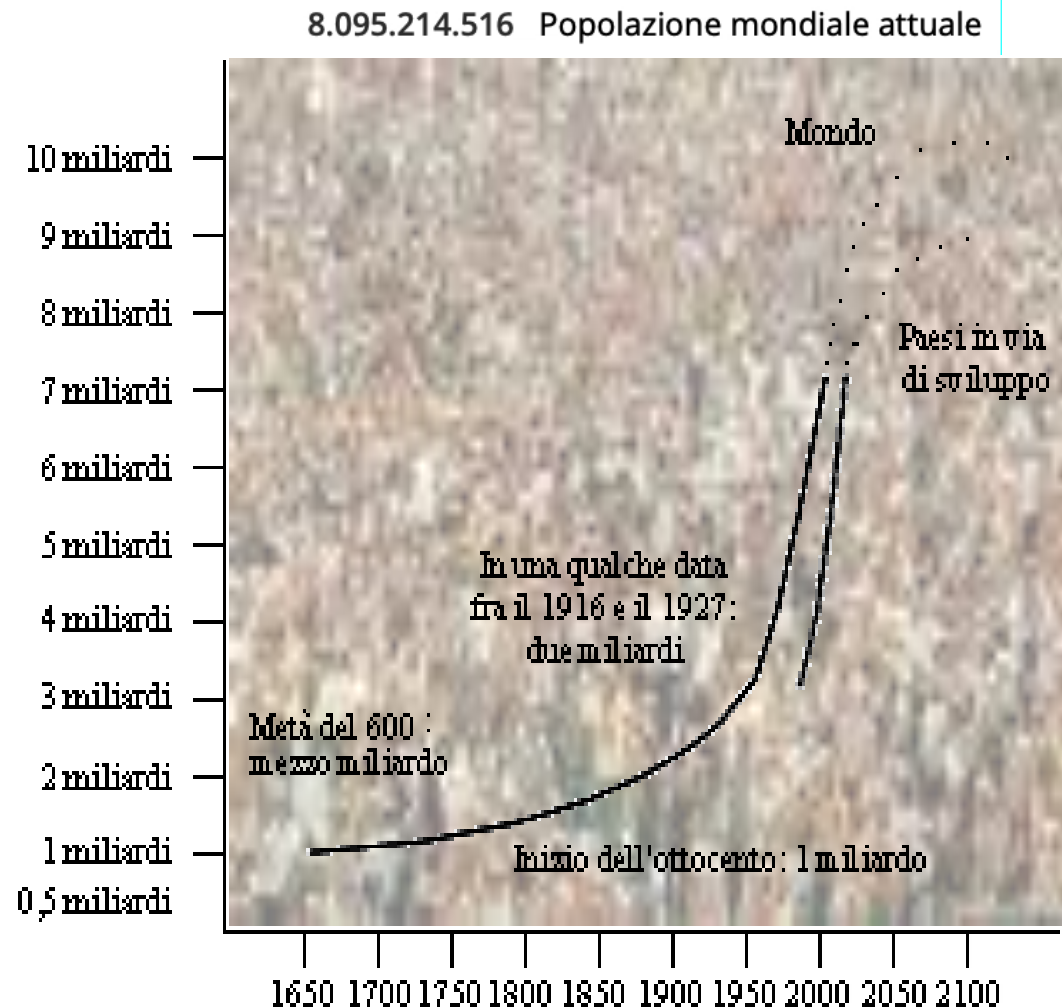
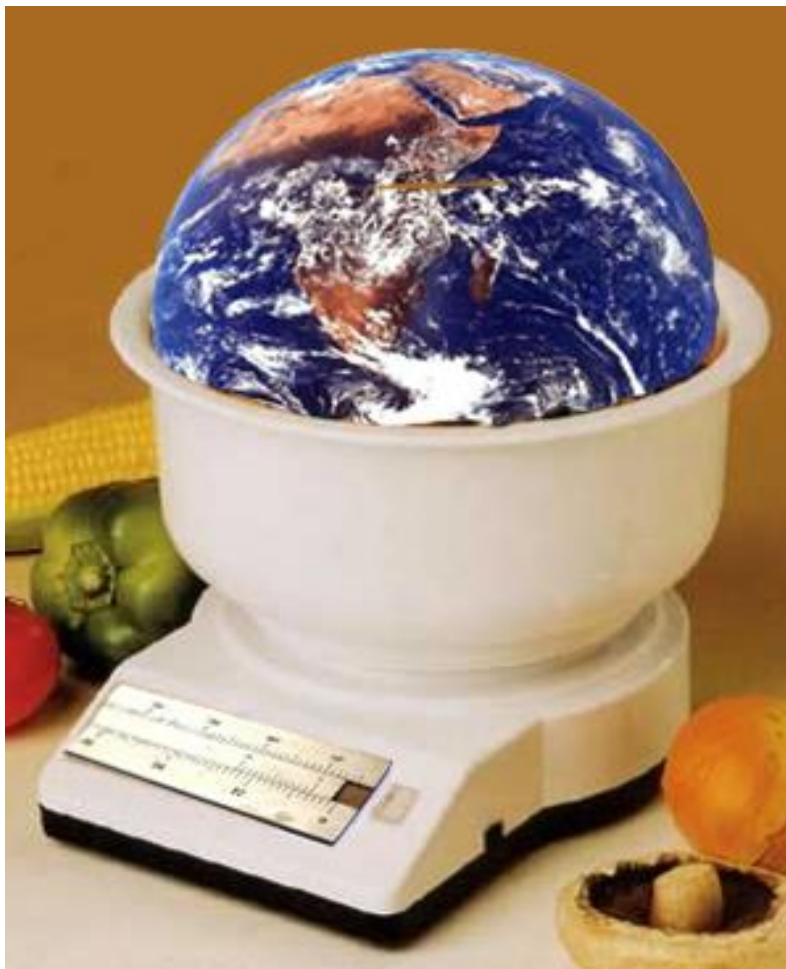
Si nota che a causa del sovraffollamento la popolazione non cresce più in maniera esponenziale ma converge al valore asintotico k indipendentemente da N_0 .



Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale (malthusiano). I parametri sono:
 $k = 10, N_0 = 1, r = 1$

Crescita esponenziale della popolazione terrestre

Se non l'abbiamo già superata, ci stiamo sicuramente avvicinando alla capacità di carico del nostro pianeta...



Oltre i limiti dello sviluppo: ci avviciniamo ad un punto critico?

Quattro possibili modi di avvicinamento della popolazione mondiale alla capacità di carico del pianeta

(simulazioni “Mondo 3” - MIT e Club di Roma)



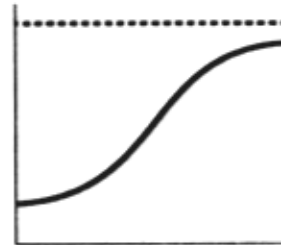
MALTHUS

Si ha crescita continua se

- i limiti fisici sono molto lontani;

oppure

- i limiti fisici crescono anch'essi con andamento esponenziale.



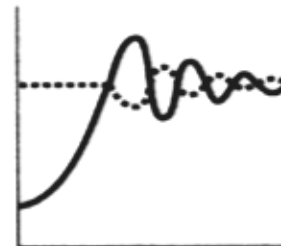
VERHULST

Si ha crescita sigmoide se

- i segnali provenienti dai limiti fisici sono precisi, istantanei e hanno risposte immediate;

oppure

- la popolazione o l'economia si limitano senza bisogno di segnali dall'esterno.

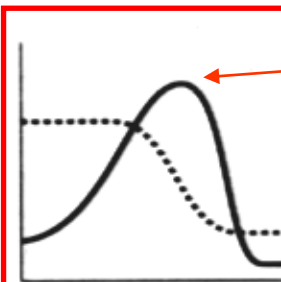


Si ha superamento e oscillazioni se

- i segnali o le risposte sono ritardati;

oppure

- i limiti non possono essere erosi o sono in grado di recuperare presto gli effetti dell'erosione.



PUNTO CRITICO?

Si ha superamento e collasso se

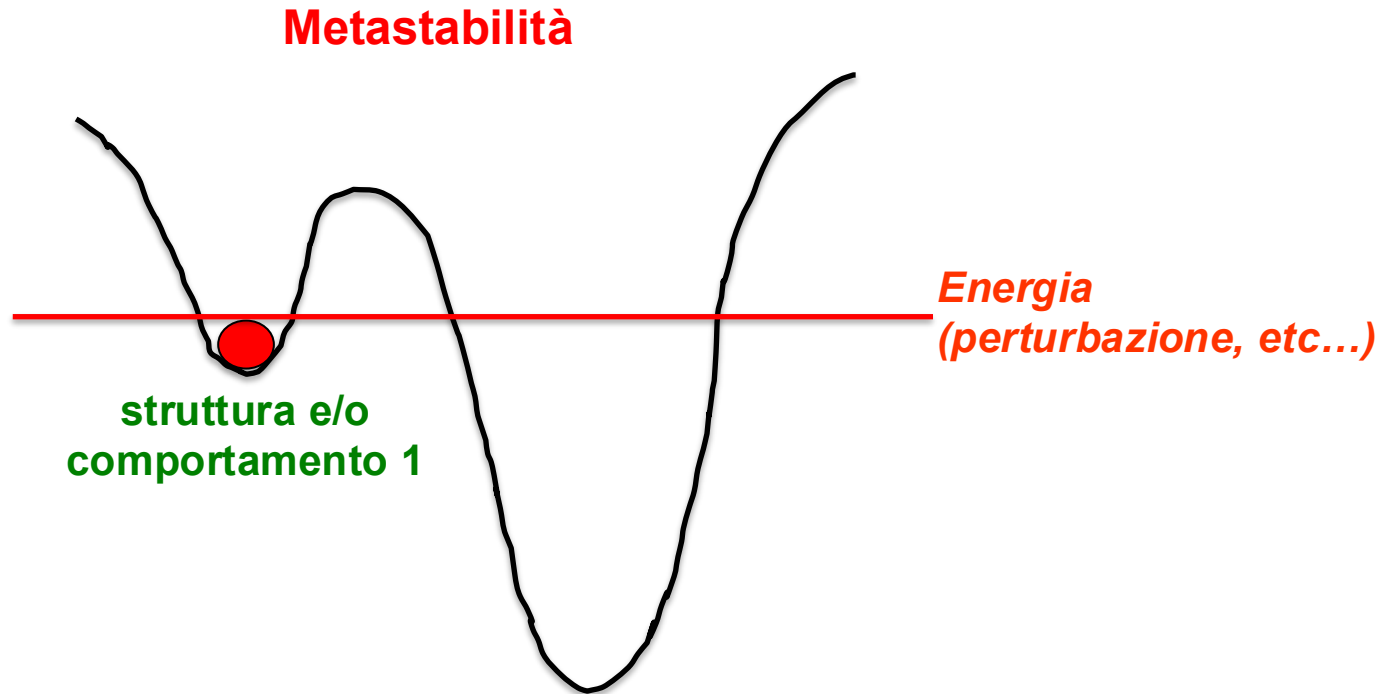
- i segnali o le risposte sono ritardati;

oppure

- i limiti possono essere erosi (subire una degradazione irreversibile quando vengono superati)

