



**LAUREA TRIENNALE IN FISICA (L-30)**

**CORSO DI SISTEMI DINAMICI, CAOS E COMPLESSITA'**

**6CFU, Secondo Semestre A.A.2020-2021**

[Programma 2020-2021](#)

**VIDEOLEZIONI DEL CORSO REGistrate ONLINE**

PRIMA PARTE: Introduzione alla nuova Scienza della Complessità

[LEZIONE 01: Introduzione alla nuova Scienza della Complessità](#) (01/03/2021)

[LEZIONE 02: Introduzione alla nuova Scienza della Complessità](#) (02/03/2021)

[LEZIONE 03: Introduzione alla nuova Scienza della Complessità](#) (15/03/2021)

[LEZIONE 04: Introduzione alla nuova Scienza della Complessità](#) (16/03/2021)

[LEZIONE 05: Introduzione alla nuova Scienza della Complessità](#) (22/03/2021)

[LEZIONE 06: Introduzione alla nuova Scienza della Complessità](#) (23/03/2021)

SECONDA PARTE: Sistemi Dinamici a Pochi Gradi di Libertà - Caos e Frattali

[LEZIONE 07: Flussi dissipativi ad una dimensione](#) (12/04/2021)

[LEZIONE 08: Flussi dissipativi in due dimensioni](#) (13/04/2021)

[LEZIONE 09: Flussi dissipativi in due dimensioni](#) (19/04/2021)

[LEZIONE 10: Flussi dissipativi in tre dimensioni](#) (20/04/2021)

[LEZIONE 11: Rotte verso il Caos](#) (26/04/2021)

# Classificazione dei Sistemi Dinamici

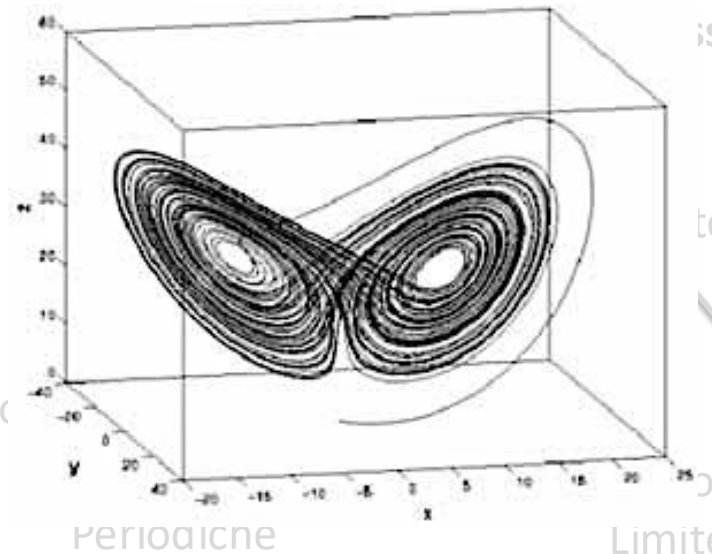
## Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$

## Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Dimensione frattale dell'attrattore caotico di Lorenz:  $D=2.06 \pm 0.01$



Flussi Dissipativi

Attrattori

1D

Punto  
fisso

2D

Ciclo  
Limite

3D

Caotici

Dissipative

Tori

Caotici

Mappe Conservative  
(area-preserving)

Orbite

Periodiche

Quasi  
Periodiche

Caotiche

Periodiche

Limite

# L'attrattore di Lorenz e l'effetto farfalla

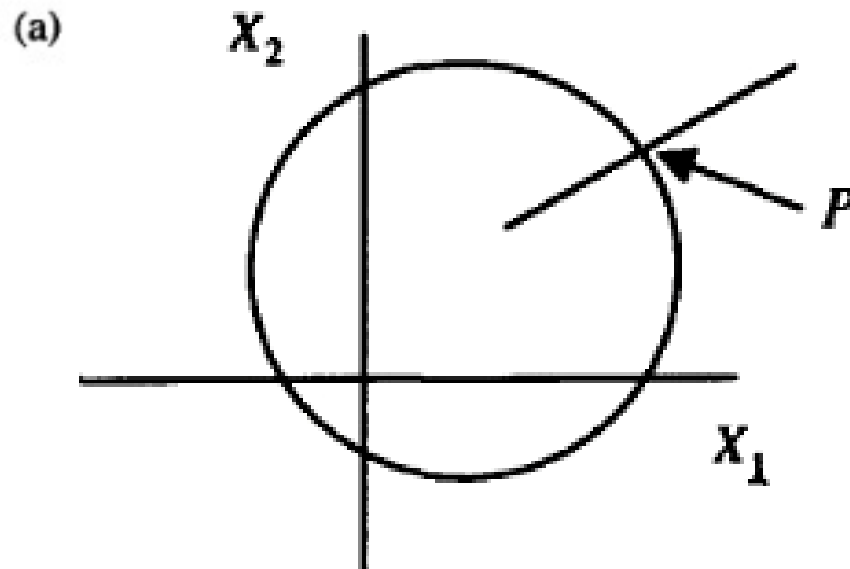


## REMINDER: La Sezione di Poincaré

For a two-dimensional state space, the Poincaré section is constructed as follows. In the two-dimensional state space, we draw a line segment that cuts through the limit cycle as shown in Fig. 3.12 (a). This line can be any line segment, but in some cases one might wish to choose the  $X_1$  or  $X_2$  axes. Let us call the point at which the limit cycle crosses the line segment going, say, point  $P$ .



J.H.Poincaré (1854-1912)



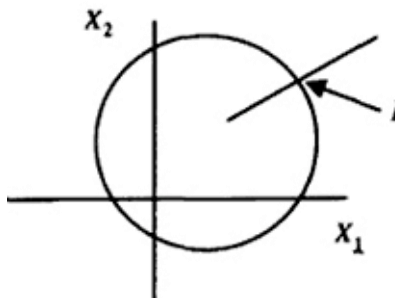
**Fig. 3.12.** (a) The Poincaré line segment intersects the limit cycle at point  $P$ . (b) The four possibilities for sequences of Poincaré intersection points for trajectories near a limit cycle in two dimensions.

**REMINDER:  
LA  
MAPPA DI POINCARÉ'**

$$P_{n+1} = F(P_n)$$



J.H. Poincaré (1854-1912)



How do we describe these properties quantitatively? We use what is called a Poincaré map function (or Poincaré map, for short). The essential idea is that given a point  $P_1$ , where a trajectory crosses the Poincaré line segment, we can in principle determine the next crossing point  $P_2$  by integrating the time-evolution equations describing the system. So, there must be some mathematical function, call it  $F$ , that relates  $P_1$  to  $P_2$ :  $P_2 = F(P_1)$ . (Of course, finding this function  $F$  is equivalent to solving the original set of equations and that may be difficult or impossible in actual practice.) In general, we may write

**La Mappa di Poincaré**

$$P_{n+1} = F(P_n)$$

(3.16-1)

In general the function  $F$  depends not only on the original equations describing the system, but on the choice of the Poincaré line segment as well.

To analyze the nature of the limit cycle, we can analyze the nature of the function  $F$  and its derivatives. Two points are important to notice:

1. The Poincaré section reduces the original two-dimensional problem to a one-dimensional problem.
2. The Poincaré map function states an iterative (finite-size time step) relation rather than a differential (infinitesimal time step) relation.

The last point is important because  $F$  gives  $P_{n+1}$  in terms of  $P_n$ . The time interval between these points is roughly the time to go around the limit cycle once, a relatively big jump in time. On the other hand, a one-dimensional differential equation  $\dot{x} = f(x)$  tells us how  $x$  changes over an infinitesimal time interval. The function  $F$  is sometimes called an iterated map function (or iterated map, for short). (Because of the importance of iterated maps in nonlinear dynamics, we shall devote Chapter 5 to a study of their properties.)

# Classificazione dei Sistemi Dinamici

## Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$



Flussi Dissipativi

Flussi Hamiltoniani

Attrattori

Orbite

1D

Punto  
fisso

2D

Ciclo  
Limite

3D

Caotici

Periodiche

Quasi  
Periodiche

Caotiche

## Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



Mappe Dissipative

Mappe Conservative  
(area-preserving)

Attrattori

Orbite

1D,2D

Punto  
fisso

Ciclo  
Limite

Caotici

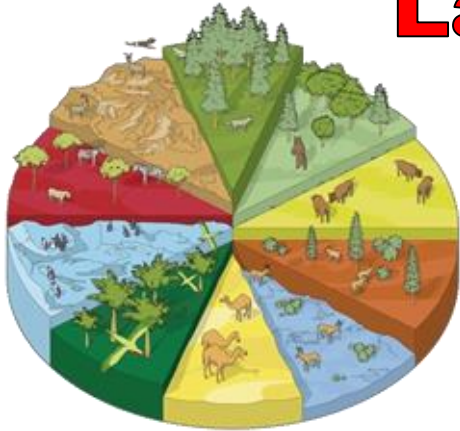
Periodiche

Quasi  
Periodiche

Caotiche

**Mappe dissipative  
unidimensionali:  
la Mappa Logistica**

# La Mappa Logistica

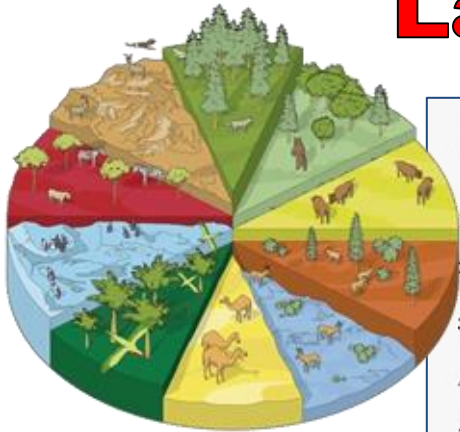


Robert.M.May  
(1936-2020)

In questo capitolo introdurremo il lettore allo studio di un celebre sistema dinamico unidimensionale, molto semplice ma estremamente importante: la cosiddetta mappa logistica. Il nome "mappa" sta ad indicare una classe di sistemi dinamici discreti (cioé la cui evoluzione avviene ad intervalli discreti di tempo) descritti da formule iterative, in contrapposizione ai sistemi dinamici continui (flussi) descritti da equazioni (o sistemi di equazioni) differenziali.

La mappa logistica é stata introdotta per la prima volta dal matematico Robert May in un famoso articolo apparso sulla rivista *Nature* nel 1976 [1], anche se la sua versione continua, la cosiddetta equazione logistica, era già nota da molto tempo per le sue applicazioni allo studio della crescita delle popolazioni e della 'carrying capacity' (capacità di carico) di un dato sistema. A differenza però della equazione logistica, che é rappresentata da una equazione differenziale del primo ordine facilmente integrabile, il comportamento della mappa logistica può invece essere estremamente imprevedibile. E questo, come evidenzieremo nel seguito, a dispetto del fatto che la sua evoluzione sia perfettamente deterministica.

# La Mappa Logistica



Ian Stewart  
Matematico

## 17 Equations That Changed the World by Ian Stewart

- |     |                                      |   |                            |
|-----|--------------------------------------|---|----------------------------|
| 1.  | <b>Pythagoras's Theorem</b>          | $a^2 + b^2 = c^2$   | Pythagoras, 530 BC         |
| 2.  | <b>Logarithms</b>                    | $\log xy = \log x + \log y$   | John Napier, 1610          |
| 3.  | <b>Calculus</b>                      | $\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$  | Newton, 1668               |
| 4.  | <b>Law of Gravity</b>                | $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$   | Newton, 1687               |
| 5.  | <b>The Square Root of Minus One</b>  | $i^2 = -1$  | Euler, 1750                |
| 6.  | <b>Euler's Formula for Polyhedra</b> | $V - E + F = 2$   | Euler, 1751                |
| 7.  | <b>Normal Distribution</b>           | $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\rho^2}}$  | C.F. Gauss, 1810           |
| 8.  | <b>Wave Equation</b>                 | $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$   | J. d'Alembert, 1746        |
| 9.  | <b>Fourier Transform</b>             | $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$  | J. Fourier, 1822           |
| 10. | <b>Navier-Stokes Equation</b>        | $\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}$  | C. Navier, G. Stokes, 1845 |
| 11. | <b>Maxwell's Equations</b>           | $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$<br>$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ | J.C. Maxwell, 1865         |
| 12. | <b>Second Law of Thermodynamics</b>  | $dS \geq 0$   | L. Boltzmann, 1874         |
| 13. | <b>Relativity</b>                    | $E = mc^2$  | Einstein, 1905             |
| 14. | <b>Schrodinger's Equation</b>        | $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi$   | E. Schrodinger, 1927       |
| 15. | <b>Information Theory</b>            | $H = -\sum p(x) \log p(x)$  | C. Shannon, 1949           |
| 16. | <b>Chaos Theory</b>                  | $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$   | Robert May, 1975           |
| 17. | <b>Black-Scholes Equation</b>        | $\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$  | F. Black, M. Scholes, 1990 |



Robert M. May  
(1936-2020)

# Dall'Equazione Logistica alla Mappa Logistica

## Modello di crescita

Avendo supposto che il numero di individui di una popolazione sia una funzione continua del tempo  $N(t)$  che ammette derivata continua, si ha che l'incremento della popolazione al variare del tempo può essere rappresentato dalla derivata di  $N(t)$ , che in un modello elementare si può supporre direttamente proporzionale al numero di individui della popolazione stessa.

Si ha pertanto la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}N = rN(t)$$

con  $r$ : parametro di crescita malthusiana (tasso massimo di crescita della popolazione).

Pertanto se  $r$  è una costante la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza dipendente da  $r$ .

Invece in un ambiente la cui disponibilità di risorse è limitata si può descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente  $r$  che decresce all'aumentare della popolazione: il modello più semplice è  $r(t) = a - bN(t)$  con  $a$  e  $b$  costanti. Sostituendo tale funzione nella precedente equazione differenziale si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN^2(t)$$

che può essere posta nella forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

se  $a=b$  ( $K=1$ )

**EQUAZIONE LOGISTICA**

$$\dot{N}(t) = aN(1 - N)$$

con  $K = \frac{a}{b}$  che è la cosiddetta popolazione massima sostenibile ed è uguale al parametro di crescita malthusiana.

Questa è l'equazione logistica di Verhulst.