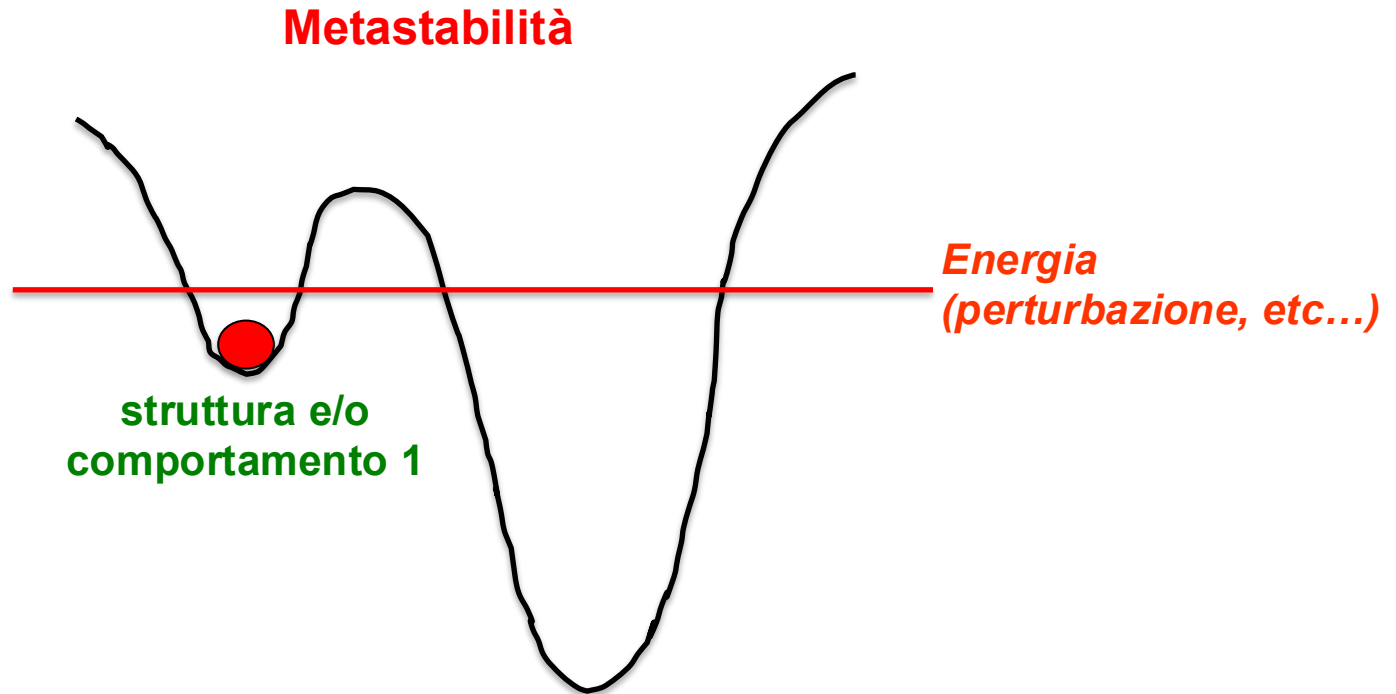
Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...



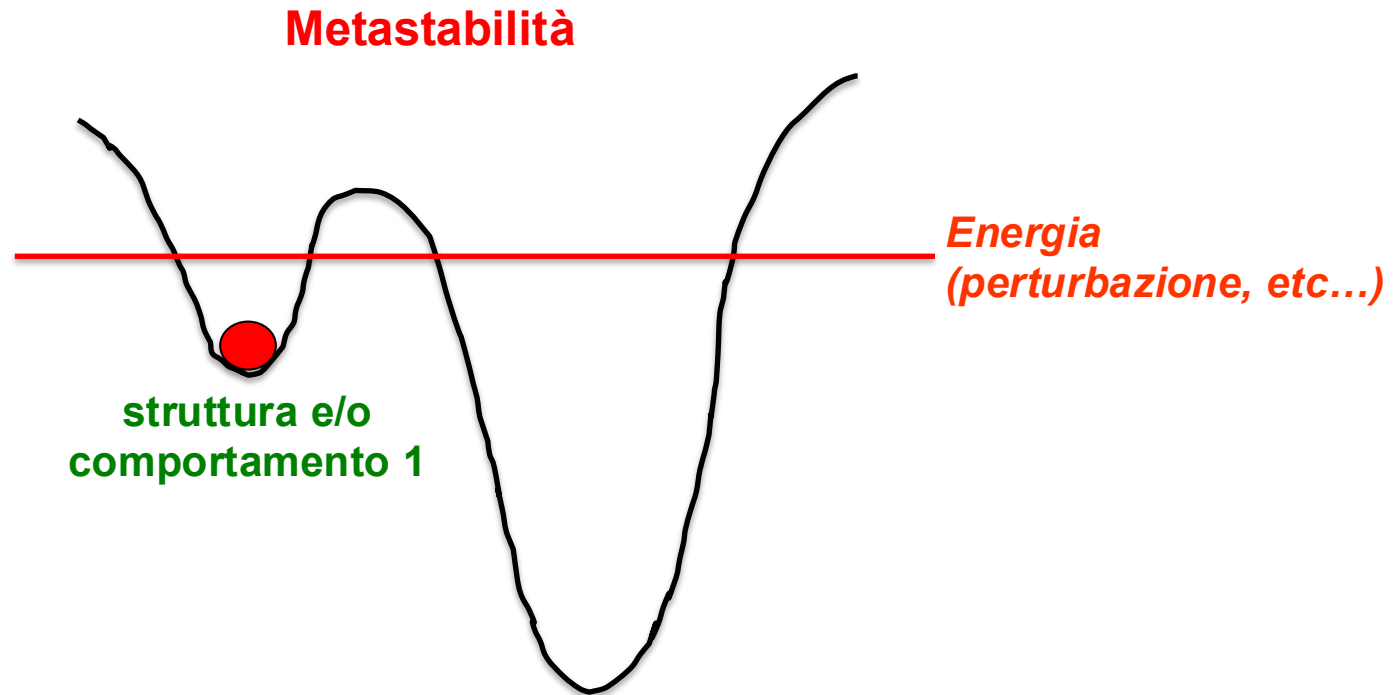
Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...



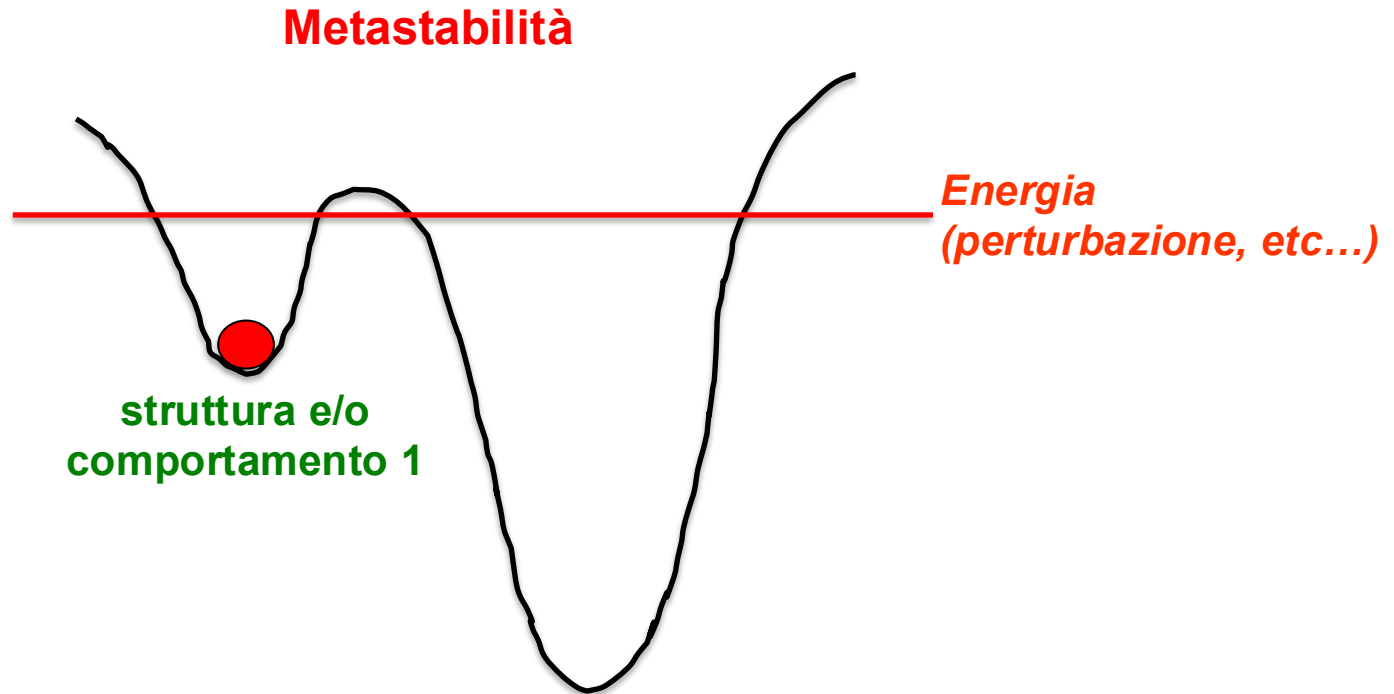
Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...



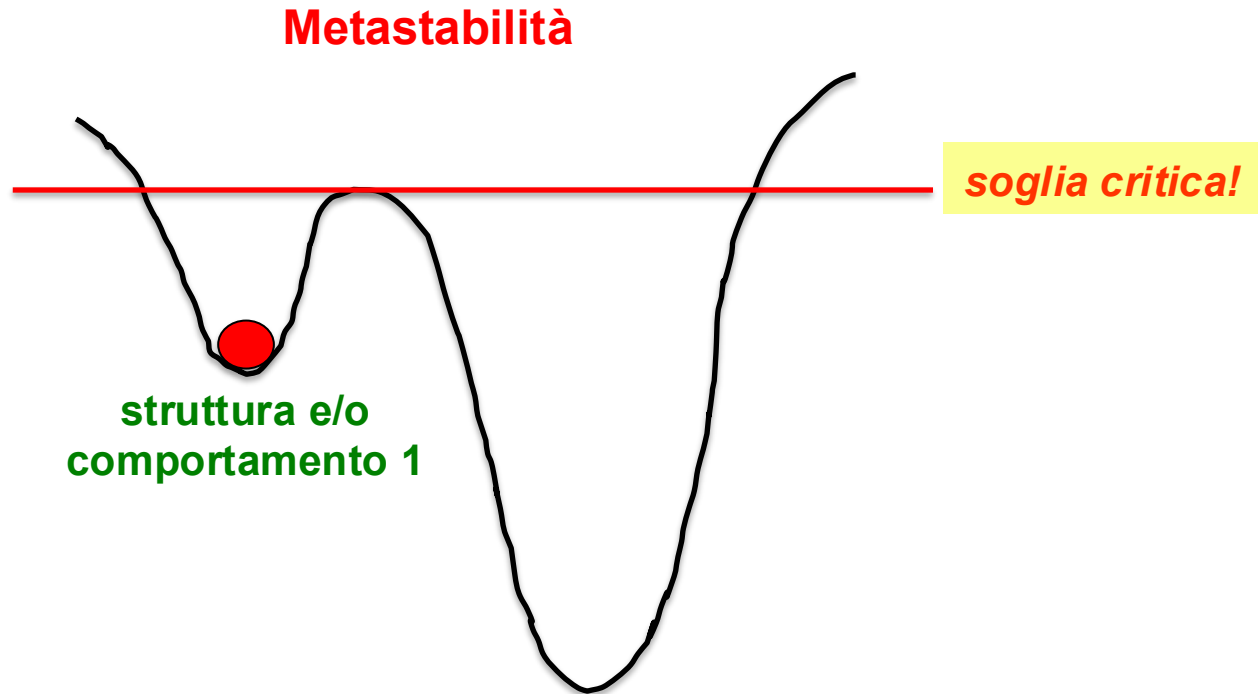
Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...



Non linearità e Soglie critiche

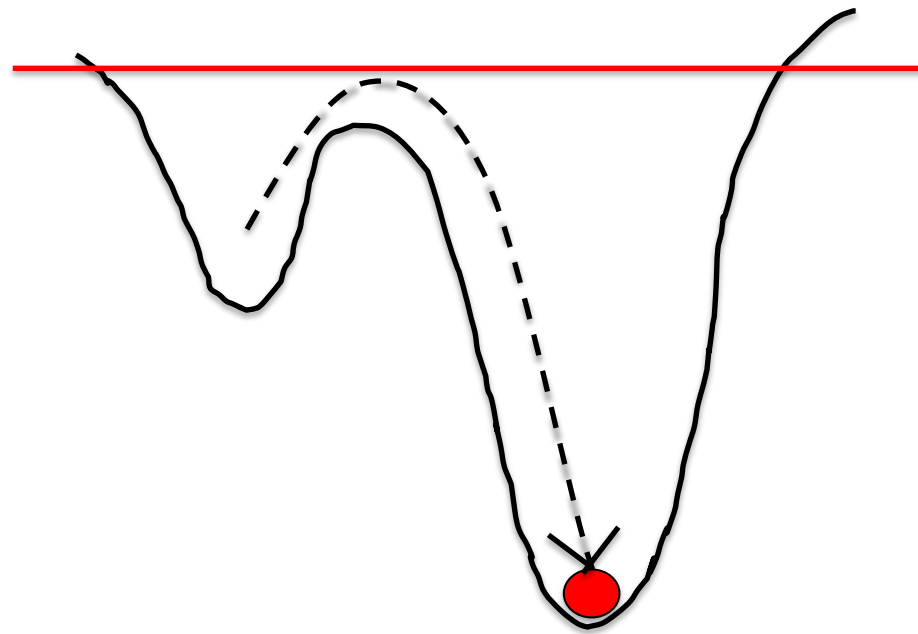
I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...



Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

Metastabilità



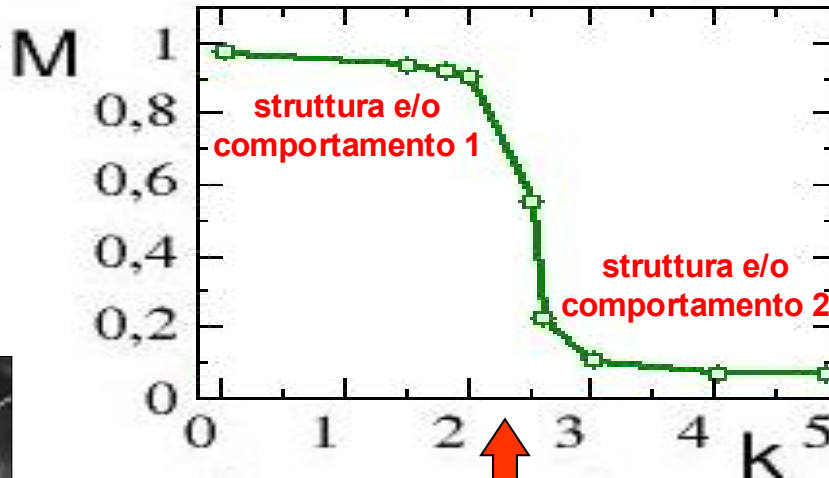
*superamento
della soglia
critica...*

**struttura e/o
comportamento 2**

Non linearità e Soglie critiche

I sistemi non lineari di solito non cambiano gradualmente ma attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** (biforcazioni) dopo le quali la loro **struttura** (nello spazio) e/o il loro **comportamento** (nel tempo) cambia drasticamente...

parametro d'ordine



parametro di controllo

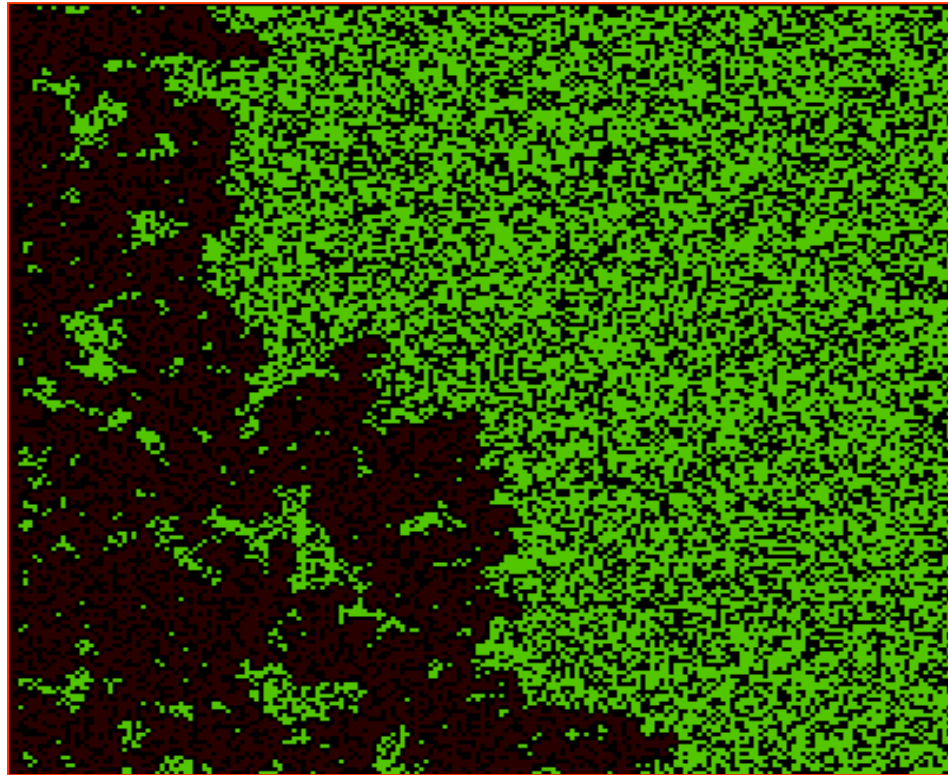


**La teoria delle
Catastrofi**

Punto Critico

Numero fattori di controllo	Un asse di comportamento	Due assi di comportamento
1	piega	
2	cuspid	
3	coda di rondine	ombelico iperbolico ombelico ellittico
4	farfalla	ombelico parabolico

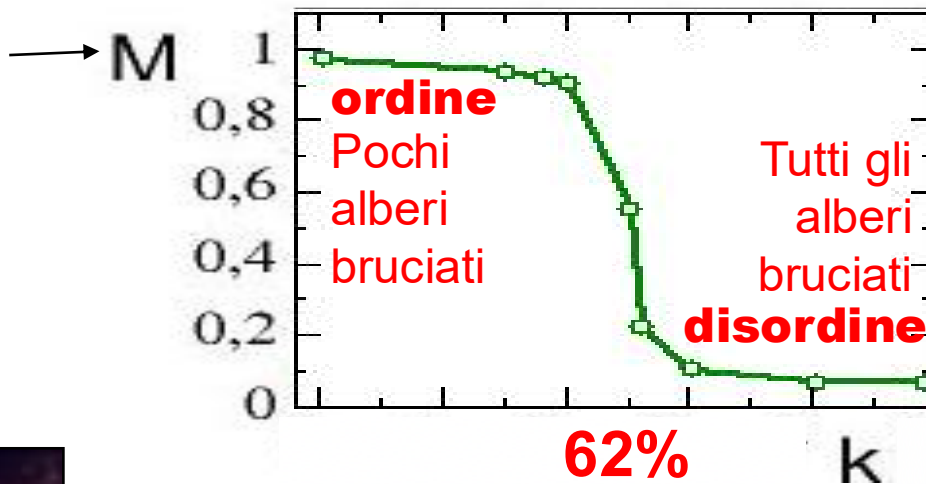
Soglie critiche nella propagazione degli incendi



Soglie critiche nella propagazione degli incendi

parametro d'ordine

% di alberi non bruciati



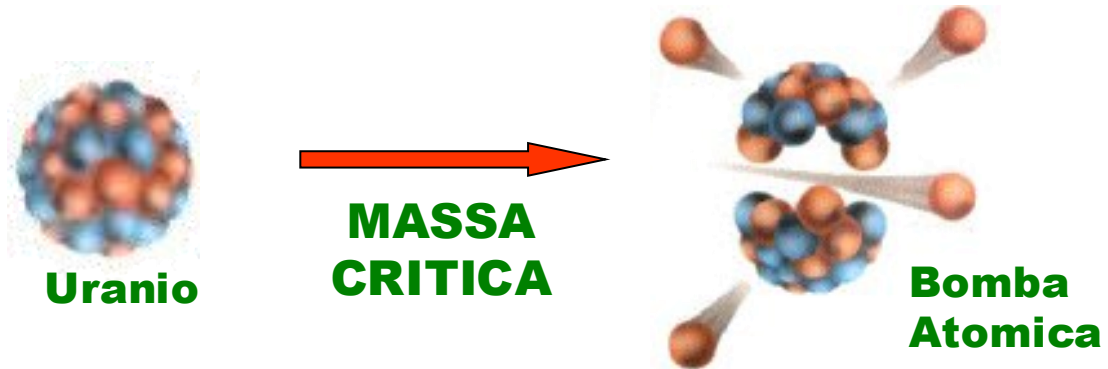
parametro di controllo

Densità degli alberi

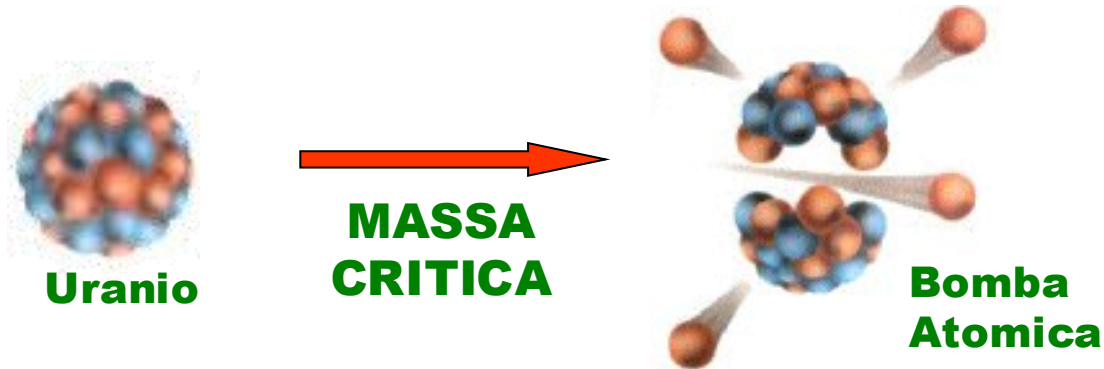
Densità Critica



Soglie critiche in Fisica



Soglie critiche in Fisica



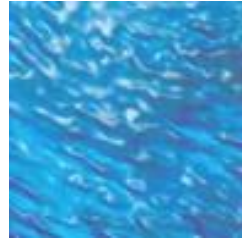
Il 2 dicembre 1942 gli Stati Uniti annunciavano: "Il navigatore italiano è sbarcato nel nuovo mondo". Quell'espressione in codice indicava che **Enrico Fermi** e i suoi collaboratori dell'Università di Chicago erano riusciti ad accendere la **prima "pila" atomica**: si chiamava "Chicago Pile-1" e aveva prodotto la prima reazione nucleare a catena autoalimentata e controllata della storia. Era l'alba dell'era atomica.

Il **primo reattore nucleare della storia** era stato costruito in segreto sotto le tribune di un campo sportivo abbandonato dell'Università di Chicago. **Fermi** lo descrisse come "una pila grezza di mattoni neri e travi in legno". La pila era formata da un nocciolo di uranio e blocchi di grafite, con barre di sicurezza in cadmio che servivano a controllare la reazione a catena, per evitare che divenisse esplosiva.