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{1}{a} \int \left( \frac{1}{N} + \frac{b}{a - bN} \right) dN(t) = \int dt$$

risolvendo gli integrali, scegliendo come primitive quelle tali che  $N(t_0) = N_0$  e utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene la soluzione:

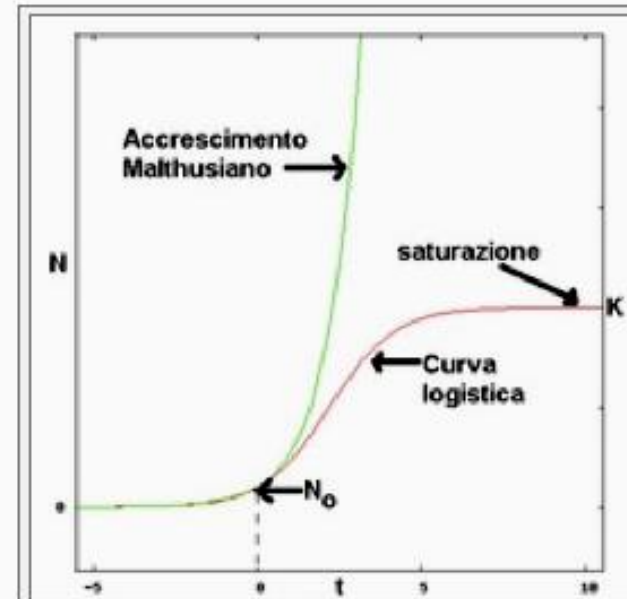
$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right)e^{-a(t-t_0)}}$$

**SOLUZIONE ANALITICA DELL'EQ. LOGISTICA  
(SIGMOIDE CON SATURAZIONE A K)**

Si nota che a causa del sovraffollamento la popolazione non cresce più in maniera esponenziale ma converge al valore asintotico  $k$  indipendentemente da  $N_0$ .



P.F. Verhulst (1804-1849)



Confronto tra curva logistica e curva di accrescimento esponenziale

(malthusiano). I parametri sono:

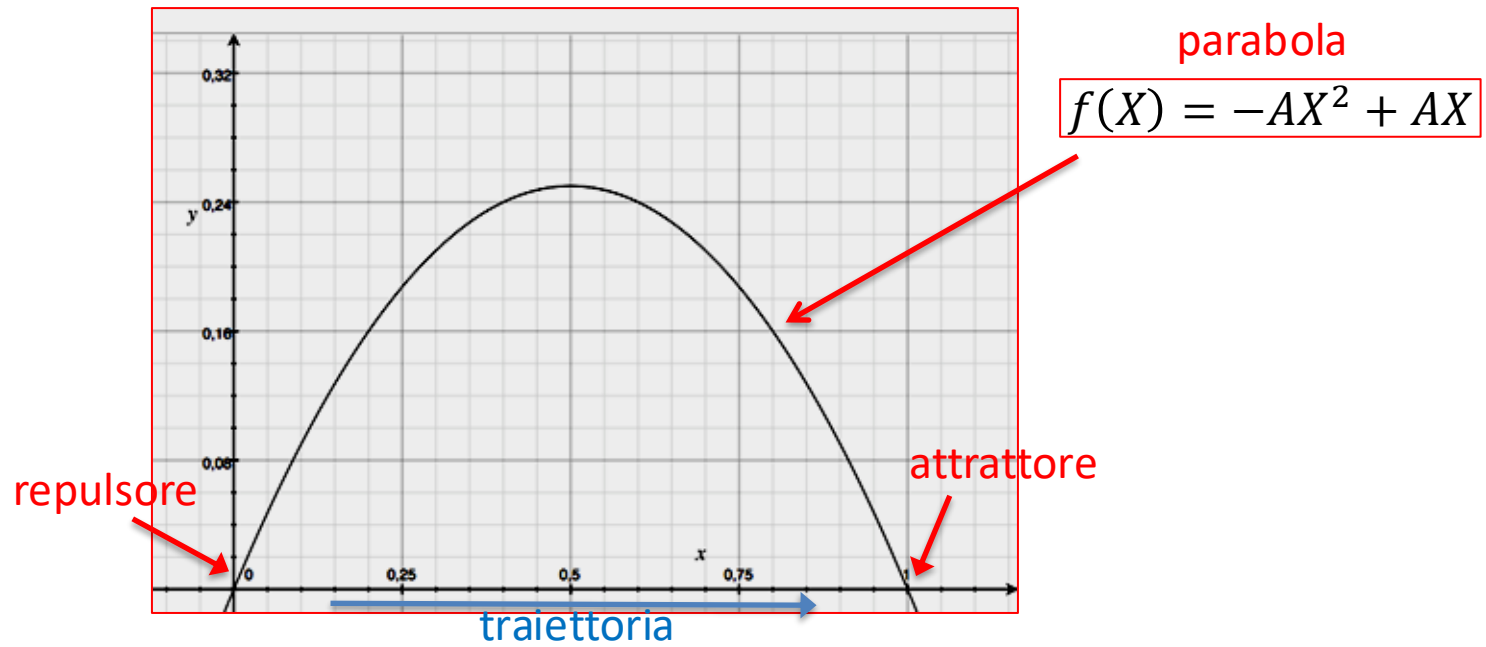
$$k = 10, N_0 = 1, r = 1$$

# Dall'Equazione Logistica alla Mappa Logistica

**Exercise 3.8-3.** The logistic differential equation. The following differential equation has a “force” term that is identical to the logistic map function introduced in Chapter 1

$$\dot{X} = AX(1 - X) \quad A \in [0,1]$$

- (a) Find the fixed points for this differential equation.  
(b) Determine the characteristic value and type of each of the fixed points.



→  $X_0=0$  è un punto fisso repulsivo (instabile)

→  $X_0=1$  è un punto fisso attrattivo (stabile)

L'equazione che caratterizza la mappa logistica é la seguente:

## Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

(1.1)

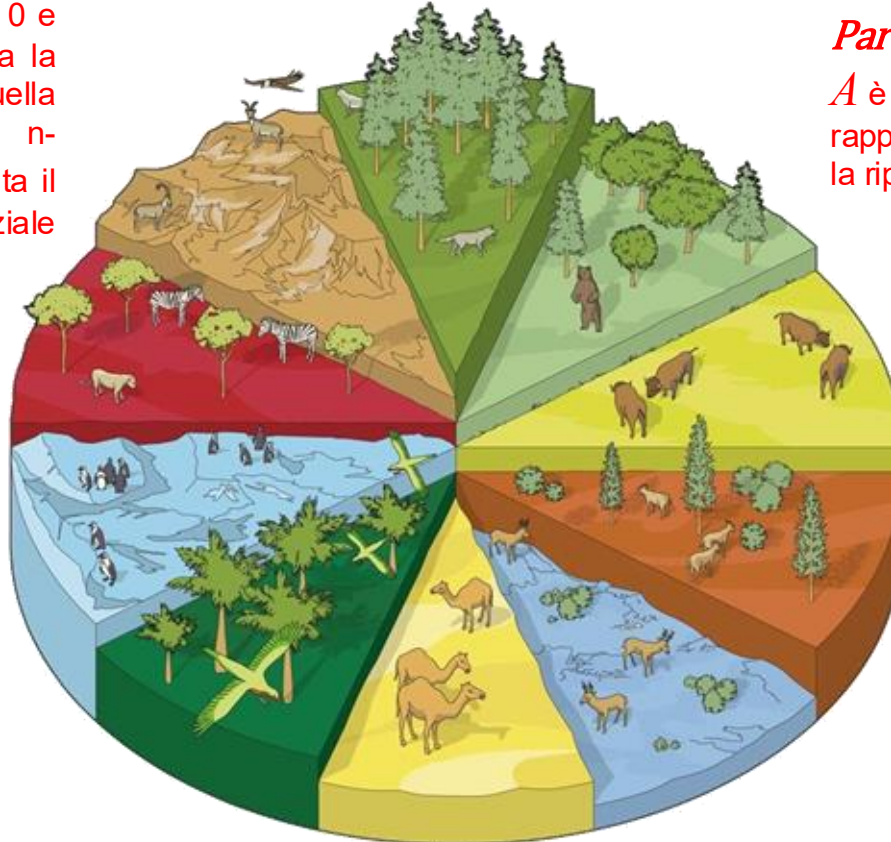
dove  $A$  é un parametro di controllo (fissato) ed  $x_n$  il valore della variabile reale  $x$  (con  $x \in [0, 1]$ ) all' $n$ -esima iterazione. L'equazione 1.1 appartiene alla piú generale classe delle mappe iterate unidimensionali descritte da formule del tipo:  $x_{n+1} = f(x_n)$ , le cui peculiaritá matematiche hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo della teoria del caos.



R.M. May  
1976

### *Variabile di stato:*

$x_n$  é un numero compreso tra 0 e 1, e rappresenta il rapporto tra la popolazione esistente e quella massima possibile nell'anno  $n$ -esimo, e quindi  $x_0$  rappresenta il rapporto tra la popolazione iniziale (all'anno 0) e quella massima.



### *Parametro di controllo:*

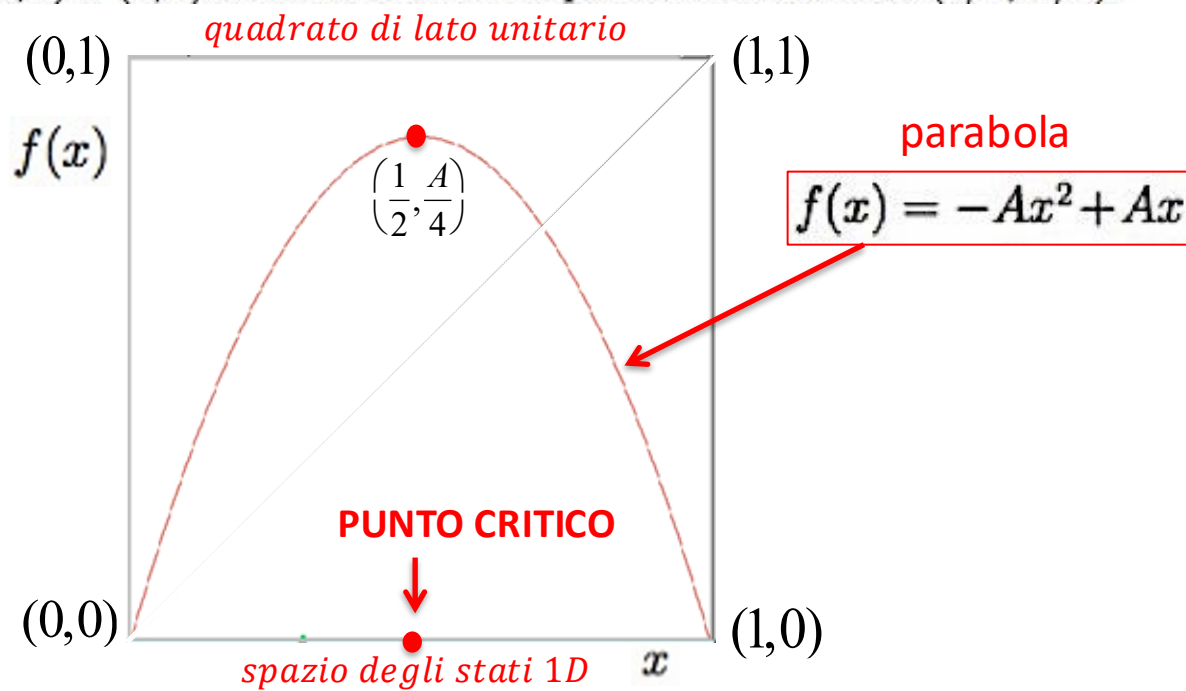
$A$  é un numero positivo e rappresenta il tasso combinato tra la riproduzione e la mortalitá.

L'equazione che caratterizza la mappa logistica é la seguente:

## Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \quad (1.1)$$

dove  $A$  é un parametro di controllo (fissato) ed  $x_n$  il valore della variabile reale  $x$  (con  $x \in [0, 1]$ ) all' $n$ -esima iterazione. L'equazione 1.1 appartiene alla piú generale classe delle mappe iterate unidimensionali descritte da formule del tipo:  $x_{n+1} = f(x_n)$ , le cui peculiaritá matematiche hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo della teoria del caos. La mappa logistica rientra inoltre in quell'importante sottoinsieme di mappe chiamate unimodali, cioé descritte da funzioni  $f(x)$  continue, differenziabili e con un unico massimo nel loro intervallo di definizione ( $[0, 1]$  per la mappa logistica). Per inciso, il valore della coordinata  $x$  del massimo viene chiamato punto critico. Nel caso della mappa logistica la  $f(x) = -Ax^2 + Ax$  é una parabola con la concavitá rivolta verso il basso, passante per i punti  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  e con il vertice nel punto di coordinate  $(1/2, A/4)$ .



R.M. May  
1976



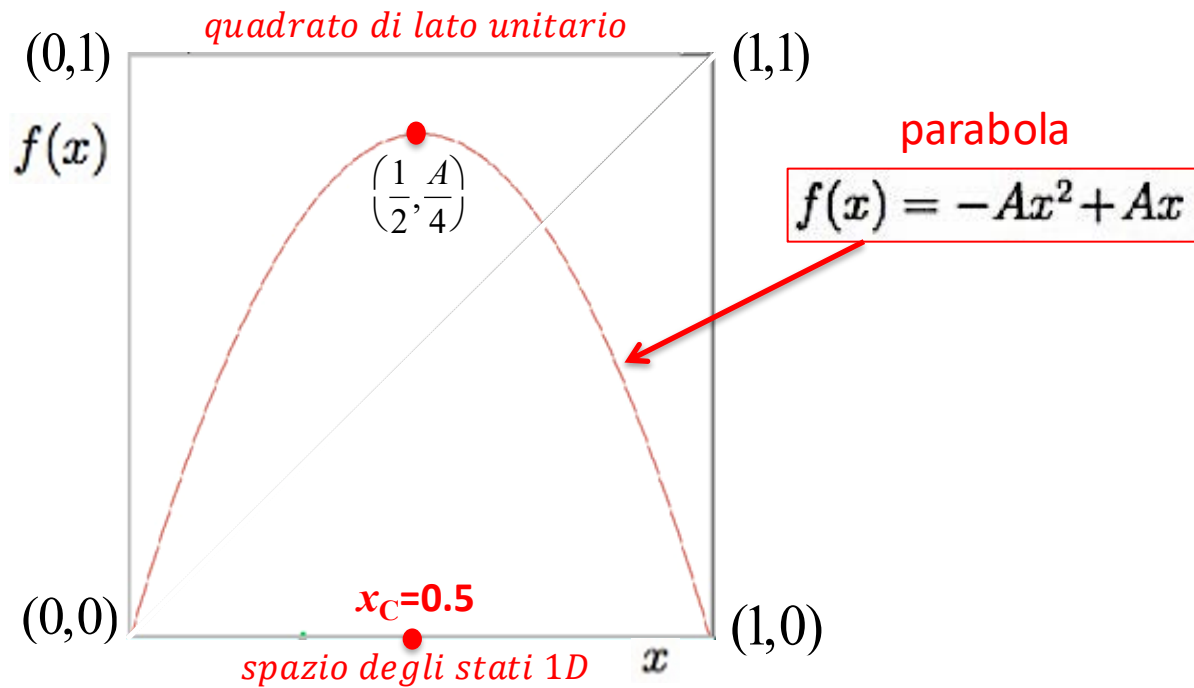
R.M. May  
1976

Questo ci dice subito che il punto critico della mappa logistica si trova a  $x_c = 0.5$ , mentre la coordinata  $f(x_c)$  del vertice é regolata dal parametro di controllo  $A$ , che dunque (dovendo essere, in generale,  $f(x) \in [0, 1]$ ) dovrà essere compreso tra 0 e 4. Anticipiamo che é proprio la nonlinearitá di tipo quadratico a far si che per certi valori del parametro di controllo il comportamento della mappa logistica diventi molto irregolare. Per questi valori di  $A$  la mappa presenta inoltre una estrema sensibilitá alle condizioni iniziali: come vedremo meglio piú avanti, due traiettorie che differiscono inizialmente di una piccola quantitá  $\epsilon_0$  si allontanano in maniera esponenziale, ovvero al tempo  $t$  la loro distanza sará

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\lambda t}, \tag{1.2}$$

dove  $\lambda$  rappresenta il rate di divergenza, meglio noto come esponente di Lyapunov.