Soglie critiche in Fisica

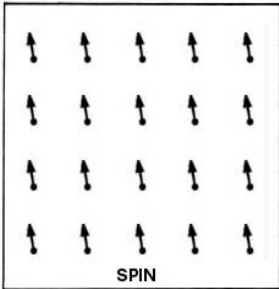


Ghiaccio

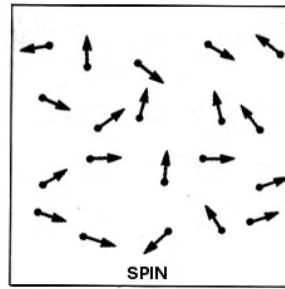


Acqua

**TEMPERATURA
CRITICA**



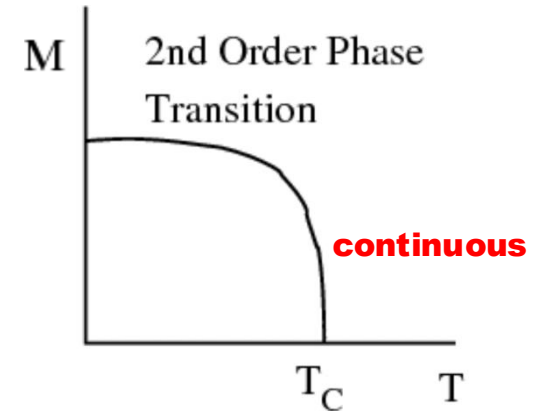
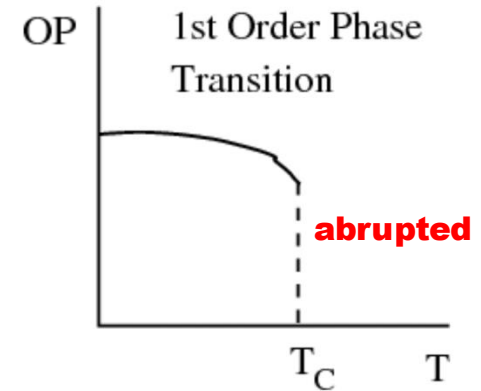
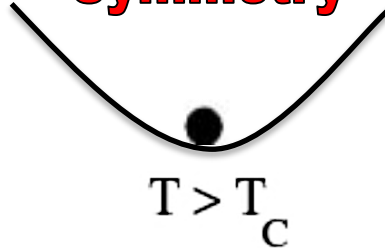
Magnete ordinato



Magnete disordinato



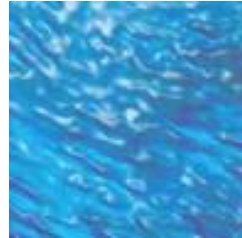
Symmetry



Soglie critiche in Fisica

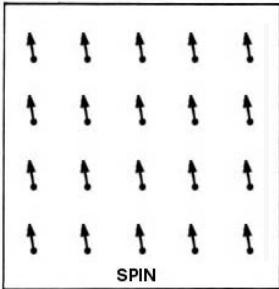


Ghiaccio

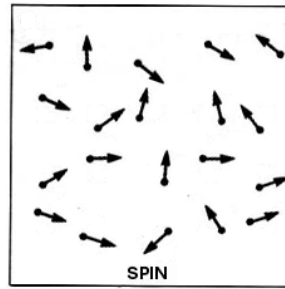


Acqua

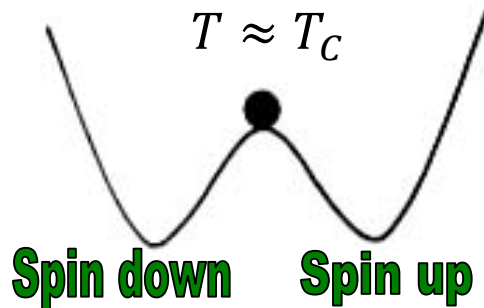
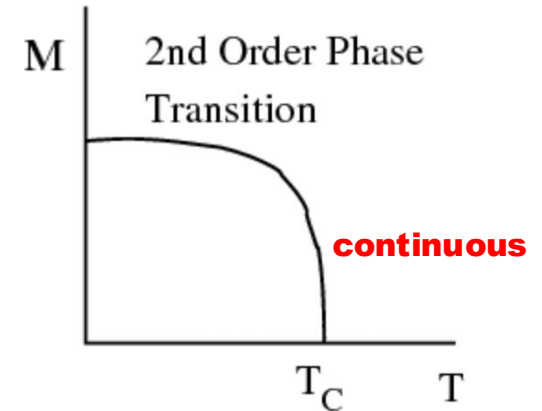
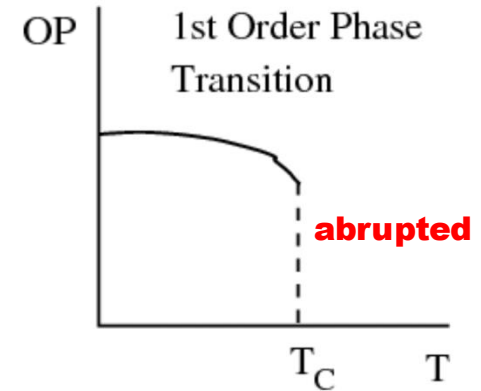
**TEMPERATURA
CRITICA**



Magnete ordinato



Magnete disordinato



Soglie critiche in Fisica

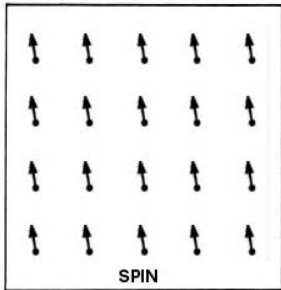


Ghiaccio

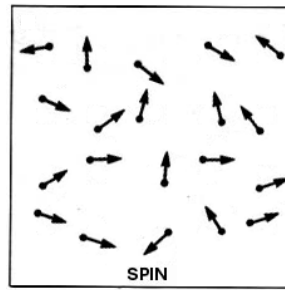


Acqua

TEMPERATURA CRITICA

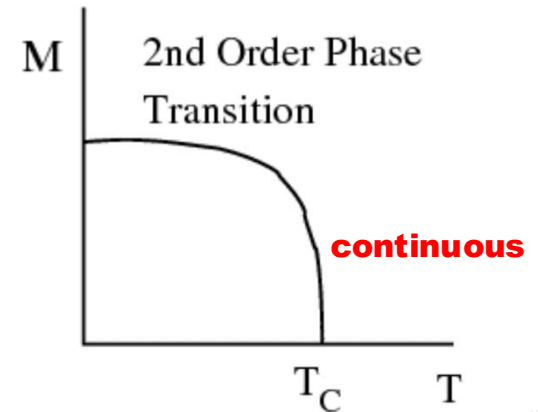
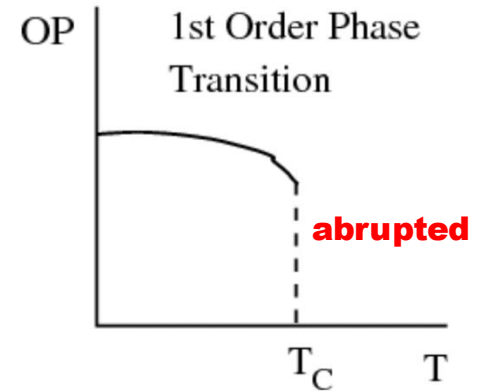
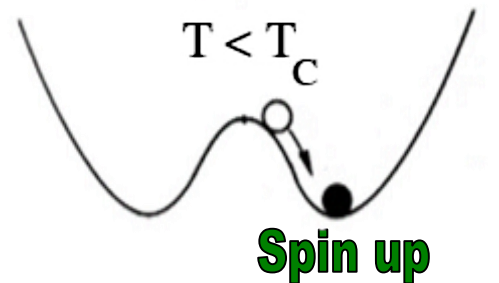


Magnete ordinato



Magnete disordinato

Symmetry breaking



La Legge di

Poten:

$T \sim T_C$

Esponenti critici e invarianza di scala

$C \sim |T - T_c|^{-\alpha}$

$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$

$M \sim (T_c - T)^\beta$

$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$

Al punto critico →



Soglie critiche nella Scienza delle Costruzioni

SISTEMI AD ELASTICITA' CONCENTRATA

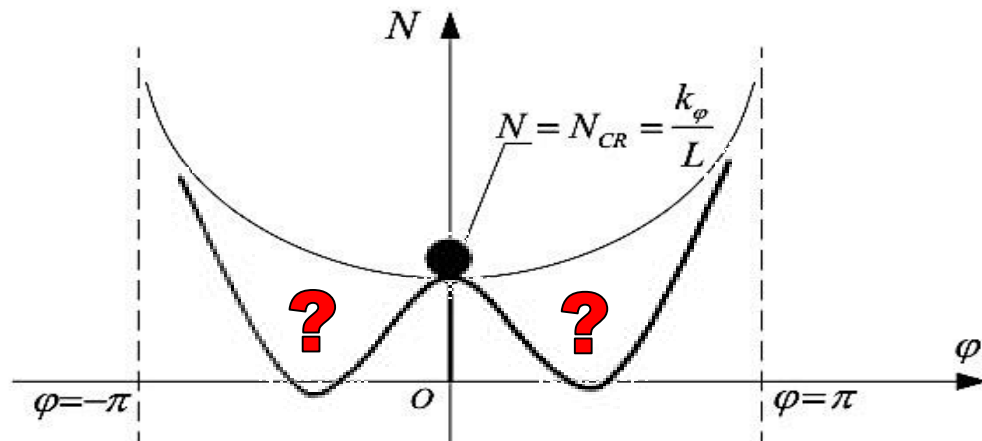
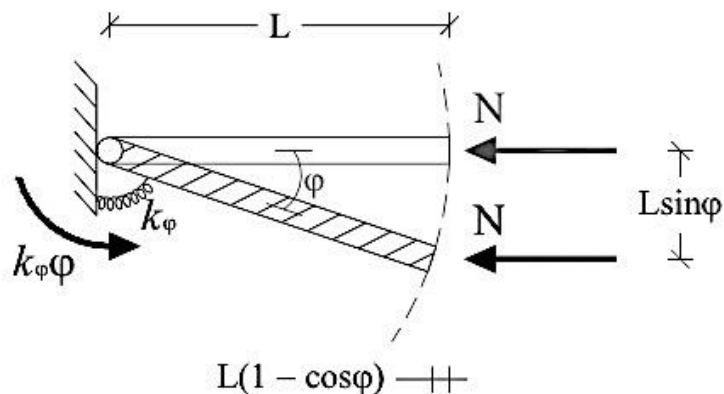


L'instabilità dell'equilibrio nelle strutture elastiche si verifica quando gli effetti instabilizzanti provocati dalle forze esterne prevalgono sulle reazioni elastiche stabilizzanti. Il carico che provoca il bilanciamento dei due suddetti effetti viene definito **CARICO CRITICO**. A partire da tale valore, si ha la perdita dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico:

momento instabilizzante
indotto dalla forza N

$$NL \sin \varphi = k_{\varphi} \varphi$$

reazione elastica
della molla

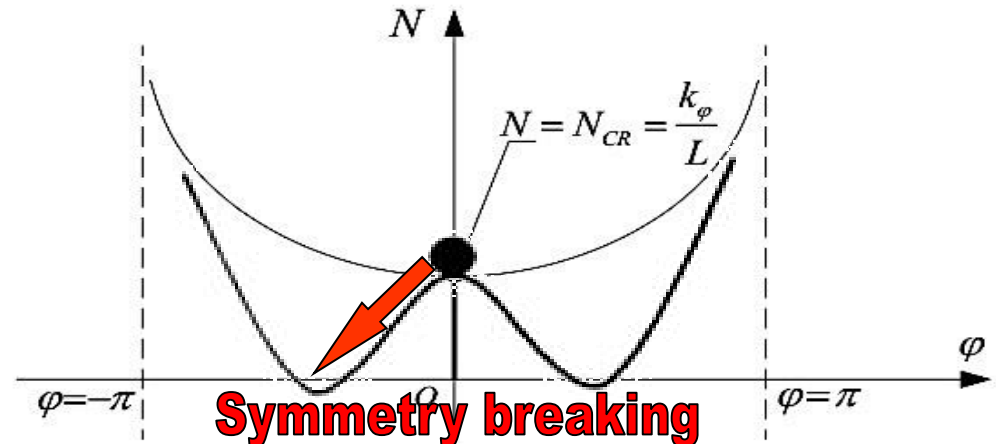
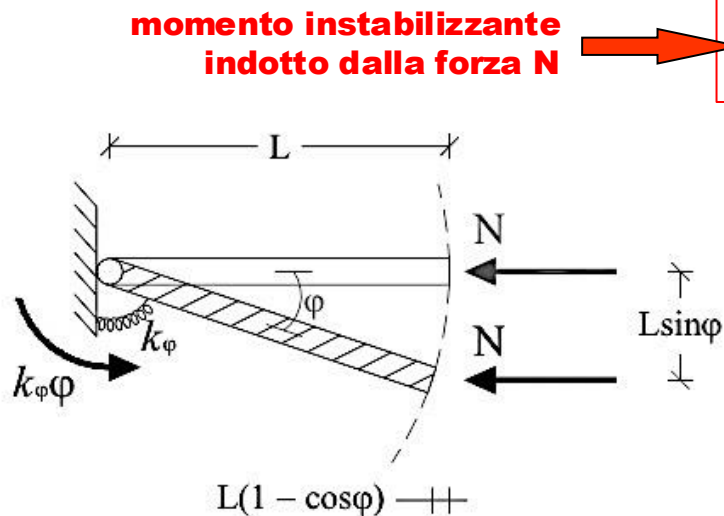


Soglie critiche nella Scienza delle Costruzioni

SISTEMI AD ELASTICITA' CONCENTRATA



L'instabilità dell'equilibrio nelle strutture elastiche si verifica quando gli effetti instabilizzanti provocati dalle forze esterne prevalgono sulle reazioni elastiche stabilizzanti. Il carico che provoca il bilanciamento dei due suddetti effetti viene definito **CARICO CRITICO**. A partire da tale valore, si ha la perdita dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico:



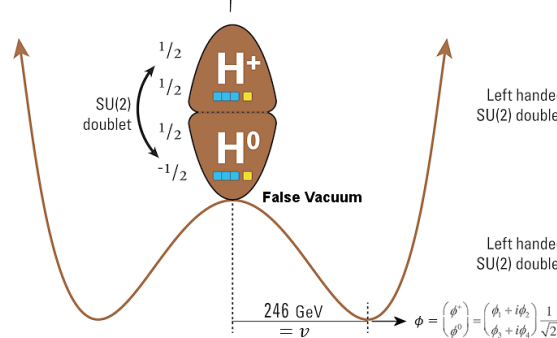
Soglie critiche nella Fisica delle Alte Energie

The Standard Model of Particle Physics

Spin 0
(Higgs Boson)

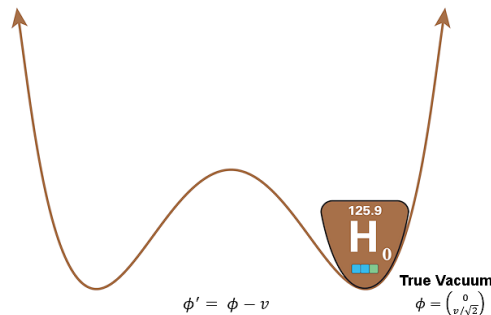
Hypercharge $\rightarrow Y$
Weak Isospin $\rightarrow T_3$
Gauge boson coupling
mass (GeV)
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

$$V(\phi) = -\frac{|m|^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda \phi^4}{4!}$$



(a) Unbroken Symmetry (Symmetric phase)

(b) Broken Symmetry (Higgs phase/condensate)



Spin 1/2
(Fermions)

Generation
Hypercharge (L) $\rightarrow Y$ Hypercharge (R) $\leftarrow Y$
Weak Isospin (L) $\rightarrow T_3$ Weak Isospin (R) $\leftarrow T_3$
Gauge boson coupling
mass (GeV)
flavor
color?
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

	1st	2nd	3rd	
Quarks	$\begin{matrix} u \\ d \end{matrix}$	$\begin{matrix} c \\ s \end{matrix}$	$\begin{matrix} t \\ b \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/3 \\ -1/3 \end{matrix}$
Leptons	$\begin{matrix} \nu_e \\ e \end{matrix}$	$\begin{matrix} \nu_\mu \\ \mu \end{matrix}$	$\begin{matrix} \nu_\tau \\ \tau \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$

Spin 1
(Gauge Bosons)

mass (GeV)
symbol
Fermion coupling

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

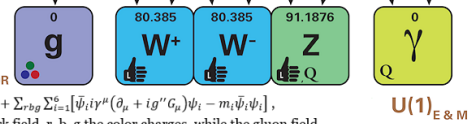
g : weak coupling constant
 g' : em coupling constant



$$W^\pm = (W^1 \pm iW^2)/\sqrt{2}$$

$$Z = \cos \theta_W W^3 - \sin \theta_W B$$

$$\gamma = \sin \theta_W W^3 + \cos \theta_W B$$



$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \sum_{rbg} \sum_{i=1}^6 [\bar{\psi}_i i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g'' G_\mu^a) \psi_i - m_i \bar{\psi}_i \psi_i]$,
where ψ_i is the quark field, r, b, g the color charges, while the gluon field
 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + i g'' (G_\mu^b G_\nu^c - G_\nu^b G_\mu^c)$, the superscript "a" is the gluon index
from 1 to 8, g'' the coupling constant, m_i the mass of the quarks.

$$\mathcal{S}_3 = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - M^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \text{where } D_\mu \phi = [\partial_\mu - (i/2)g' B_\mu - (i/2)g \sigma_i W_\mu^i] \phi, \quad \mathcal{S}_2 = i \bar{R} \gamma^\mu D_\mu R + i \bar{L} \gamma^\mu D_\mu L \quad \text{where } D_\mu R = [\partial_\mu + i g' B_\mu - (i/2)g \sigma_i W_\mu^i] R, \quad \mathcal{S}_1 = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{where } W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

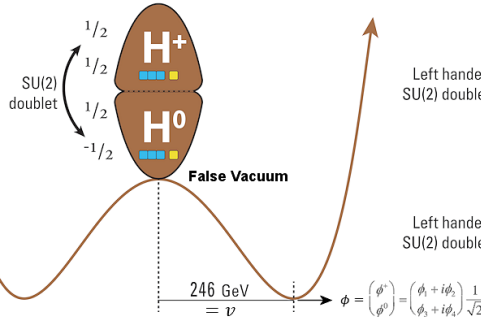
Soglie critiche nella Fisica delle Alte Energie

The Standard Model of Particle Physics

Spin 0
(Higgs Boson)

Hypercharge $\rightarrow Y$
Weak Isospin $\rightarrow T_3$
Gauge boson coupling
mass (GeV)
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

$$V(\phi) = -\frac{|m|^2|\phi|^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4!}$$



(a) Unbroken Symmetry (Symmetric phase)

(b) Broken Symmetry (Higgs phase/condensate)

Spin 1/2
(Fermions)

Generation
Hypercharge (L) $\rightarrow Y$ mass (GeV)
Weak Isospin (L) $\rightarrow T_3$ flavor
Gauge boson coupling
color?
Hypercharge (R) $\leftarrow Y$
Weak Isospin (R) $\leftarrow T_3$
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

	1st	2nd	3rd	
Quarks	$\begin{matrix} u \\ d \end{matrix}$	$\begin{matrix} c \\ s \end{matrix}$	$\begin{matrix} t \\ b \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/3 \\ -1/3 \end{matrix}$
Leptons	$\begin{matrix} \nu_e \\ e \end{matrix}$	$\begin{matrix} \nu_\mu \\ \mu \end{matrix}$	$\begin{matrix} \nu_\tau \\ \tau \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$

Spin 1
(Gauge Bosons)

mass (GeV)
symbol
Fermion coupling

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

g : weak coupling constant
 g' : em coupling constant

SU(3)_{COLOR}
SU(2)_{LEFT}
U(1)_{HYPERCHARGE}

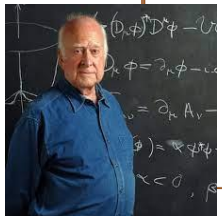
$$W^\pm = (W^1 \pm iW^2)/\sqrt{2}$$

$$Z = \cos \theta_W W^3 - \sin \theta_W B$$

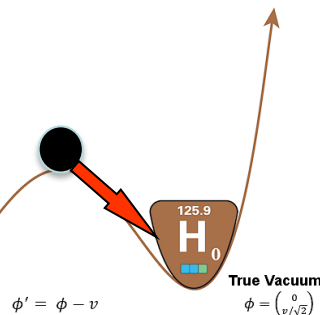
$$\gamma = \sin \theta_W W^3 + \cos \theta_W B$$

SU(3)_{COLOR}
SU(2)_{LEFT}
U(1)_{E & M}

$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \sum_{r,b} \bar{\psi}_r \gamma^\mu (\partial_\mu + ig' A_\mu) \psi_r - m_r \bar{\psi}_r \psi_r$,
where ψ_r is the quark field, r, b, g the color charges, while the gluon field
 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + ig' (G_\mu^a G_\nu^b - G_\nu^a G_\mu^b)$, the superscript "a" is the gluon index
from 1 to 8, g' the coupling constant, m_r the mass of the quarks.