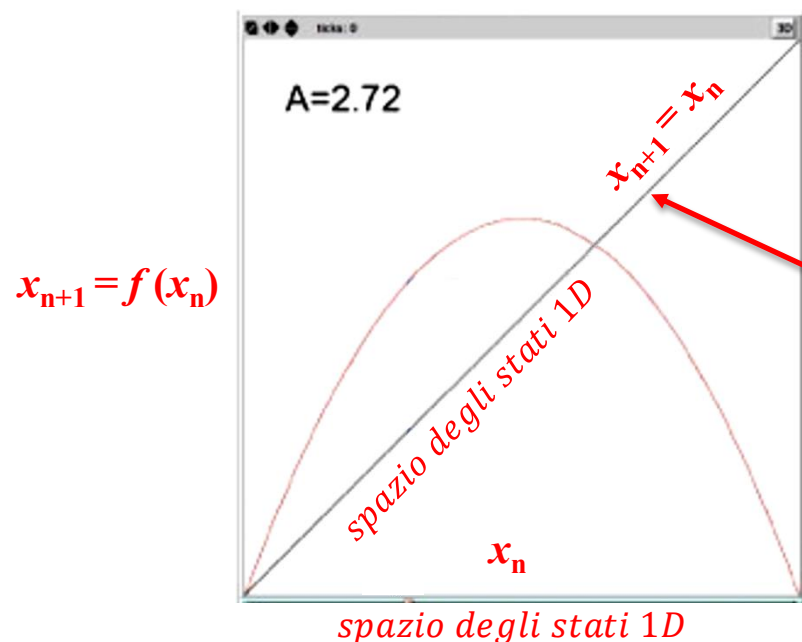
Produce una sorta di "stretching and folding" che, per certi valori di  $A$ , genererá un attrattore caotico



## 1.2 Evoluzione dinamica ed Attrattori

É utile rappresentare l'evoluzione della mappa logistica all'interno di un diagramma di iterazione (vedi Fig. 1.1) che riporta in ascissa il valore  $x_n$  e in ordinata il valore  $x_{n+1}$  ottenuto trasformando  $x_n$  per mezzo dell'equazione 1.1: in

*Diagramma delle iterazioni:  
quadrato di lato unitario  
+ bisettrice*



$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \quad (1.1)$$

La bisettrice può essere messa in corrispondenza biunivoca con l'intervallo di definizione  $[0,1]$  (ossia lo spazio degli stati) della mappa logistica!

Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni

## 1.2 Evoluzione dinamica ed Attrattori

É utile rappresentare l'evoluzione della mappa logistica all'interno di un **diagramma di iterazione** (vedi Fig. 1.1) che riporta in ascissa il valore  $x_n$  e in ordinata il valore  $x_{n+1}$  ottenuto trasformando  $x_n$  per mezzo dell'equazione 1.1: in pratica si inizia scegliendo un valore di partenza  $x_0$  (compreso tra 0 e 1) sull'asse  $x_n$  e lo **si proietta dapprima verticalmente sulla parabola corrispondente al secondo membro della 1.1, individuando così il punto  $x_1$  sull'asse  $x_{n+1}$ , dopodiché lo **si riporta orizzontalmente sulla bisettrice  $x_{n+1} = x_n$**  (che equivale a riportare il punto  $x_1$  sull'asse  $x_n$ ) e si ripete il procedimento con l'iterazione successiva. In altri termini lo schema iterativo é il seguente:**

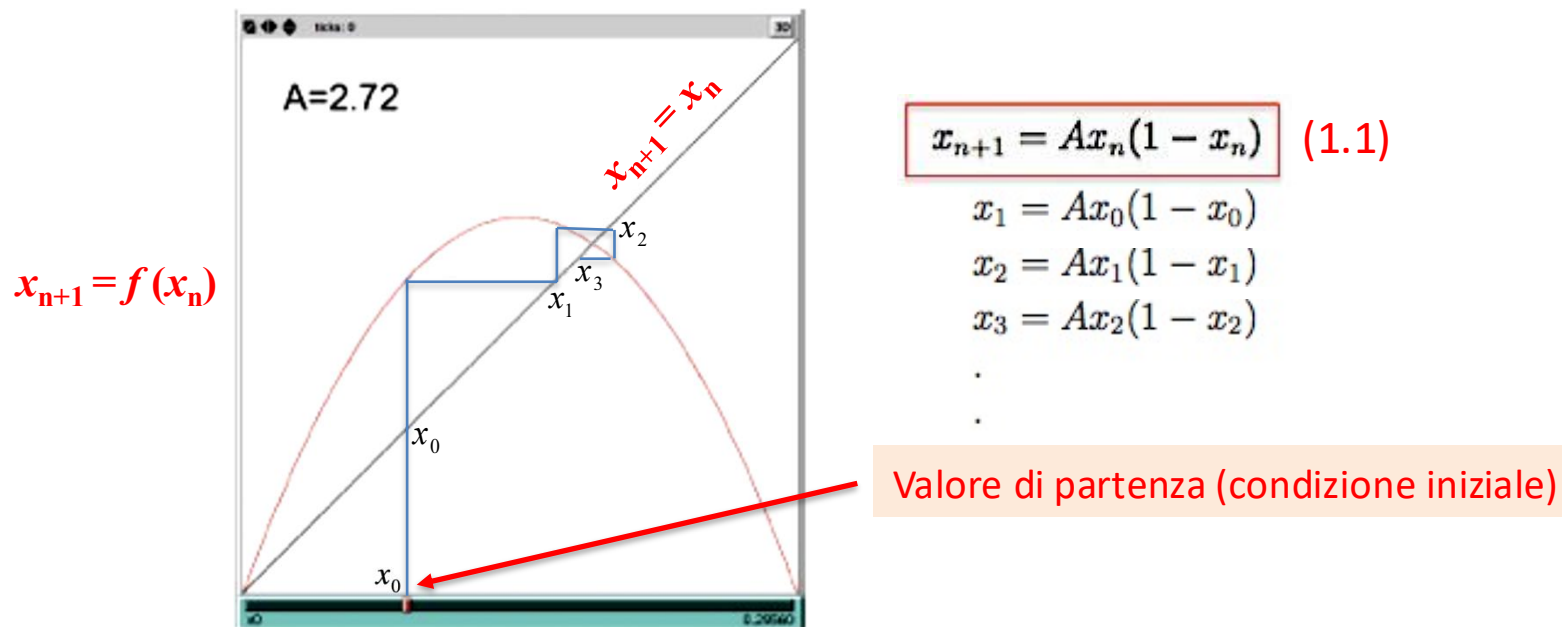
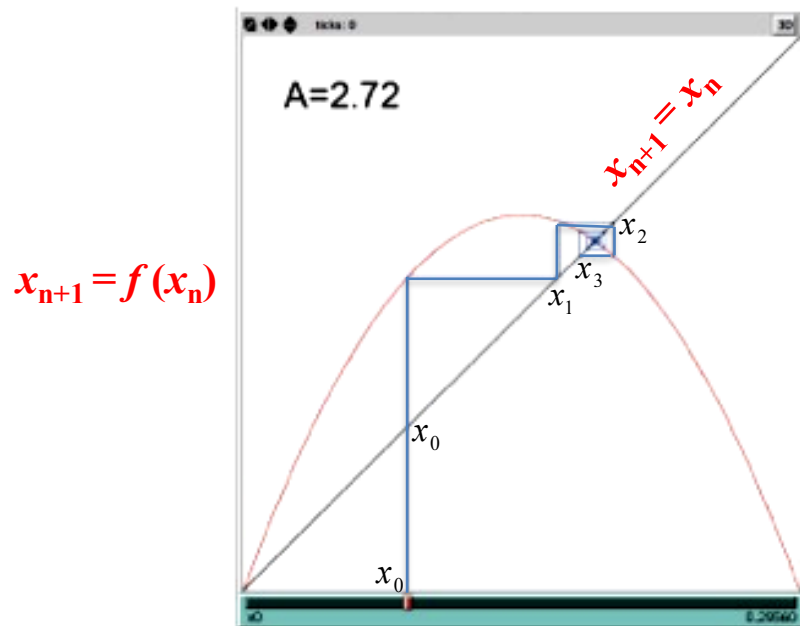


Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A = 2.72$ : siamo in regime di punto fisso (vedi testo).

Mediante successive applicazioni della funzione della mappa esso genera una successione di valori reali compresi nell'intervallo  $[0, 1]$  chiamata **traiettoria** o **orbita**. Nel diagramma di iterazione mostrato nel pannello a sinistra della Fig. 1.1 questa procedura é stata eseguita fissando  $x_0 = 0.2956$  come condizione iniziale e scegliendo  $A = 2.72$  come valore del parametro di controllo. Nel pannello di destra della stessa figura é stato riportato anche il corrispondente plot che mostra l'andamento della variabile  $x$  in funzione del numero di iterazioni. Notiamo subito che la traiettoria della mappa converge rapidamente al valore 0.632: in questo caso si dice che la dinamica ha raggiunto un **attrattore a punto fisso**.



## REGIME DI PUNTO FISSO

La popolazione varierà fino ad assestarsi su un valore stazionario  $x_\infty = 0.632$ , indipendentemente dal suo valore iniziale.

$$x_1 = Ax_0(1 - x_0)$$

$$x_2 = Ax_1(1 - x_1)$$

$$x_3 = Ax_2(1 - x_2)$$

·

·

$$x_\infty = 0.632$$

Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A = 2.72$ : siamo in regime di punto fisso (vedi testo).

Mediante successive applicazioni della funzione della mappa esso genera una successione di valori reali compresi nell'intervallo  $[0, 1]$  chiamata **traiettoria** o **orbita**. Nel diagramma di iterazione mostrato nel pannello a sinistra della Fig. 1.1 questa procedura é stata eseguita fissando  $x_0 = 0.2956$  come condizione iniziale e scegliendo  $A = 2.72$  come valore del parametro di controllo. Nel pannello di destra della stessa figura é stato riportato anche il corrispondente plot che mostra l'andamento della variabile  $x$  in funzione del numero di iterazioni. Notiamo subito che la traiettoria della mappa converge rapidamente al valore 0.632: in questo caso si dice che la dinamica ha raggiunto un **attrattore a punto fisso**.

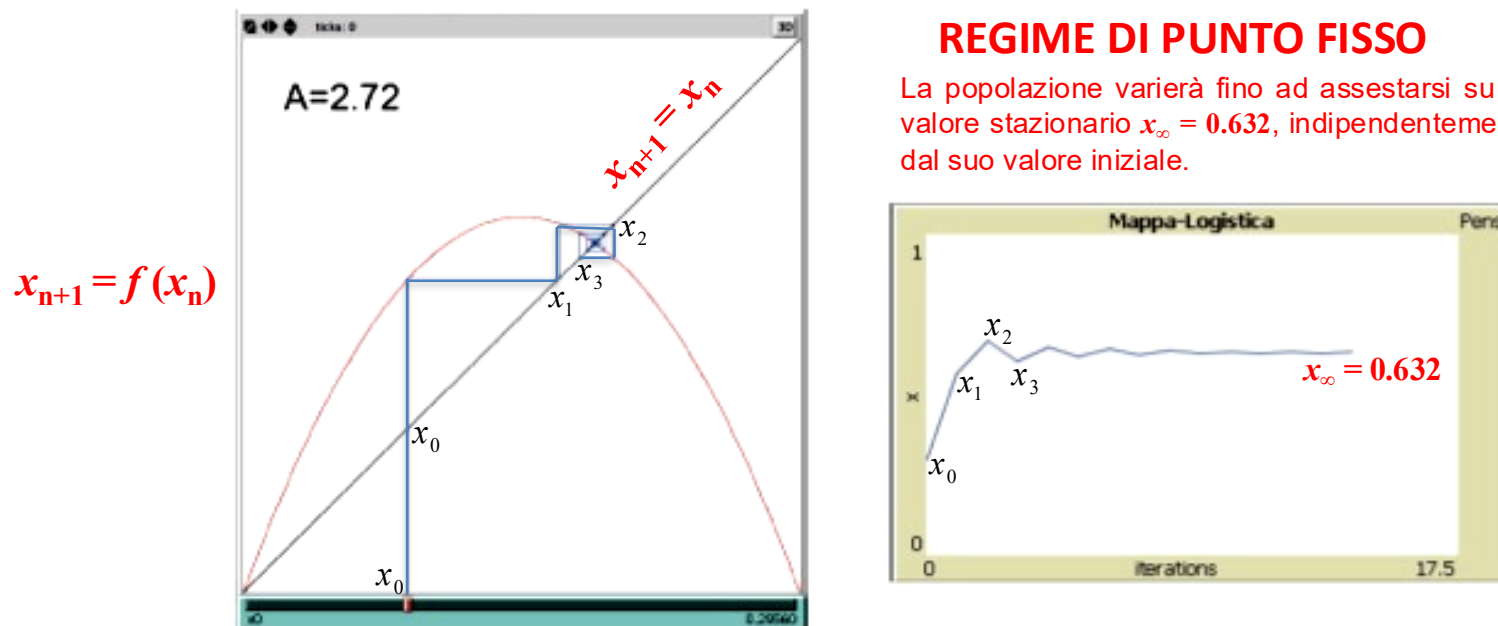


Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A = 2.72$ : siamo in regime di punto fisso (vedi testo).