Peter Higgs



	1st	2nd	3rd
$\begin{matrix} u \\ d \end{matrix}$	0.0023 0.0048	1.275 0.095	173.07 4.18
$\begin{matrix} \nu_e \\ e \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_2 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_3 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} \nu_\mu \\ \mu \end{matrix}$	0.000511 0.105658	0.105658 1.77682	1.77682 1.77682
$\begin{matrix} \nu_\tau \\ \tau \end{matrix}$	0.000511 0.105658	0.105658 1.77682	1.77682 1.77682

$$\mathcal{S}_3 = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - M^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \text{where } D_\mu \phi = [\partial_\mu - (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] \phi, \quad \mathcal{S}_2 = i\bar{R} \gamma^\mu D_\mu R + i\bar{L} \gamma^\mu D_\mu L \quad \text{where } D_\mu R = [\partial_\mu + ig' B_\mu + ig\sigma_i W_\mu^i] R, \quad D_\mu L = [\partial_\mu + (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i] L, \quad \mathcal{S}_1 = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{where } W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

Soglie critiche nella Fisica delle Alte Energie

The Standard Model of Particle Physics

Spin 0
(Higgs Boson)

Hypercharge $\rightarrow Y$
Weak Isospin $\rightarrow T_3$
Gauge boson coupling
mass (GeV)
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

$$V(\phi) = -\frac{|m|^2|\phi|^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4!}$$

H^+
 H^0
SU(2) doublet
False Vacuum

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(a) Unbroken Symmetry (Symmetric phase)

(b) Broken Symmetry (Higgs phase/condensate)

$$\phi' = \phi - v$$

True Vacuum
 $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Spin 1/2
(Fermions)

Generation
Hypercharge (L) $\rightarrow Y$
Weak Isospin (L) $\rightarrow T_3$
Gauge boson coupling
mass (GeV)
flavor
color?
Hypercharge (R)
Weak Isospin (R)
Electric Charge
 $Q = Y + T_3$

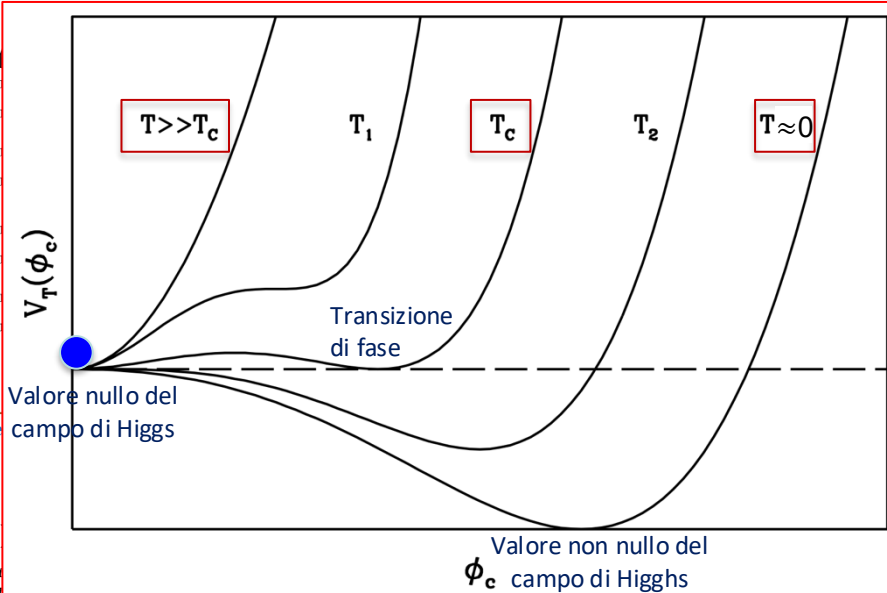
Spin 1
(Gauge Bosons)

mass (GeV)
symbol
Fermion coupling

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

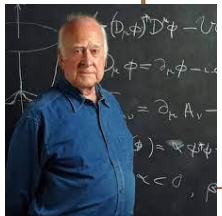
g : weak coupling constant



Variazione del **potenziale efficace** in funzione del **valor medio del campo di Higgs** per diversi valori della temperatura. La situazione di oggi dovrebbe corrispondere ad una temperatura appena superiore allo zero assoluto. **Ecco perché esiste qualcosa invece che il nulla!**

from 1 to 8, g'' the coupling constant, m_t the mass of the quarks.

$$\mathcal{L}_3 = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - M^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + G_\mu (L \phi R + R \phi^\dagger L) \quad \text{where } D_\mu \phi = \left[\partial_\mu - (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i \right] \phi, \quad \mathcal{L}_2 = i\bar{R} \gamma^\mu D_\mu R + i\bar{L} \gamma^\mu D_\mu L \quad \text{where } D_\mu R = \left[\partial_\mu + (i/2)g' B_\mu - (i/2)g\sigma_i W_\mu^i \right] R, \quad \mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{where } W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$



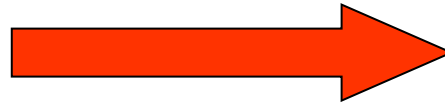
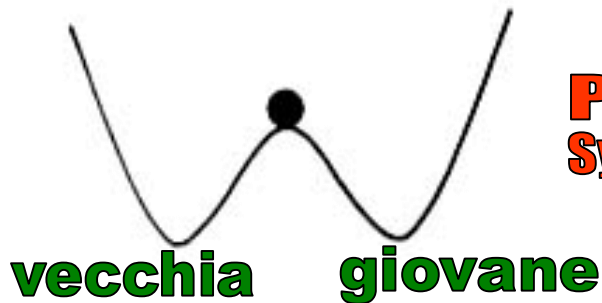
Peter Higgs

Soglie critiche nella Percezione

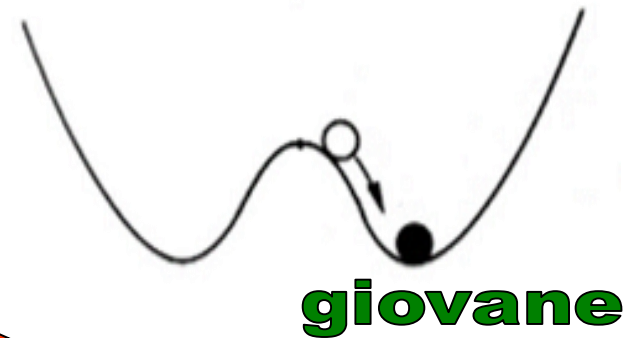


giovane o vecchia?

indecisione...



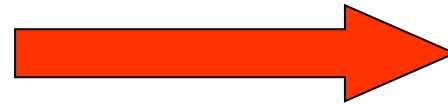
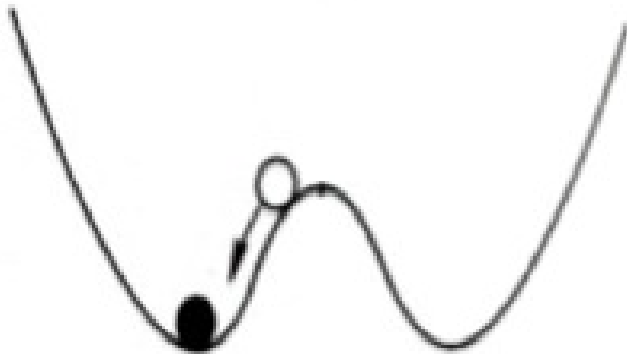
**Punto Critico
Symmetry Breaking!**



Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

U , D , T , Q , C , S , S ... ?
1 2 3 4 5 6 7



Punto Critico

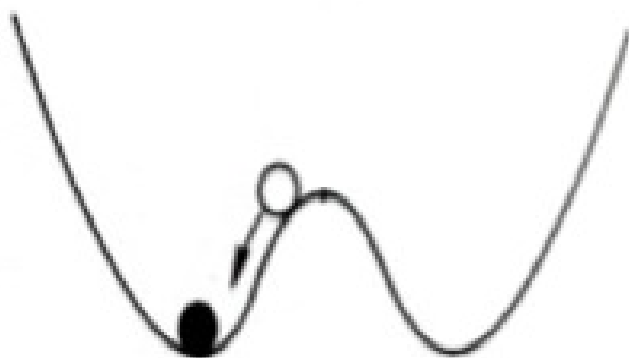
LETTERE

PENSIERO VERTICALE

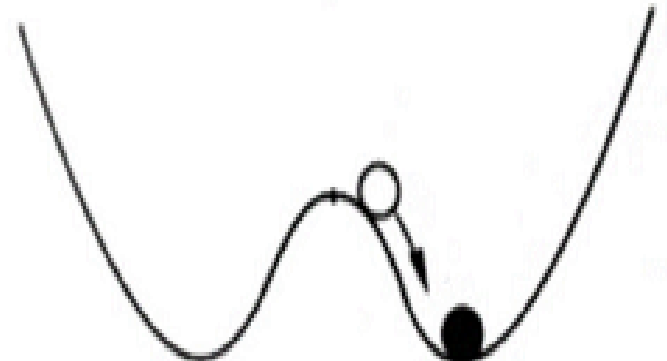
Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

U , D , T , Q , C , S , S , 0
1 2 3 4 5 6 7 8



LETTERE



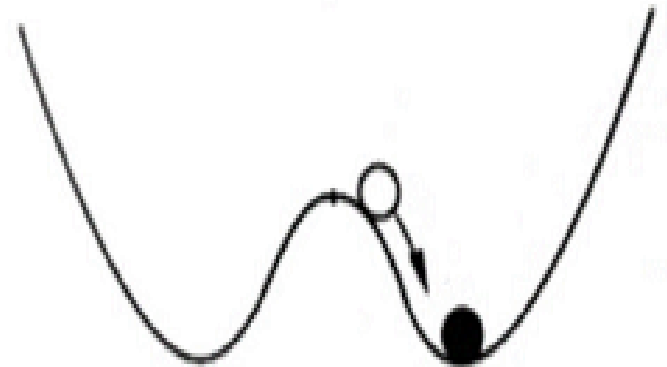
NUMERI

PENSIERO VERTICALE

Soglie critiche nella risoluzione di problemi

Come prosegue questa sequenza?

U , D , T , Q , C , S , S , O
1 2 3 4 5 6 7 8

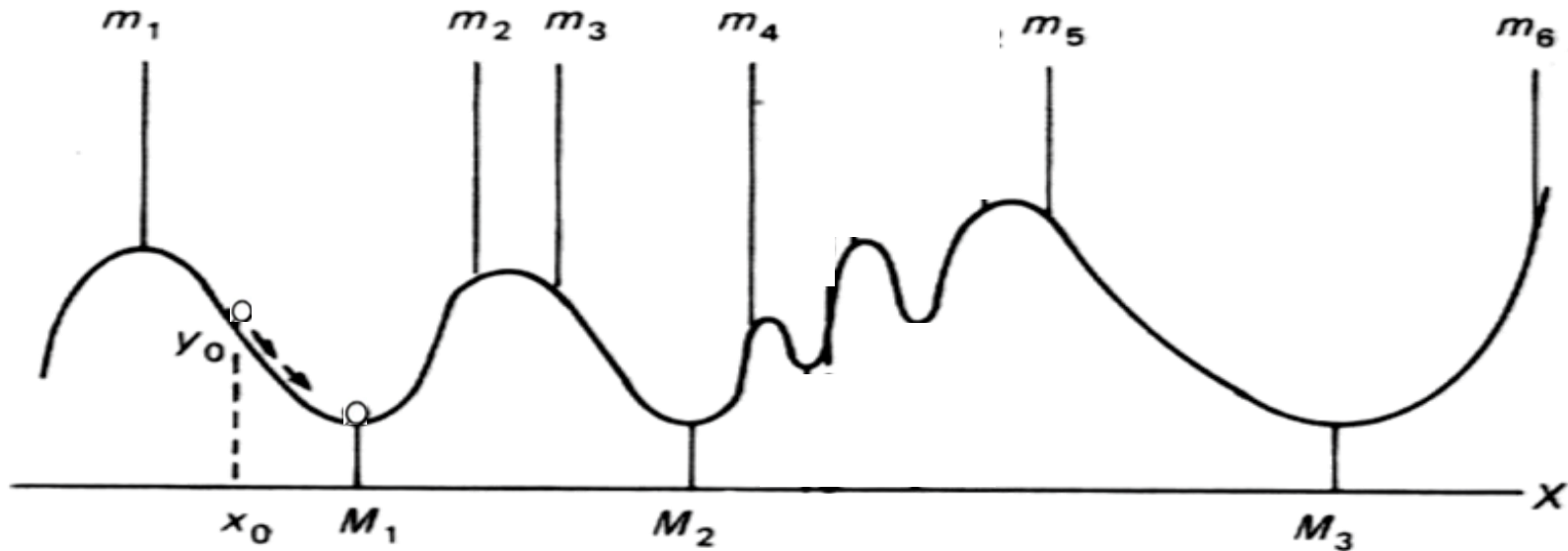


NUMERI

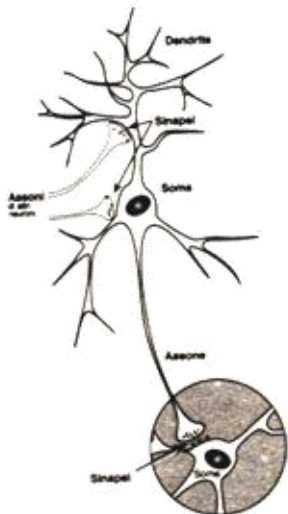
PENSIERO LATERALE

Reti Neurali e Vetri di Spin

Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



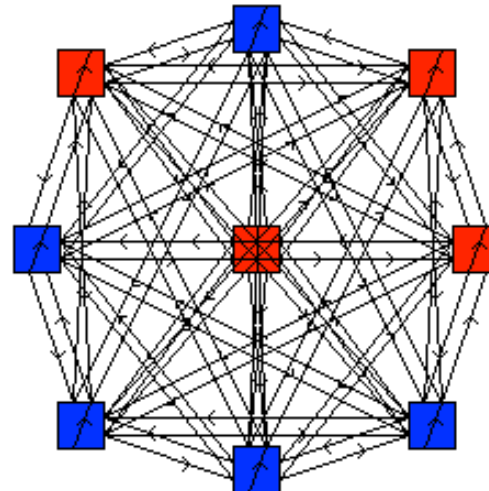
Neurone reale



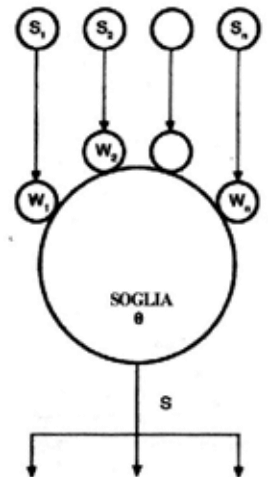
Cervello Umano



Rete Neurale (Hopfield)

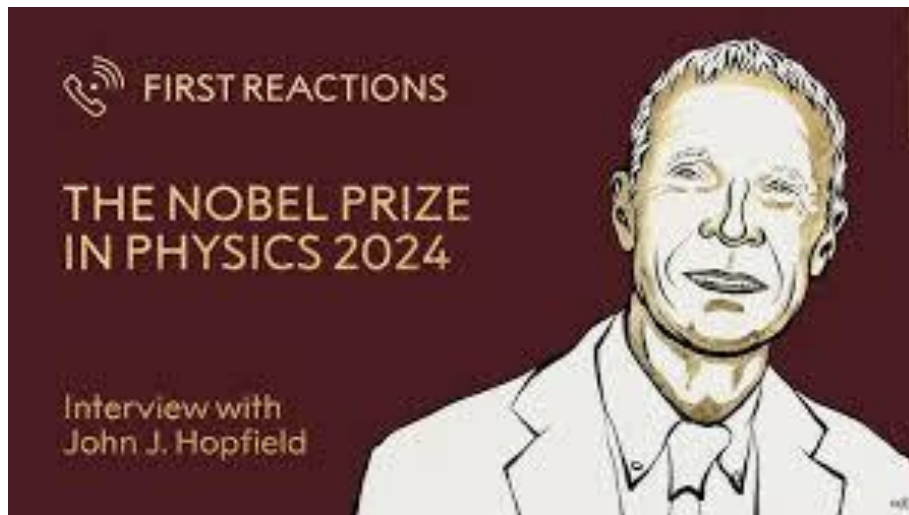
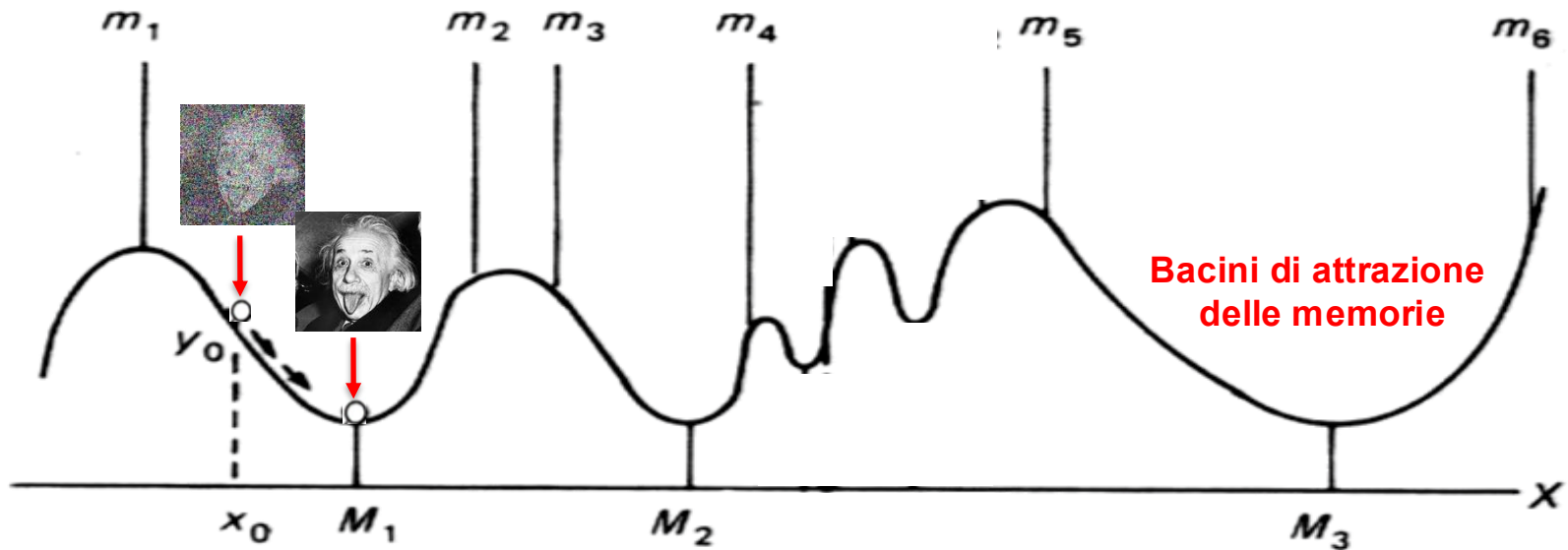


Neurone artificiale

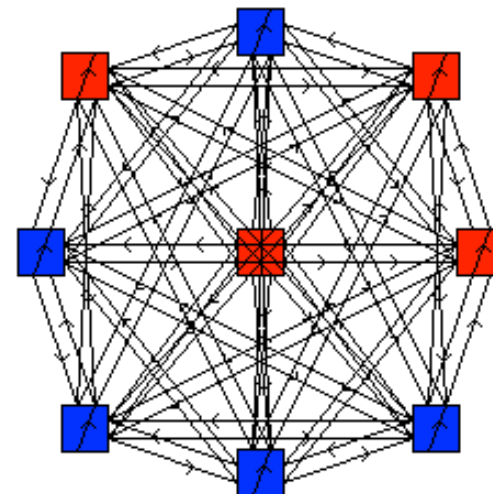


Reti Neurali e Vetri di Spin

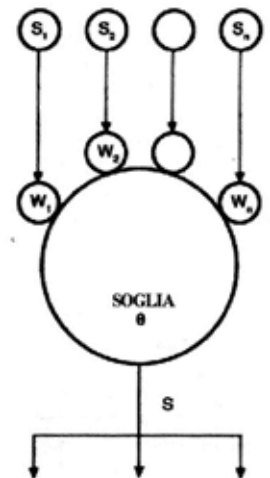
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



Rete Neurale
(Hopfield)

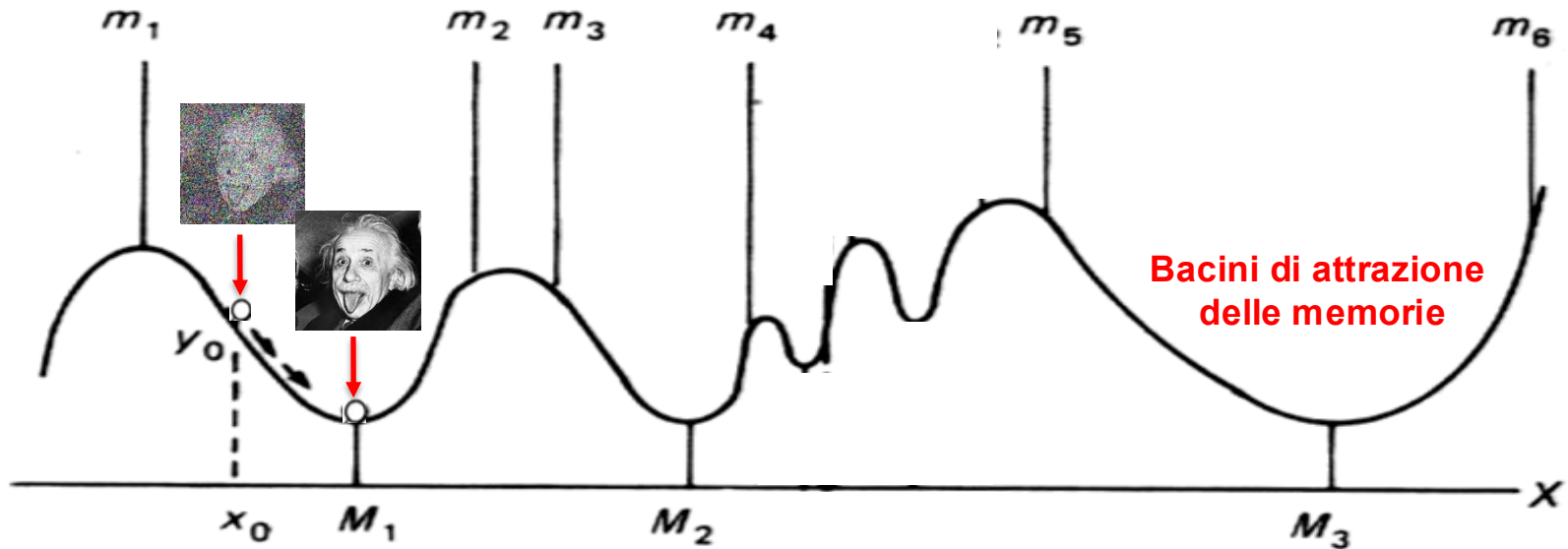


Neurone artificiale

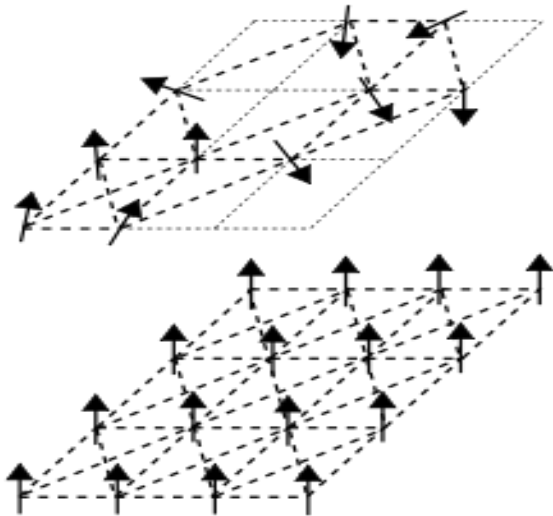


Reti Neurali e Vetri di Spin

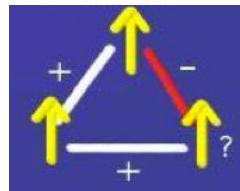
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



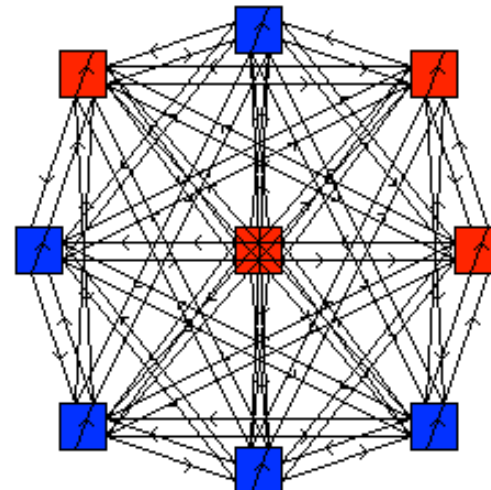
Vetri di Spin (Spin Glasses)