# Mappa-Logistica.nlogo

Interface Info Code

Edit Delete Add

normal speed

view updates

Settings...

ticks:

continuous

CLEAR

MAPPA LOGISTICA:  $x(n+1) = A x(n) [1 - x(n)]$

On  
 Off PLOT-SECOND-ITERATE

n

19

SETUP

NEW-INITIAL-CONDITION

$0 < A < 3$

punto-fisso

$3 < A < 3.56994$

period-doubling

$3.56 < A < 4$

caos

GO

GO-ONCE

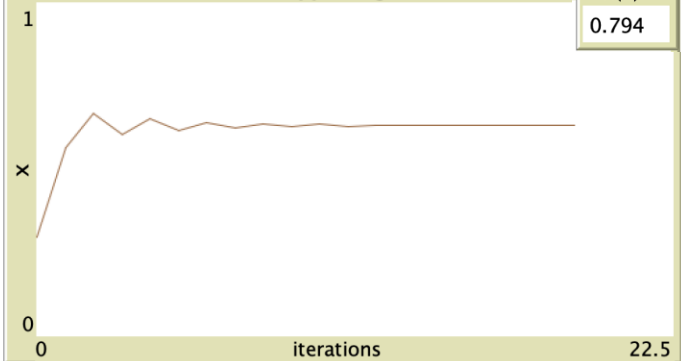
A

2.7200

Mappa-Logistica

x(n)

0.794

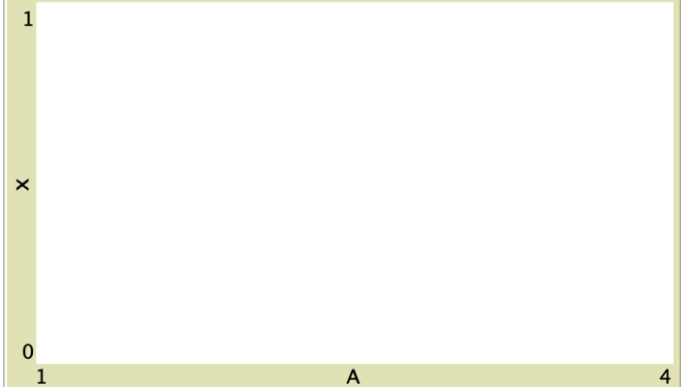


BIFURCATION

starting-A 0.0100

final-A 4.0000

Diagramma-di-Biforcazione



x0

0.29560

Il concetto di "attrattore" é tipico dei sistemi dissipativi (in opposizione a quelli cosiddetti **conservativi**, di cui ci occuperemo piú avanti) e riguarda il comportamento asintotico della loro evoluzione dinamica, che in questa categoria di sistemi - ai quali appartiene appunto la mappa logistica - risulta essere indipendente dalle condizioni iniziali (in generale, pensando ad un sistema fisico viscoso o comunque in grado di dissipare energia, é abbastanza intuitivo convincersi che esso, prima o poi, finirá per assestarsi su uno stato finale indipendente da quello di partenza). Essendo la mappa logistica un sistema ad un solo grado di libertá (poiché é solo una la variabile indipendente necessaria per specificarne lo stato dinamico), i suoi attrattori 'vivranno' in uno spazio delle fasi unidimensionale.

Da un punto di vista matematico si dice che  $x^*$  é un punto fisso per la mappa  $f(x)$  se esso soddisfa l'equazione:

$$x^* = f(x^*). \quad (1.3)$$

Le soluzioni dell'equazione di punto fisso corrispondono ai **punti di intersezione della parabola con la bisettrice**  $f(x) = x$ , cioè le soluzioni del sistema qui a fianco (mentre nei flussi 1D erano i punti di intersezione con l'asse  $x$ )

$$\begin{cases} y = Ax(1-x) \\ y = x \end{cases}$$

### REGIME DI PUNTO FISSO

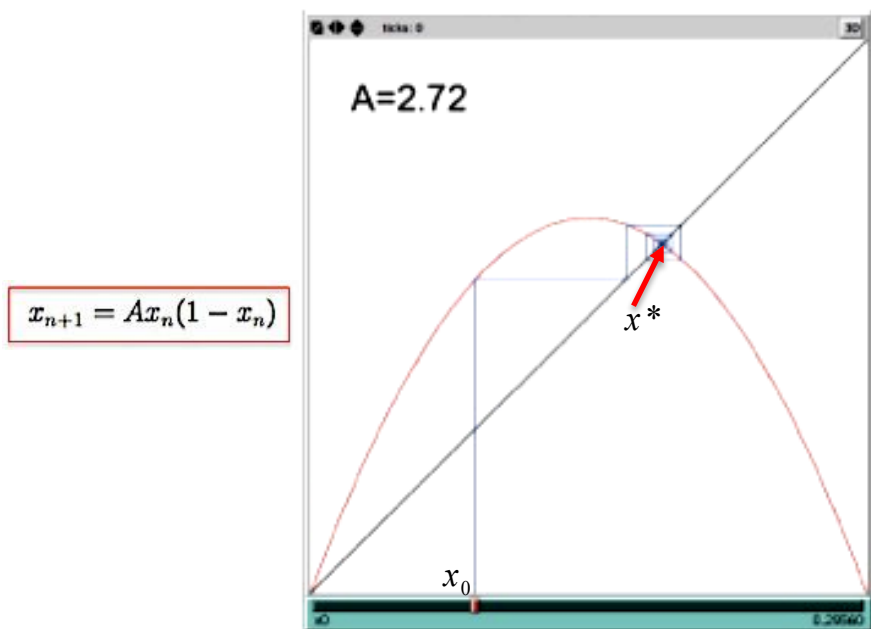


Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A = 2.72$ : siamo in regime di punto fisso (vedi testo).

In questo caso l'applicazione ripetuta della funzione  $f$  al valore  $x^*$  continua a produrre sempre lo stesso valore. In generale una data mappa può avere più di un punto fisso in corrispondenza di un certo valore del parametro di controllo: ad esempio, se imponiamo la relazione 1.3 alla mappa logistica, otteniamo una equazione di secondo grado le cui soluzioni restituiscono i due punti fissi  $x^* = 0$  e  $x^* = 1 - 1/A$ , che corrispondono ai punti di intersezione della parabola del diagramma di iterazione con la bisettrice. Per  $A = 2.72$ , otteniamo dunque  $x^* = 1 - 1/A = 0.632$ , che è proprio il valore verso il quale converge la traiettoria della mappa mostrata in Fig.1.1. Al lettore curioso, però, verrà spontaneo domandarsi perché la mappa non converga all'altro punto fisso,  $x^* = 0$ , situato nell'origine del diagramma di iterazione.

$$f(x^*) = x^* \quad (1.3)$$

$$Ax^*(1 - x^*) = x^* \rightarrow A(x^*)^2 - Ax^* + x^* = 0$$

$$\rightarrow A(x^*)^2 - (A - 1)x^* = 0 \rightarrow x^*(Ax^* - A + 1) = 0$$

2 punti fissi  $\rightarrow x^* = 0$   
 $\rightarrow x^* = 1 - 1/A$  (non esiste per  $A < 1$ )

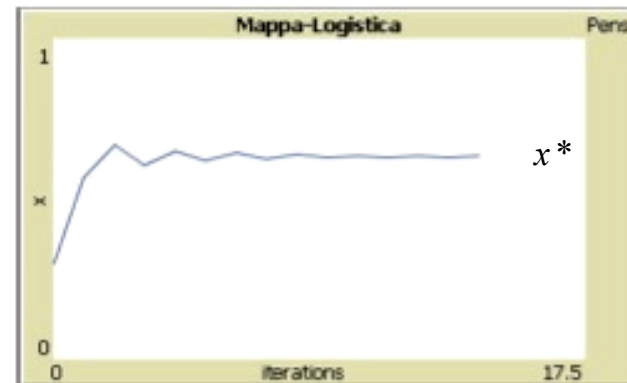
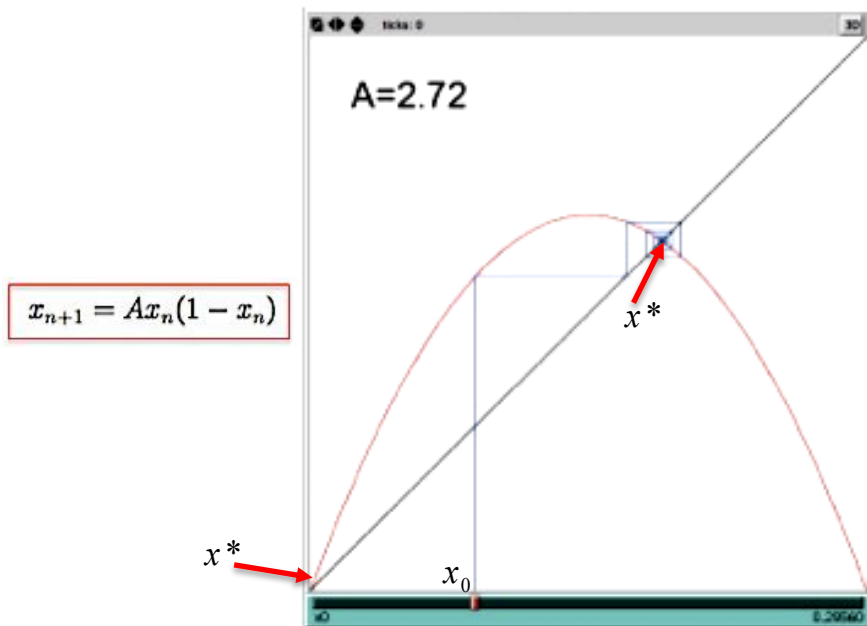


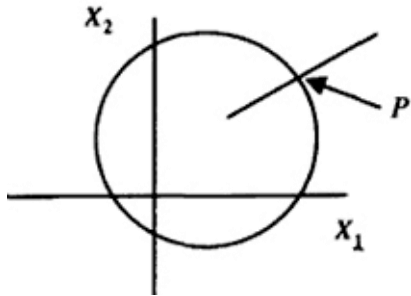
Figura 1.1: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A = 2.72$ : siamo in regime di punto fisso (vedi testo).

**REMINDER:  
STABILITA' DEI  
PUNTI FISSI NELLA  
MAPPA DI POINCARÉ'**

$$P_{n+1} = F(P_n)$$



J.H. Poincaré (1854-1912)



Let us note that the point  $P^*$  on the limit cycle satisfies  $P^* = F(P^*)$ . Any point  $P^*$  that satisfies  $P^* = F(P^*)$  is called a fixed point of the map function. If a trajectory crosses the line segment exactly at  $P^*$ , it returns to  $P^*$  on every cycle. In analogy with our discussion of fixed points for differential equations, we can ask what happens to a point  $P_1$  close to  $P^*$ . In particular, we ask what happens to the distance between  $P_1$  and  $P^*$  as the system evolves. Formally, we look at

$$P_2 - P^* = F(P_1) - F(P^*) \tag{3.16-2}$$

and use a Taylor series expansion about the point  $P^*$  to write

$$P_2 - P^* = F(P^*) + \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} (P_1 - P^*) + \dots - F(P^*) \tag{3.16-3}$$

If we define  $d_i = (P_i - P^*)$ , we see that

$$d_2 = \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} d_1 \tag{3.16-4}$$

We now define the characteristic multiplier  $M$  for the Poincaré map:

$M < 1$  STABLE  
 $M > 1$  INSTABLE

$$M = \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} \quad \text{(~~M > 0~~)} \tag{3.16-5}$$

$M$  is also called the *Floquet multiplier* or the *Lyapunov multiplier*. In terms of  $M$ , we can write Eq. (3.16-4)

$$d_2 = M d_1 \tag{3.16-6}$$

We find in general

$$d_{n+1} = M^n d_1 \tag{3.16-7}$$

La risposta é che, per  $A = 2.72$ ,  $x^* = 0.632$  é un punto fisso attrattivo (stabile) mentre  $x^* = 0$  é un punto fisso repulsivo (instabile). Questo risultato deriva da considerazioni analitiche legate alla cosiddetta *analisi di stabilit  lineare*, la quale permette di giungere alla seguente conclusione circa la stabilit  dei punti fissi di una mappa unidimensionale:

$\left\{ \begin{array}{l} x^* \text{ é un punto fisso attrattivo (stabile) se } |df/dx|_{x^*} < 1 \text{ STABILE} \\ x^* \text{ é un punto fisso repulsivo (instabile) se } |df/dx|_{x^*} > 1 \text{ INSTABILE} \end{array} \right.$

essendo  $df/dx|_*$  la derivata della funzione  $f(x)$  che descrive la mappa, calcolata in corrispondenza del punto fisso in questione. Se calcoliamo questa derivata nel caso della mappa logistica in corrispondenza dei suoi due punti fissi, avremo:

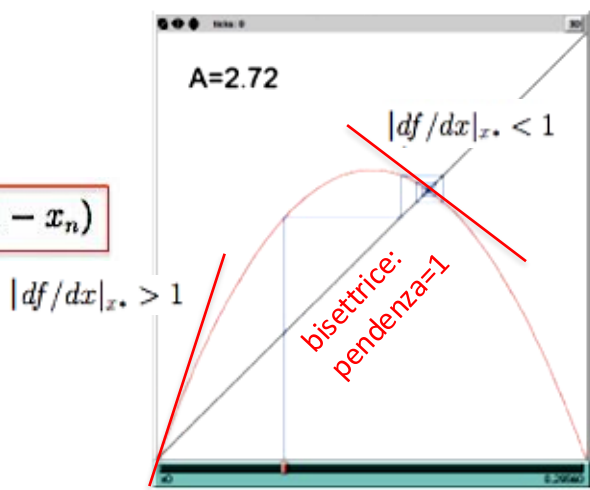
characteristic multiplier  $df/dx|_{x^*=0} = A$  ( $f(x) = Ax - Ax^2 \square \frac{df}{dx} = A - 2Ax$ )  
 $df/dx|_{x^*=1-1/A} = 2 - A$

da cui risulter  che il punto  $x^* = 0$  é attrattivo (a partire da qualunque condizione iniziale) per  $A < 1$  ed é repulsivo per  $A > 1$ , mentre, viceversa, il punto  $x^* = 1 - 1/A$  é attrattivo per  $1 < A < 3$  (non esistendo per  $A < 1 \rightarrow x < 0$ ).