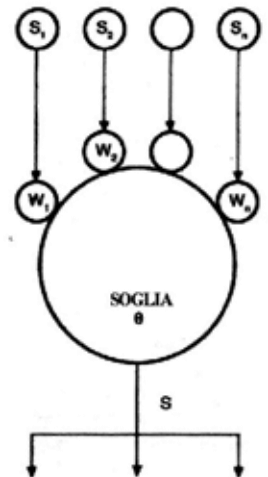
"frustrazione"



Rete Neurale (Hopfield)

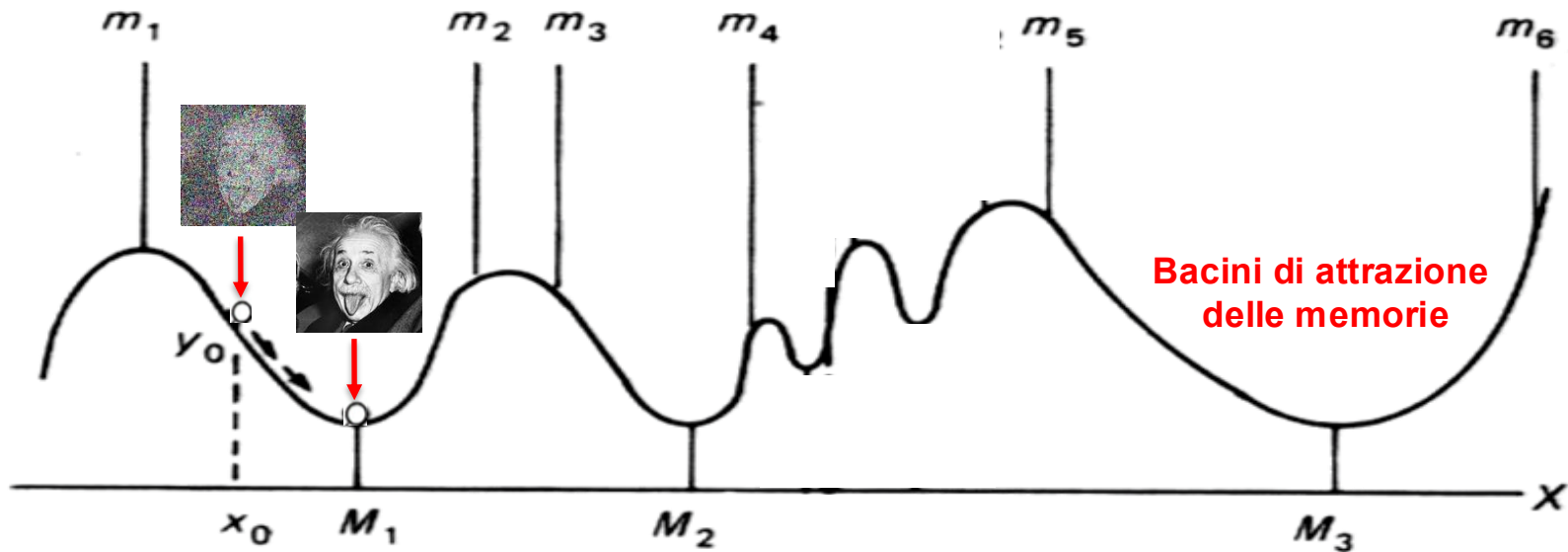


Neurone artificiale

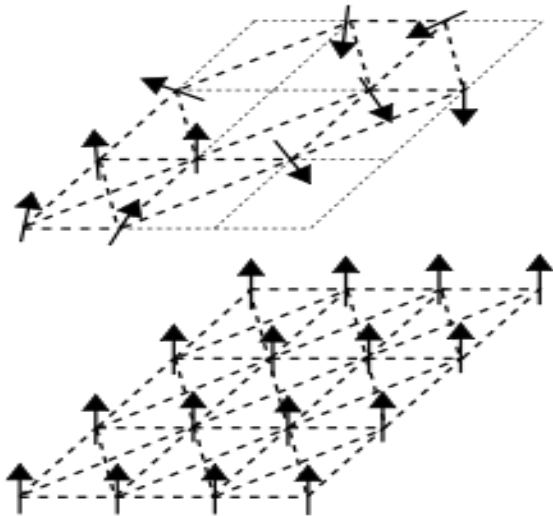


Reti Neurali e Vetri di Spin

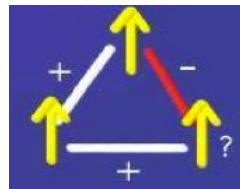
Landscape Energetico nei modelli di Memoria Associativa



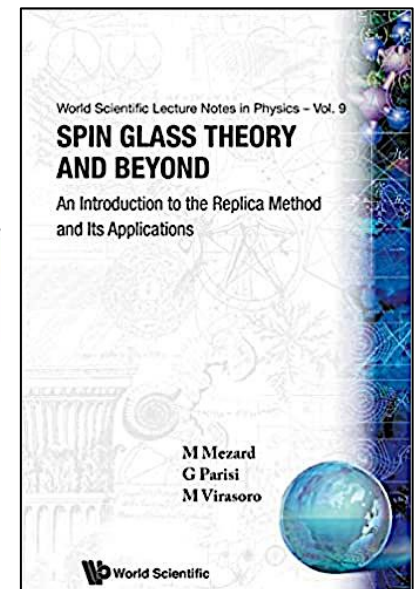
Vetri di Spin (Spin Glasses)



"frustrazione"



Giorgio Parisi
Nobel Fisica 2021





M. Granovetter

Soglie Critiche ed Effetto domino

Soglie di attivazione delle «risse»



Gruppo A



Soglia media di attivazione: 4,5

C'è l'elemento con soglia 0:
la rissa inizia!

Gruppo A'



E' quasi identico al gruppo A, ma manca
l'elemento con soglia 1: la rissa non
inizia (sensibilità alle condizioni iniziali!)

Gruppo B



Soglia media di attivazione: 1

Nonostante vi sia una minore soglia di
attivazione media rispetto al gruppo A,
quì manca l'elemento con soglia 0,
quindi la rissa non inizia!

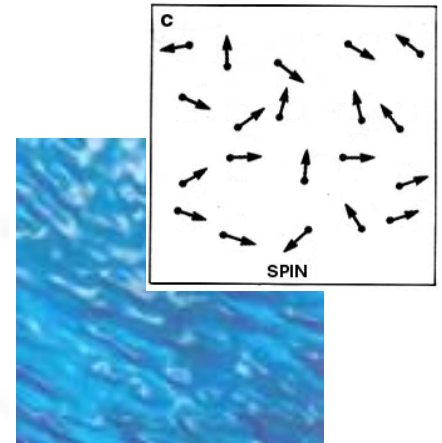
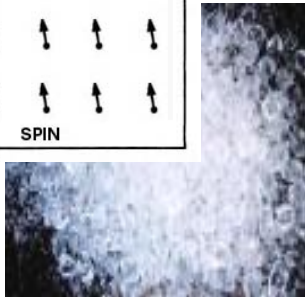
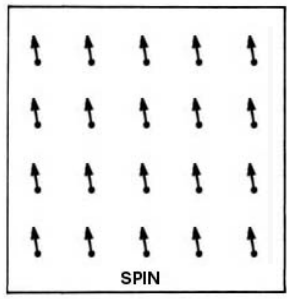
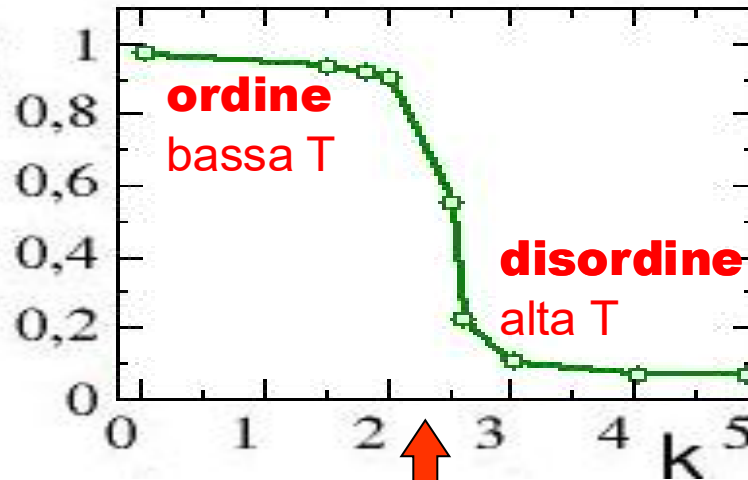


Dal Punto Critico allo Stato Critico...

Riassumendo, abbiamo visto che dal punto di vista **dinamico**, a causa di **fenomeni cooperativi del tipo effetto domino**, molti sistemi non lineari attraversano delle **SOGLIE CRITICHE** dopo le quali la loro **struttura** e/o il loro **comportamento** cambia drasticamente...

parametro d'ordine

→ M



parametro di controllo

ad es. la temperatura dell'acqua o di un magnete

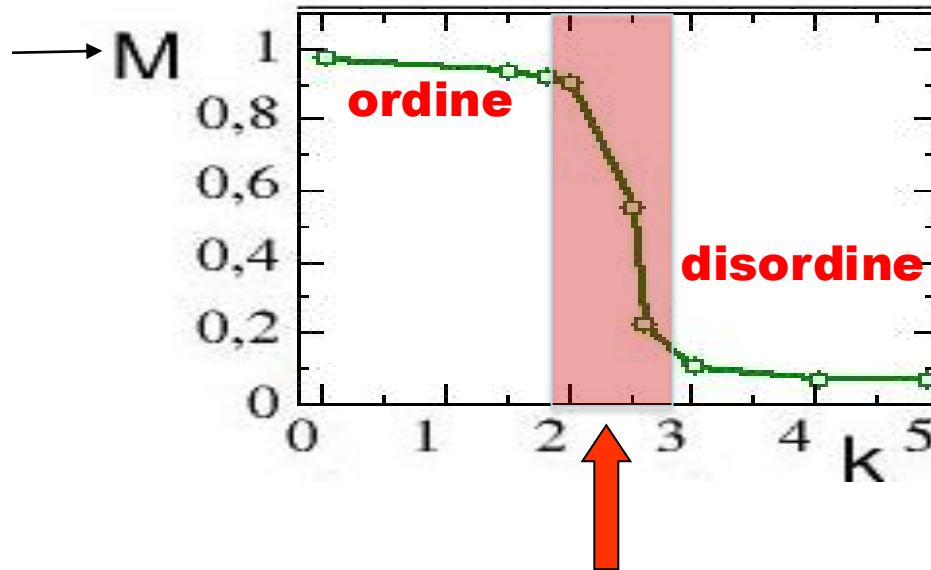
Temperatura Critica

Bisogna regolare il parametro di controllo per portare il sistema al punto critico

Dal Punto Critico allo Stato Critico...

In molti **sistemi complessi** questi fenomeni cooperativi sono ancora più eclatanti e fanno sì che essi si portino **SPONTANEMENTE** alla soglia critica e si stabilizzino in un quello che viene chiamato **STATO CRITICO**, al confine tra ordine e disordine, senza bisogno di regolare alcun parametro di controllo...

**parametro
d'ordine**



**parametro di
controllo**

Stato Critico

Il sistema si porta **SPONTANEMENTE**
nello stato critico