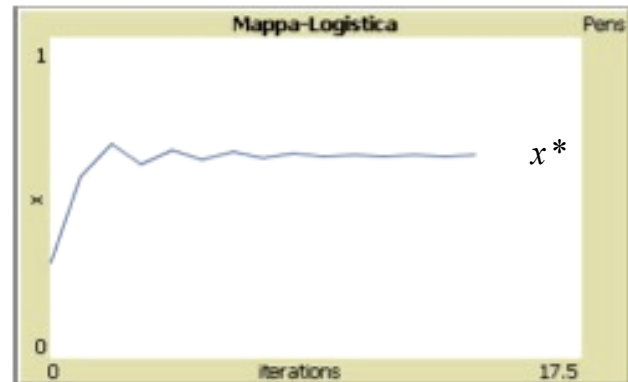
**NOTA:**  $df/dx < 0 \rightarrow 2 < A < 3$  oscillazioni attorno al punto fisso...

$$d_{n+1} = M^n d_1$$

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$



In questo caso il punto fisso «off origine» della mappa é l'equivalente unidimensionale dello spiral node nei flussi dissipativi 2D



## Attrattori a ciclo limite della mappa logistica per $A > 3$

Il comportamento della mappa logistica si fa invece piú interessante non appena il parametro di controllo  $A$  diventa maggiore di 3. Infatti, per valori appena superiori a 3, i punti fissi visti in precedenza perdono la loro stabilit  e la traiettoria si stabilizza rapidamente in una oscillazione tra due valori (entrambi stabili)  $x^*_1$  e  $x^*_2$  che soddisfano le equazioni accoppiate:

$$\begin{cases} x^*_2 = f(x^*_1) \\ x^*_1 = f(x^*_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Non sono punti fissi della mappa logistica.} \\ \text{E' possibile ricavare analiticamente questi valori?} \end{array}$$

### Seconda iterata della mappa logistica

To describe what happens at  $A = 3$ , we introduce what is called the *second-iterate of  $f$* . The second-iterate of the map function is defined to be

$$f^{(2)}(x) \equiv f(f(x)) \quad (5.4-3)$$

that is, the second-iterate of  $f$  is what we get by applying the function  $f$  twice, first to the value of  $x$ , then to the result of the first application. (We will use the parentheses around the superscript to remind us that we are concerned with the second-iterate, not the square of the function.) The two-cycle points  $x^*_1$  and  $x^*_2$  are fixed points of the second-iterate function:

$$\begin{cases} x^*_1 = f^{(2)}(x^*_1) \\ x^*_2 = f^{(2)}(x^*_2) \end{cases} \quad (5.4-4)$$

Thus, we conclude that for  $A$  just greater than 3, these two fixed points of the second-iterate function become stable fixed points.

$$x_1 = Ax_0(1 - x_0)$$

$$x_2 = Ax_1(1 - x_1)$$

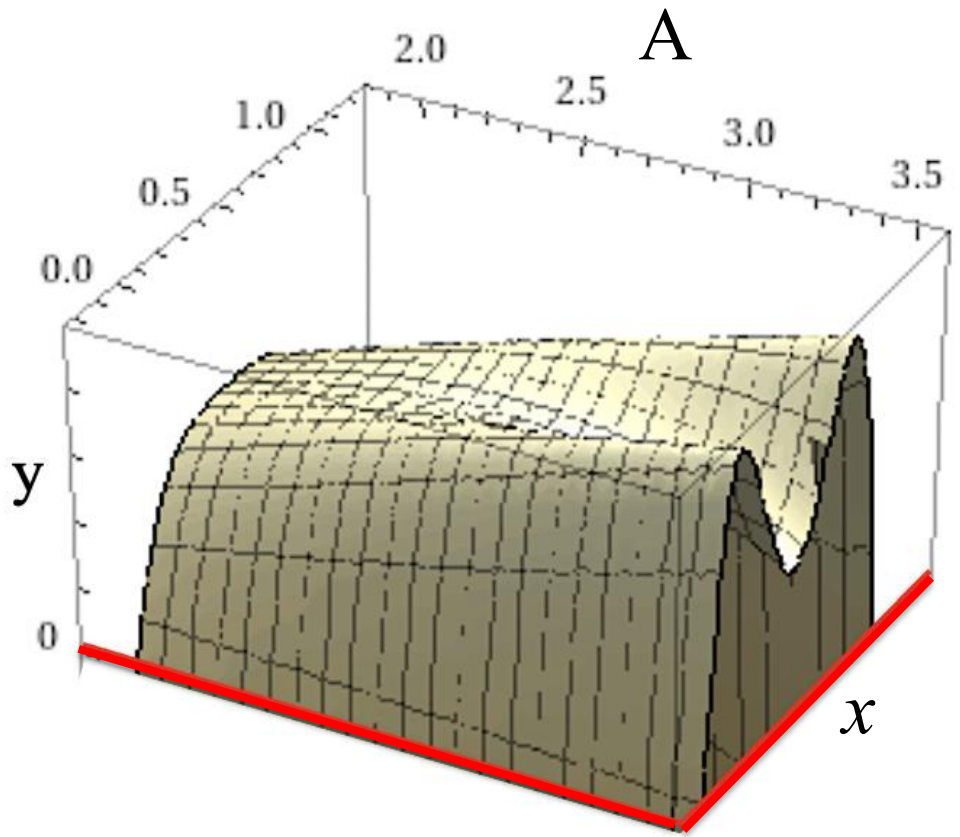
## SECONDA ITERATA DELLA MAPPA LOGISTICA

$$y = Ax - Ax^2 \rightarrow y = A(Ax - Ax^2) - A(Ax - Ax^2)^2 \quad \begin{cases} x_1^* = f^{(2)}(x_1^*) \\ x_2^* = f^{(2)}(x_2^*) \end{cases}$$

WolframAlpha

$$y = -A^3 X^4 + 2A^3 X^3 - A^3 X^2 - A^2 X^2 + A^2 X$$

3D plot



$$x_1 = Ax_0(1 - x_0)$$

$$x_2 = Ax_1(1 - x_1)$$

## SECONDA ITERATA DELLA MAPPA LOGISTICA

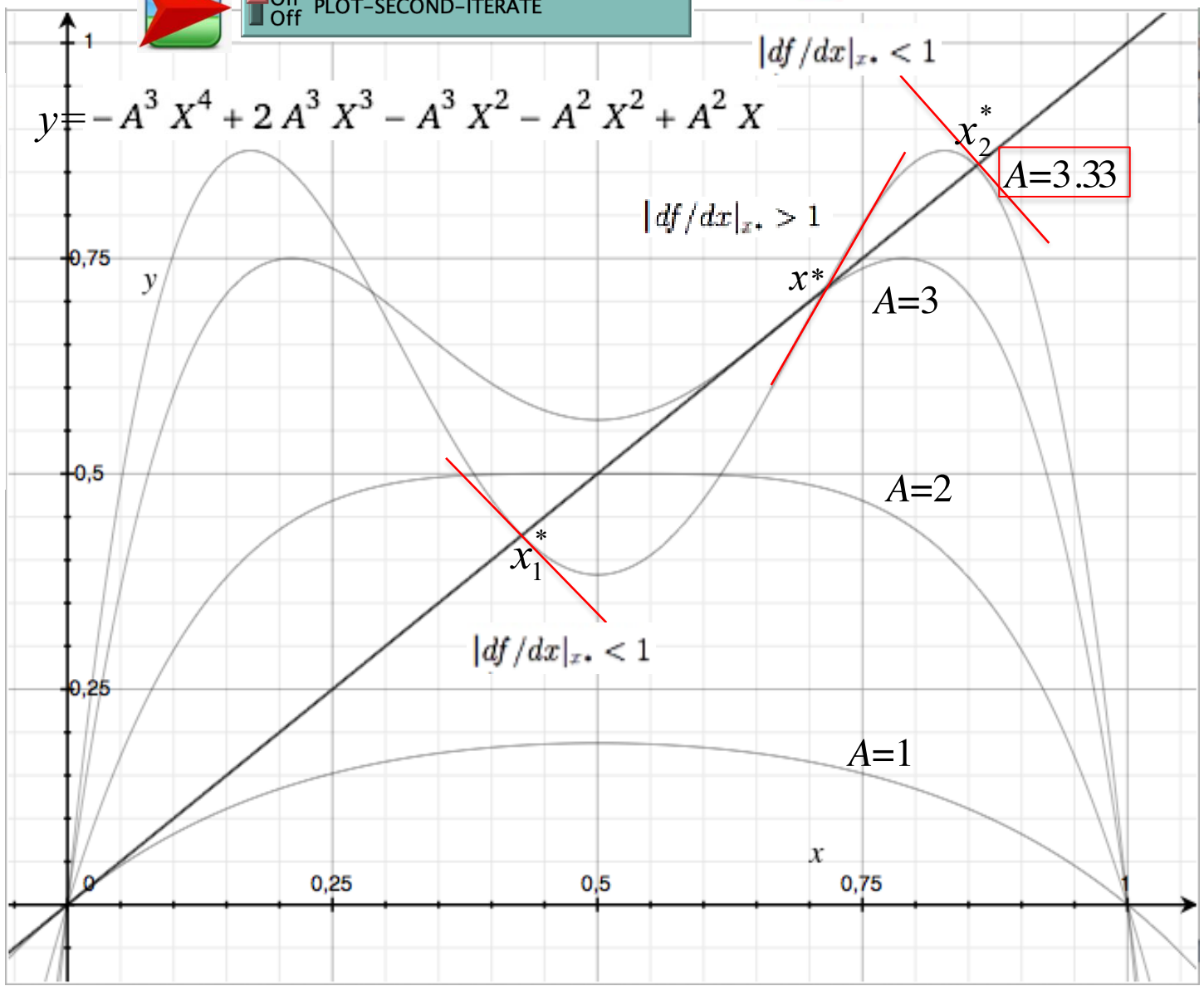
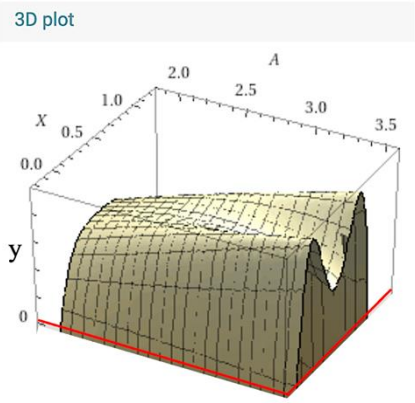
$$y = Ax - Ax^2 \rightarrow y = A(Ax - Ax^2) - A(Ax - Ax^2)^2$$

$$\begin{cases} x_1^* = f^{(2)}(x_1^*) \\ x_2^* = f^{(2)}(x_2^*) \end{cases}$$

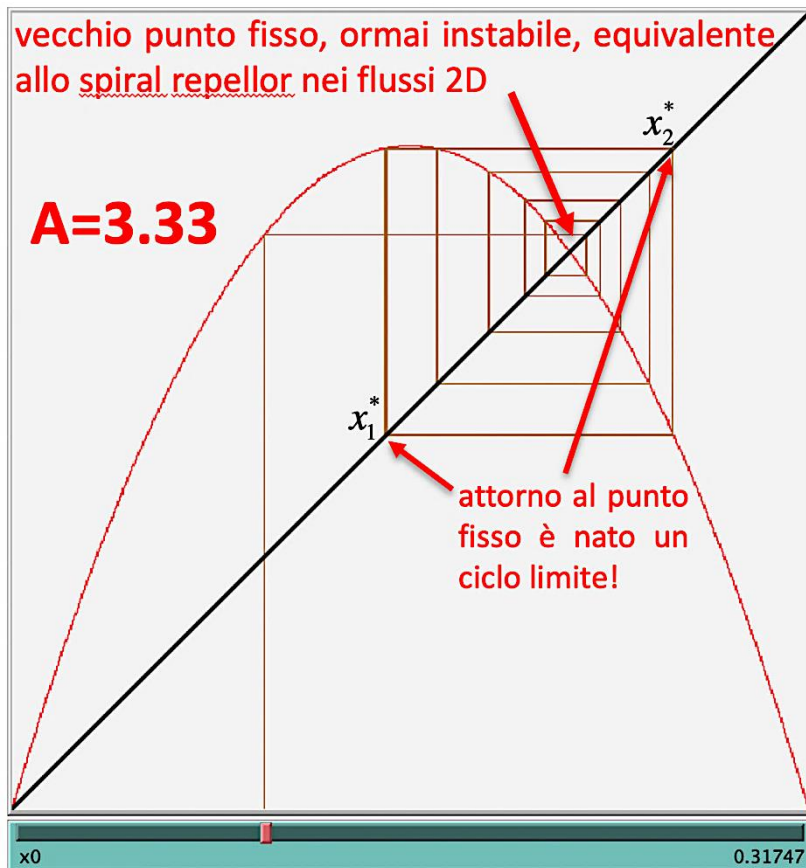


On Off PLOT-SECOND-ITERATE

WolframAlpha



In questo caso si dice che l'attrattore della dinamica é diventato un ciclo limite di periodo 2. Nelle immagini di Fig.1.2 vediamo il comportamento della mappa per  $A = 3.33$ : si vede chiaramente che, partita ancora una volta dal valore  $x_0 = 0.2956$ , la variabile  $x$ , dopo essersi inizialmente diretta verso il valore  $x = 1 - 1/A = 0.699$  (ex-punto fisso attrattivo, ora diventato instabile), se ne allontana subito rapidamente e finisce per oscillare - dopo una ventina di iterazioni - tra i due valori 0.471 e 0.83, che rappresentano un ciclo limite di periodo 2.



## CICLO LIMITE DI PERIODO 2

Indipendentemente dal suo valore iniziale, la popolazione arriverà ad oscillare indefinitamente tra due valori...

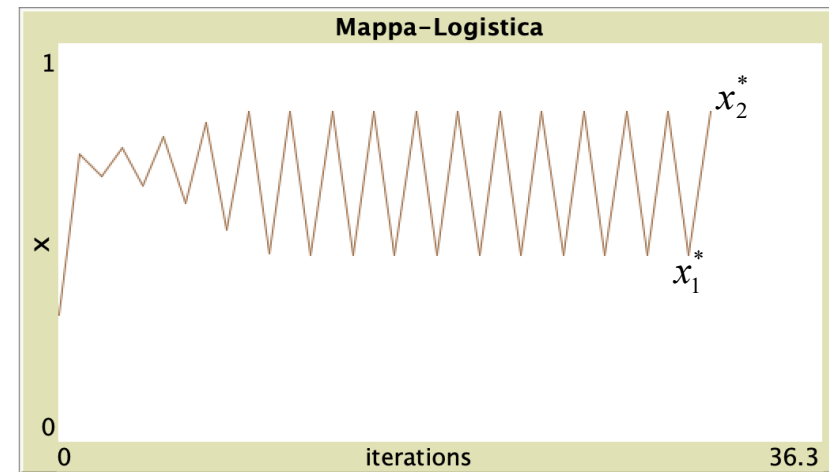
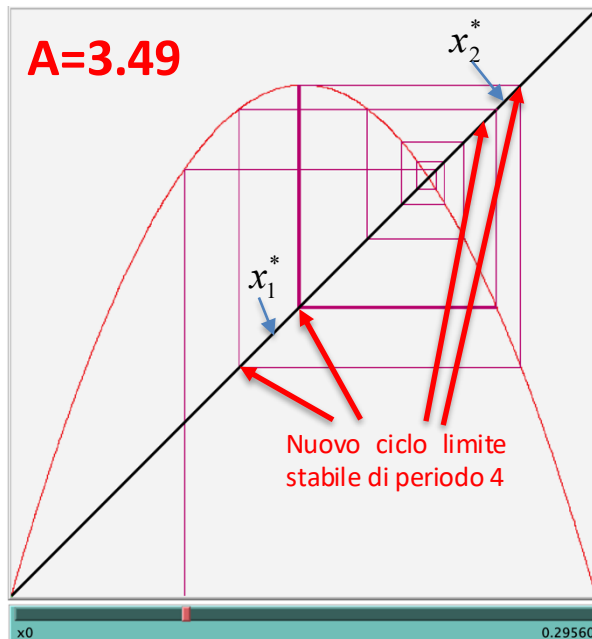


Figura 1.2: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A = 3.33$

In questo caso si dice che l'attrattore della dinamica é diventato un ciclo limite di periodo 2. Nelle immagini di Fig.1.2 vediamo il comportamento della mappa per  $A = 3.33$ : si vede chiaramente che, partita ancora una volta dal valore  $x_0 = 0.2956$ , la variabile  $x$ , dopo essersi inizialmente diretta verso il valore  $x = 1 - 1/A = 0.699$  (ex-punto fisso attrattivo, ora diventato instabile), se ne allontana subito rapidamente e finisce per oscillare - dopo una ventina di iterazioni - tra i due valori 0.471 e 0.83, che rappresentano un ciclo limite di periodo 2.

Aumentando ancora il valore di  $A$  la traiettoria della mappa logistica subisce una serie di biforcazioni successive chiamate raddoppiamenti di periodo, ossia resta intrappolata in cicli limite di periodo crescente corrispondenti ad orbite che diventano instabili nel momento in cui danno luogo ad una nuova generazione di orbite.



## REGIME DEI RADDOPPIAMENTI DI PERIODO (CICLI LIMITE)

Indipendentemente dal suo valore iniziale, la popolazione arriverà ad oscillare indefinitamente tra due valori, poi tra quattro, etc...

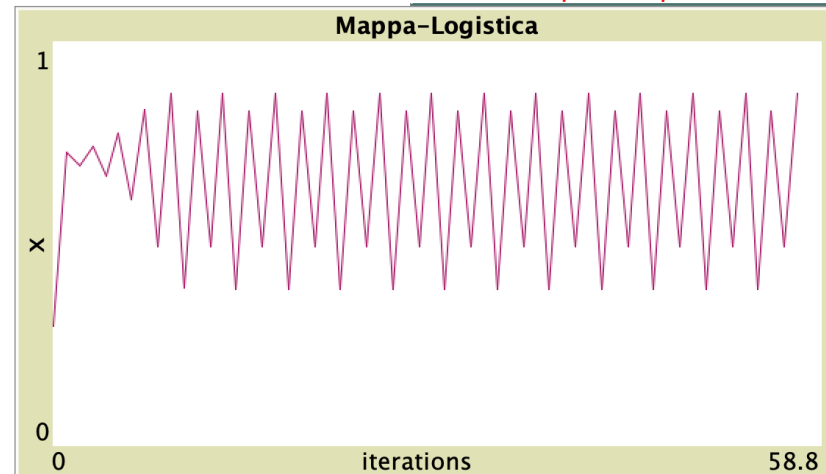


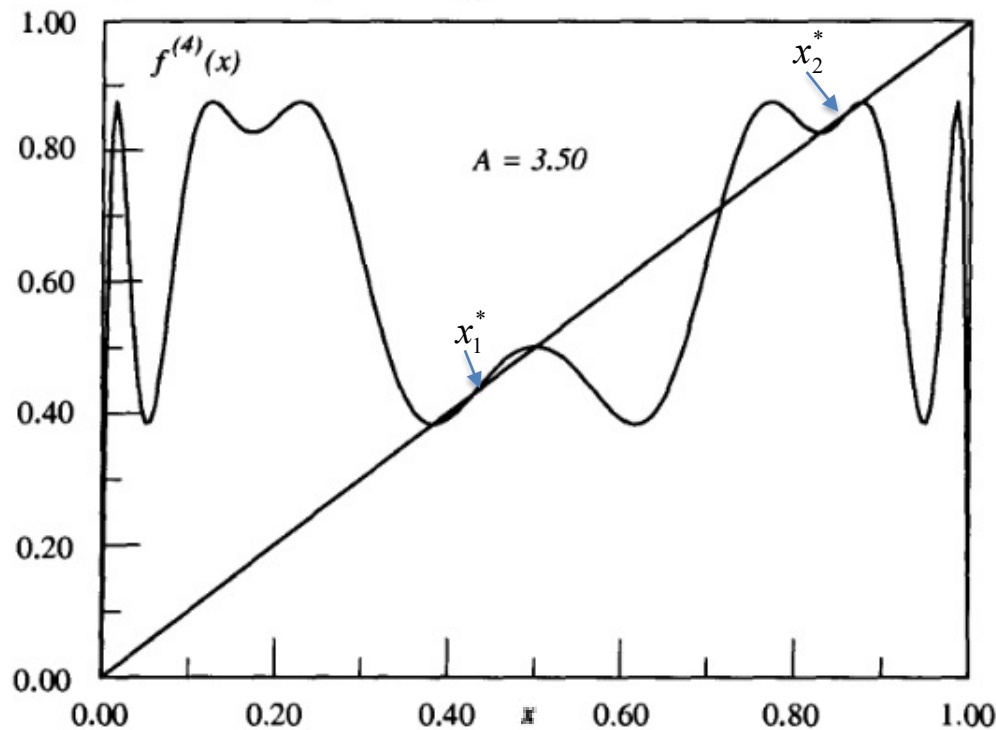
Figura 1.2: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A=3.49$ : siamo qui nel regime dei raddoppiamenti di periodo (vedi testo).

Before continuing our discussion, we would like to make a few remarks about fixed points and how to extend these notions to higher-order iterates. First, we point out that the  $n$ th iterate of  $f(x)$  is defined as the function that results from applying  $f$   $n$ -times:

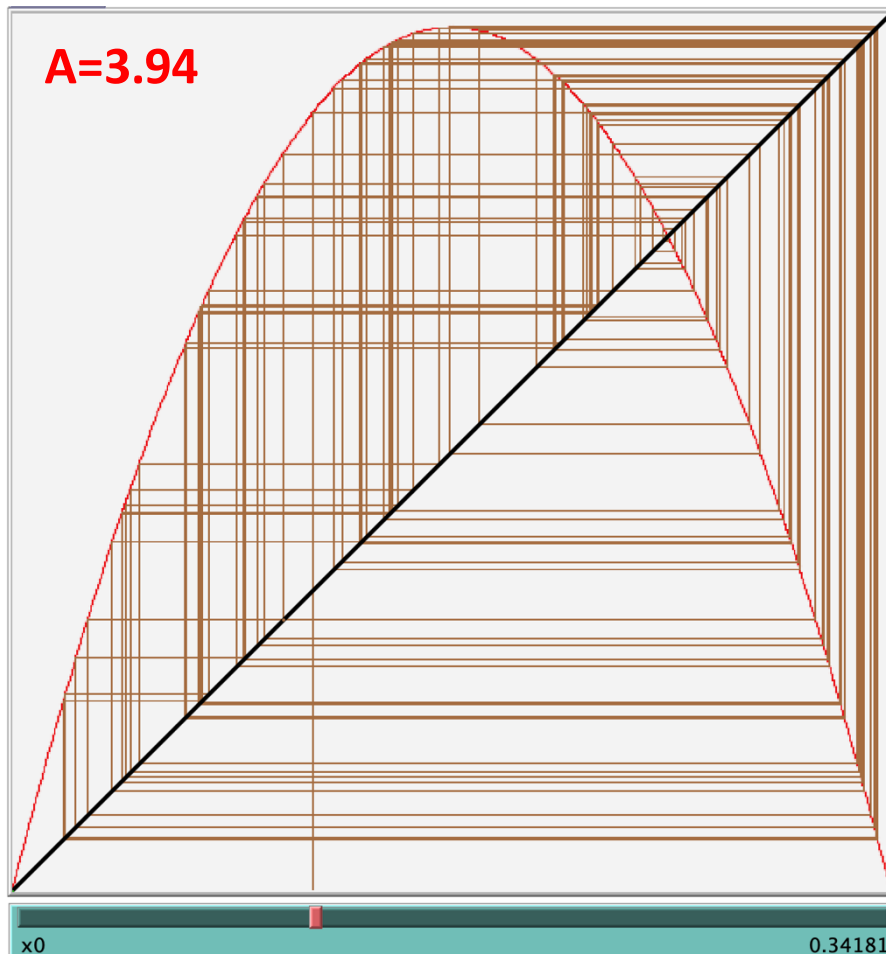
$$f^{(n)}(x) = f(f(f(\dots f(x))) \quad (5.4-7)$$

with  $n$   $f$ s on the right-hand-side. A moment's reflection should convince you that a fixed point of  $f(x)$  is also a fixed point of  $f^{(n)}$ , but that the converse is not always true. Furthermore, if  $x^*$  is a stable fixed point of  $f(x)$ , it is also a stable fixed point of  $f^{(n)}$ . Again, the converse is not always true.

**Fig. 5.7.** A graph of the fourth-iterate of the logistic map function for  $A = 3.50$  just greater than the value  $A_4$  at which the period-4 cycle becomes stable.



In Fig.1.3 é infine mostrato il comportamento della mappa logistica per  $A = 3.94$ . Quí il fenomeno del raddoppiamento di periodo ha definitivamente lasciato il posto ad una dinamica completamente irregolare che vede la variabile  $x$  continuare ad assumere valori sempre diversi senza mai convergere né a punti fissi né a cicli limite: siamo in presenza di un nuovo tipo di attrattore per la mappa logistica, cioè di un attrattore caotico. Al fine di ottenere un comportamento caotico



## REGIME CAOTICO

Indipendentemente dal suo valore iniziale, la popolazione comincerà a variare in maniera assolutamente imprevedibile...

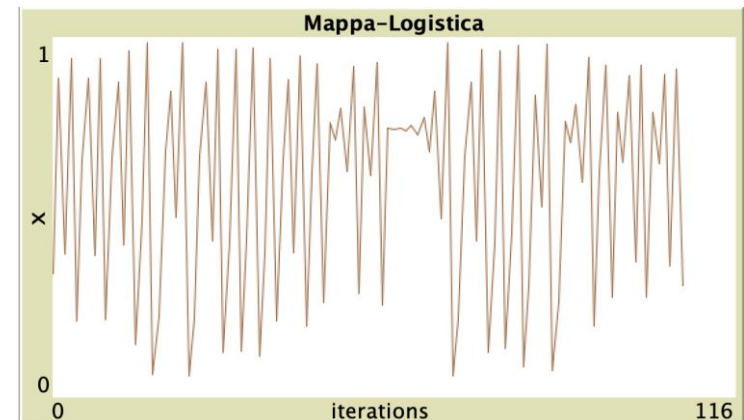
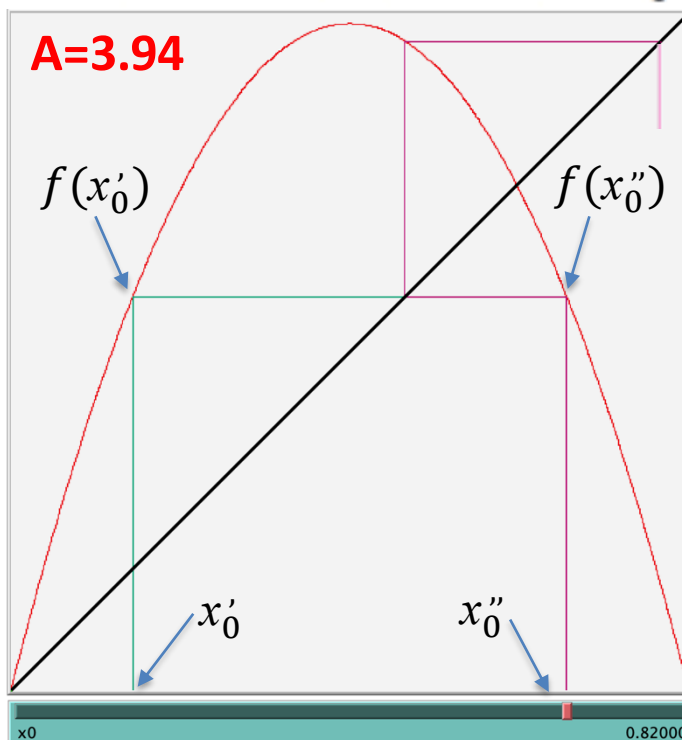


Figura 1.3: Diagramma delle iterazioni (a sinistra) e plot dei valori della Mappa-Logistica (a destra) per  $A = 3.94$ : siamo in pieno regime caotico (vedi testo).

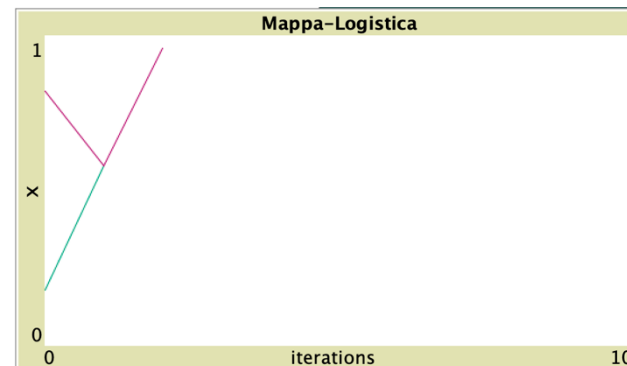
In Fig.1.3 é infine mostrato il comportamento della mappa logistica per  $A = 3.94$ . Quí il fenomeno del raddoppiamento di periodo ha definitivamente lasciato il posto ad una dinamica completamente irregolare che vede la variabile  $x$  continuare ad assumere valori sempre diversi senza mai convergere né a punti fissi né a cicli limite: siamo in presenza di un nuovo tipo di attrattore per la mappa logistica, cioè di un attrattore caotico. Al fine di ottenere un comportamento caotico risulta molto importante, come si era già anticipato in apertura, l'esistenza di un massimo nella funzione di tipo parabolico che descrive la mappa logistica: questo infatti fa sí che due punti distinti alla iterazione  $n - esima$ , ad esempio  $x'_n$  ed  $x''_n$ , possano confluire nello stesso punto  $x'_{n+1}$  alla iterazione successiva (cioé  $x'_{n+1} = f(x'_n) = f(x''_n)$ ) il che sottopone i punti dell'insieme  $[0, 1]$  ad un processo di stiramento e piegatura (conosciuto come "stretching and folding") che favorisce la transizione verso il regime caotico.



Le due condizioni iniziali simmetriche  $x'_0 = 0.18$  e  $x''_0 = 0.82$  hanno la stessa immagine sulla bisettrice... questa proprietà è alla base del processo di stretching and folding che produce la dinamica caotica...



v. Mappa a «ferro di cavallo» di Smale



Il quadro appena descritto é riassunto nel cosiddetto diagramma di biforcazione della mappa logistica, mostrato in Fig.1.4. Esso riporta i valori di  $x$  corrispondenti agli attrattori della dinamica (quindi indipendenti dalle condizioni iniziali) in funzione del parametro di controllo  $1 < A < 4$  (per  $0 < A < 1$  l'unica intersezione della parabola con la bisettrice é il punto fisso stabile  $x = 0$ , dunque tutte le traiettorie convergono banalmente ad esso). Ogni linea verticale che taglia il diagramma in corrispondenza di un dato valore di  $A$  rappresenta lo spazio delle fasi unidimensionale della mappa logistica e i punti di intersezione di questa linea con il diagramma rappresentano l'attrattore che si osserva per quel valore di  $A$ . Da quanto appena detto si vede subito che il regime di "punto fisso" domina per  $1.0 < A < 3.0$ , mentre nella regione  $3.0 < A < 3.56994$  si assiste alla già descritta sequenza di biforcazioni successive finché, superato il valore limite  $A_\infty = 3.56994$ , detto anche 'punto di accumulazione della sequenza dei raddoppiamenti di periodo', si entra nella zona fortemente caotica.

**EDGE OF CHAOS**

**DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE**

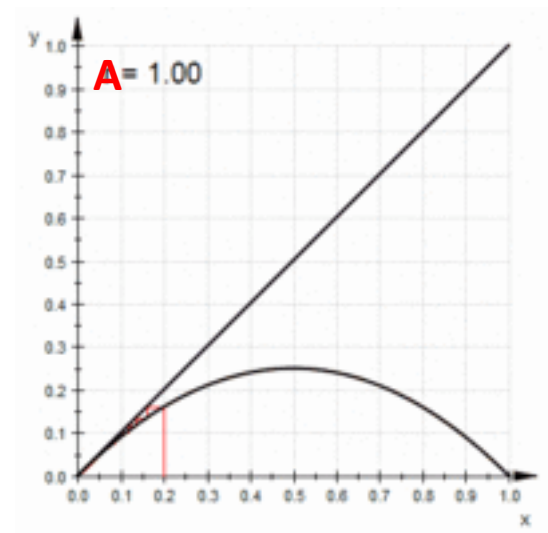
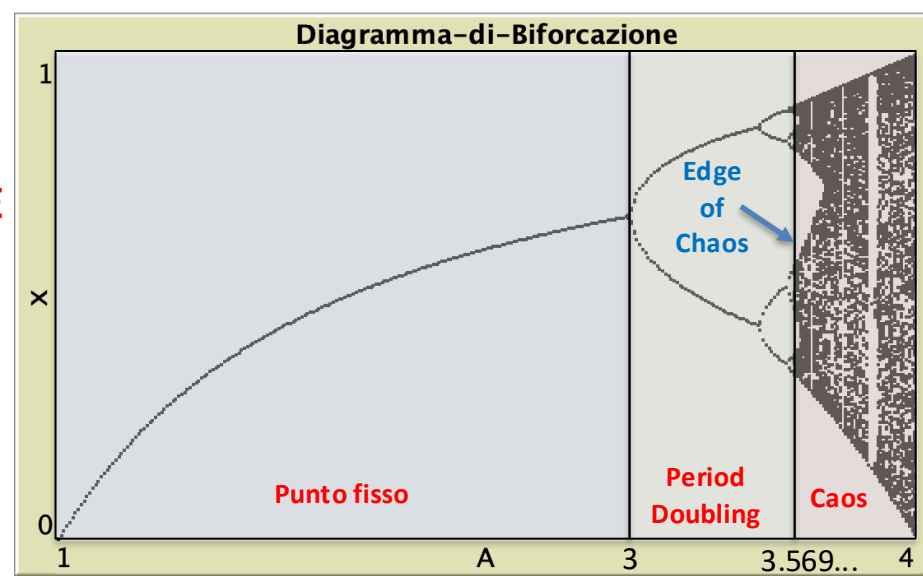


Figura 1.4: Diagramma di biforcazione della mappa logistica per valori del parametro di controllo  $A$  compresi tra 1.0 e 4.0 .

Nel 1978 Mitchell Feigenbaum [3, 4] scoprì che, definendo con  $A_n$  il valore in corrispondenza del quale il periodo  $2^{n-1}$  lascia il posto al periodo  $2^n$ , il rapporto

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} \quad (1.4)$$

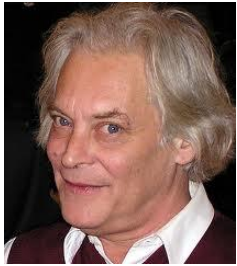
resta approssimativamente costante per tutti i valori di  $n$  e, cosa ancora più significativa, per  $n$  molto grandi tende ad un numero  $\delta$  che risulta essere lo stesso per tutte le mappe iterative che soddisfano certe proprietà matematiche generali intorno ai massimi delle funzioni che le descrivono. Si tratta della prima delle due famose costanti universali di Feigenbaum, e cioè

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.6692\dots, \quad (1.5)$$

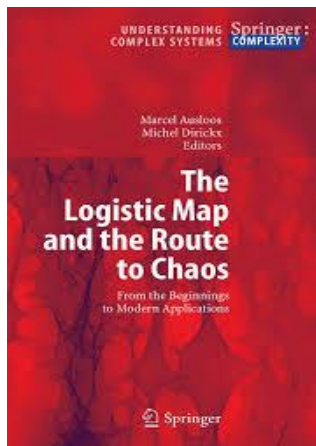
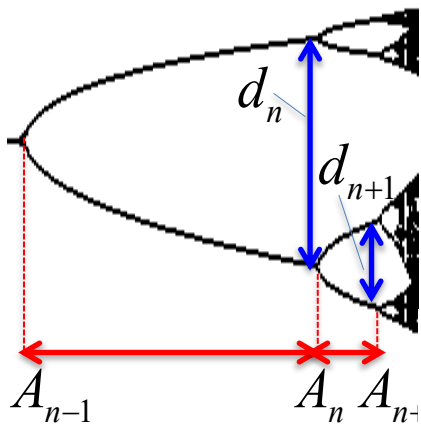
laddove la seconda descrive invece il rapporto tra le "size"  $d_n$  di periodi successivi:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.5029\dots \quad (1.6)$$

Nel 1983 Hu e Satija [5] dimostrarono che le mappe descritte da funzioni del tipo  $f(x) = 1 - a|x|^z$  possono essere raggruppate in classi di universalità determinate dall'esponente  $z$ . La mappa logistica appartiene alla classe delle mappe quadratiche, per le quali  $z = 2$  e - come abbiamo appena visto -  $\alpha = 2.502\dots$  e  $\delta = 4.669\dots$ . Al crescere di  $z$ , invece,  $\alpha$  sembra decrescere asintoticamente verso il valore 1.27 mentre  $\delta$  cresce linearmente (dunque, per essere precisi,  $\alpha$  e  $\delta$  saranno effettivamente 'costanti' solo all'interno di una data classe di universalità). In realtà fu proprio la scoperta dell'universalità di queste costanti coinvolte nel fenomeno del raddoppiamento di periodo, un fenomeno molto importante proprio perché definisce una delle cosiddette 'rotte verso il caos', a convincere gli scienziati della grande importanza ed utilità della dinamica non-lineare e delle sue applicazioni.



M. Feigenbaum  
(1944)



## 1.4 Il Regime Caotico: l'esponente di Lyapunov

Vediamo adesso di focalizzare la nostra attenzione sul regime caotico della mappa logistica. In Fig.1.11 vediamo un ingrandimento della porzione del diagramma di biforcazione di Fig.1.4 corrispondente appunto al regime caotico, ottenibile impostando gli sliders **starting-A** e **final-A** rispettivamente sui valori  $A = 3.56$  e  $A = 4.00$ . A questo proposito può essere utile ricordare che, qualora si presenti la necessità di selezionare un dato valore in uno slider con una precisione di diverse cifre decimali, è possibile inserire questo valore direttamente nell'apposito campo della finestra di dialogo dello slider (tasto destro sullo slider, menù **Edit**, campo **Value** in basso a sinistra) evitando così di doverlo individuare manualmente con il cursore.

Osservando attentamente la Fig.1.11 notiamo che, al crescere di  $A$ , alle zone caotiche si alternano delle circoscritte finestre di regolarità, in cui le traiettorie tornano ad essere confinate all'interno di attrattori a ciclo limite.

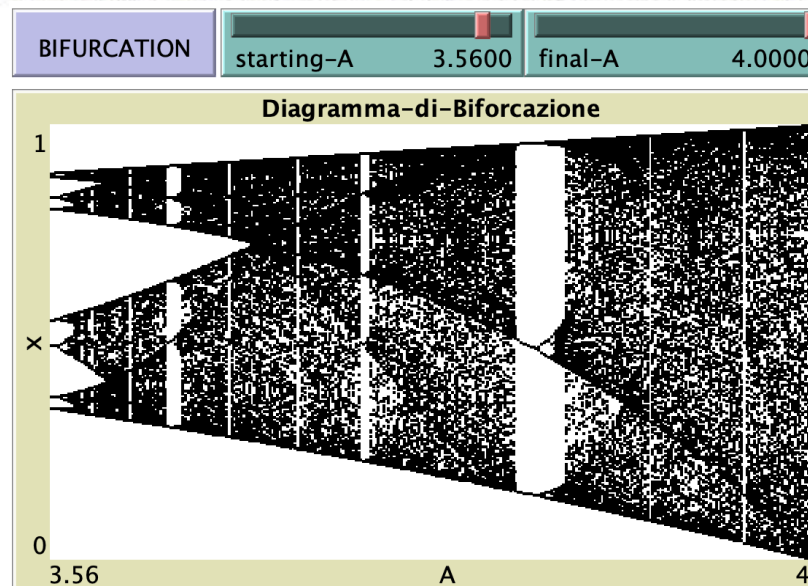


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ( $3.56 < A < 4.00$ ) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

Questo comportamento, spiegato da un teorema del matematico russo A.N.Sarkovskii nel 1964 [6], é legato alla progressiva fusione delle cosiddette **bande caotiche** delimitate dai punti **immagine** del punto critico  $x_c = 0.5$ , che abbiamo già introdotto con riferimento alla Fig.1.4. Come il lettore potrà agevolmente verificare con opportune simulazioni, il massimo valore della  $x$  che una traiettoria può visitare, per un fissato valore del parametro  $A$ , é dato da  $x_{max} = f(x_c)$ , mentre il valore minimo é dato da  $x_{min} = f(x_{max})$ : in altre parole, per qualunque valore di  $A$ , le prime due iterazioni di un **superciclo**, ossia di una traiettoria che parte dal punto critico, delimiteranno la regione dell'attrattore nel diagramma di iterazione. Questa proprietà, trasportata nel diagramma di biforcazione di Fig.1.11, imporrá appunto un confinamento dei 200 punti plottati per ogni valore di  $A$  all'interno dei punti  $x_{max}$  e  $x_{min}$  relativi a quel valore di  $A$ , e dunque porterá alla creazione di bande verticali che si fonderanno progressivamente tra loro al crescere di  $A$ .

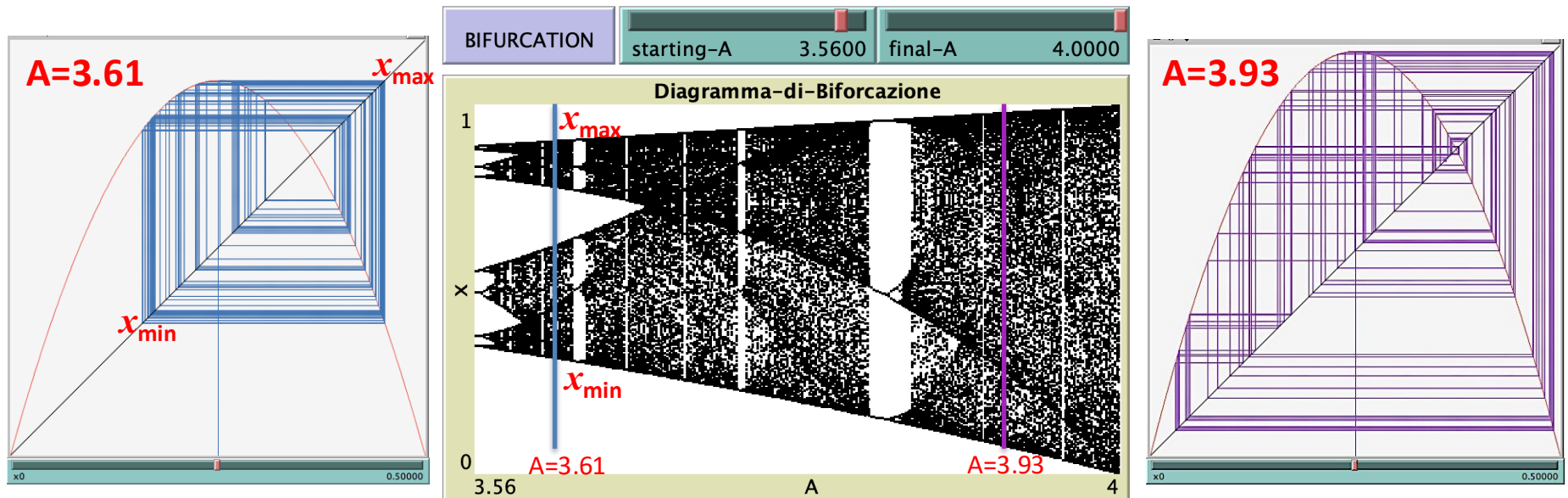


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ( $3.56 < A < 4.00$ ) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

Ad esempio, in Fig.1.11 si vede chiaramente che le prime due grandi bande caotiche, formate ciascuna da bande minori che emergono per  $A = 3.569$  dalla regione di raddoppiamento del periodo, si fondono in corrispondenza del punto  $A = 3.68$ , chiamato punto di Misiurewicz [7]. Alla destra di questo punto seguono poi, con un ordine dettato dal teorema di Sarkovskii, le tre principali finestre di regolarità, di ampiezza decrescente e di periodo, rispettivamente, 7, 5 e 3. In corrispondenza del valore di  $A$  in cui queste finestre periodiche appaiono si verifica una cosiddetta 'biforcazione tangente' (tangent bifurcation) mentre in corrispondenza del valore in cui il comportamento della mappa torna ad essere caotico si parla di 'crisi' (interior crisis). Entrambe queste definizioni sono legate al concetto di 'intermittenza', che é un'altra delle fondamentali 'rotte verso il caos' cui abbiamo già accennato e su cui torneremo in seguito.

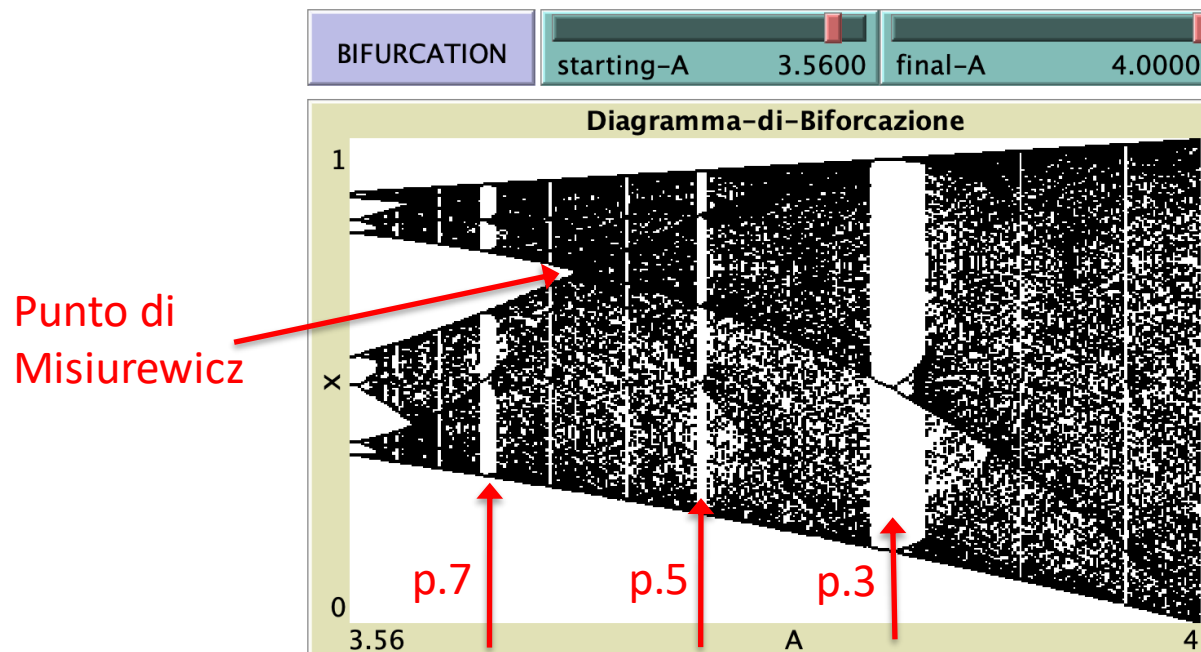


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ( $3.56 < A < 4.00$ ) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

Rimandiamo alla bibliografia ([2]) per ulteriori approfondimenti sull'organizzazione del diagramma di biforcazione nel regime caotico, ma é importante sottolineare sin da adesso una delle sue principali caratteristiche e cioè la cosiddetta autosimilarità. Analizzando con maggiore dettaglio la Fig.1.11 ci si rende facilmente conto che l'alternanza di bande caotiche e finestre di regolarità si ripete simile a se stessa a diverse scale di osservazione: se ingrandissimo infatti una porzione del diagramma di biforcazione ci troveremmo di fronte ad una struttura molto simile a quella originaria, e lo stesso accadrebbe ingrandendone ulteriormente porzioni sempre più piccole. Questa strana proprietà, detta appunto autosimilarità, é tipica degli attrattori caotici e avremo modo di occuparcene in dettaglio più avanti, quando ci occuperemo della dimensionalità di un attrattore.

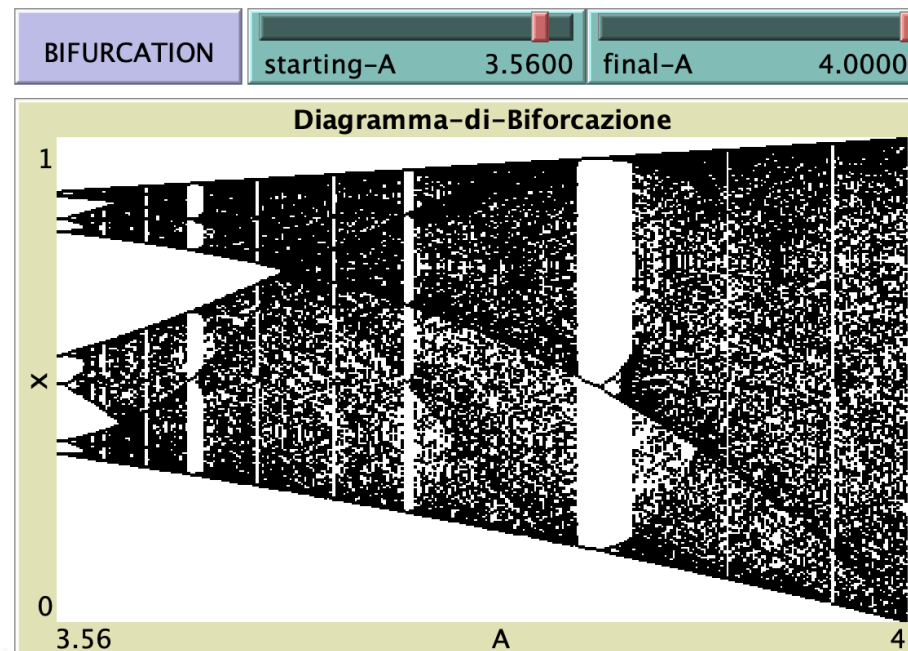
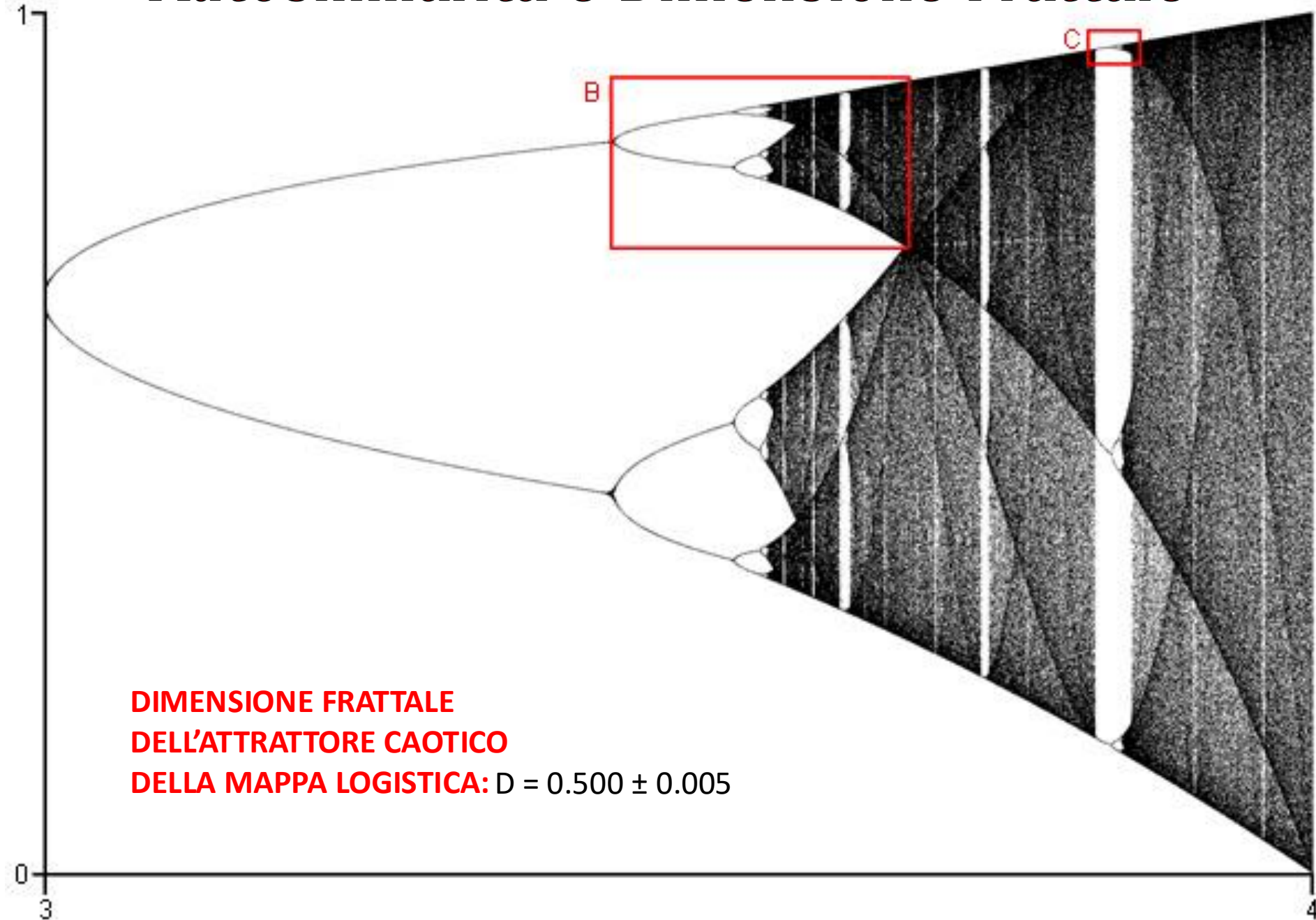


Figura 1.11: Ingrandimento della regione caotica ( $3.56 < A < 4.00$ ) del Diagramma di Biforcazione della mappa logistica.

# Autosimilarità e Dimensione Frattale



# Calcolo dell'esponente di Lyapunov nella Mappa Logistica

Passiamo adesso senza ulteriore indugio a quello che probabilmente é il piú importante indice quantitativo del comportamento caotico della mappa logistica, e cioè l'esponente di Lyapunov. Abbiamo già detto in apertura (eq.1.2) - e lo abbiamo ribadito mostrando il plot di Fig.1.9 - che, all'interno del regime caotico, due traiettorie della mappa logistica corrispondenti a due condizioni iniziali che differiscano inizialmente di una quantità anche molto piccola, divergeranno esponenzialmente al crescere del numero delle iterazioni con un rate costante  $\lambda$  chiamato esponente di Lyapunov, il quale, come mostreremo tra un attimo, dipende dal valore del parametro di controllo  $A$ . Vediamo adesso di formalizzare meglio questi concetti per ricavare una espressione quantitativa dell'esponente di Lyapunov.

## REGIME CAOTICO E SENSIBILITA' ALLE CONDIZIONI INIZIALI

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\lambda t},$$

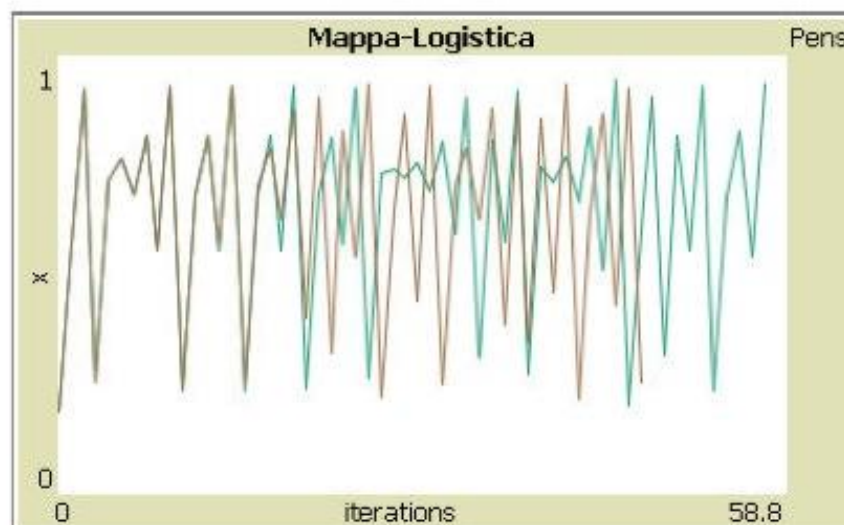


Figura 1.9: Un esempio della sensibilità alle condizioni iniziali delle traiettorie della mappa logistica nel regime caotico: le due traiettorie mostrate in figura sono state ottenute per  $A = 3.78$  e per due diversi valori di  $x_0$ , precisamente 0.18450 e 0.18451. Si vede chiaramente che le traiettorie iniziano a divergere dopo circa 17 iterazioni.

Poiché nel caso di un attrattore caotico di un sistema limitato, come quello della mappa logistica, ogni singola traiettoria é costretta ad avvicinarsi ripetutamente ad ogni suo punto precedente, ecco che per calcolare l'esponente di Lyapunov non é necessario prendere in considerazione la divergenza tra due traiettorie distinte ma é bensí sufficiente esaminare la divergenza tra due punti inizialmente molto vicini di una medesima traiettoria al crescere del numero di iterazioni. Se dunque per  $n = 0$  consideriamo un punto  $x_0$  dell'attrattore caotico e un punto ad esso vicino  $x_0 + \epsilon$ , ecco che alla  $n$  - *esima* iterazione la distanza tra questi due punti sará diventata

$$\epsilon(n) = |f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|, \quad (1.7)$$

dove abbiamo indicato con  $f^{(n)}(x)$  la  $n$  - *esima* iterata della funzione  $f(x) = Ax(1 - x)$ . Essendo in regime caotico ci aspettiamo che al crescere di  $n$  questa distanza cresca esponenzialmente seguendo la versione discreta dell'equazione 1.2, cioé:

$$\epsilon(n) = \epsilon e^{\lambda n}, \quad (1.8)$$

il che significa che l'esponente di Lyapunov  $\lambda$  può essere espresso come:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{|f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\epsilon}. \quad (1.9)$$

É evidente che, per  $\epsilon$  che tende a zero, l'argomento del logaritmo a secondo membro non é altro che il valore assoluto della derivata rispetto ad  $x$  di  $f^{(n)}(x)$ , ed é possibile dimostrare che quest'ultima può essere riscritta in termini delle derivate prime  $f'(x_i)$  calcolate nei punti successivi  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  della traiettoria fino ad  $x_n$  [2]. Ne segue che la formula definitiva che permette di calcolare l'esponente di Lyapunov per la mappa logistica (e in realtà per le mappe unidimensionali in generale) sará la seguente:

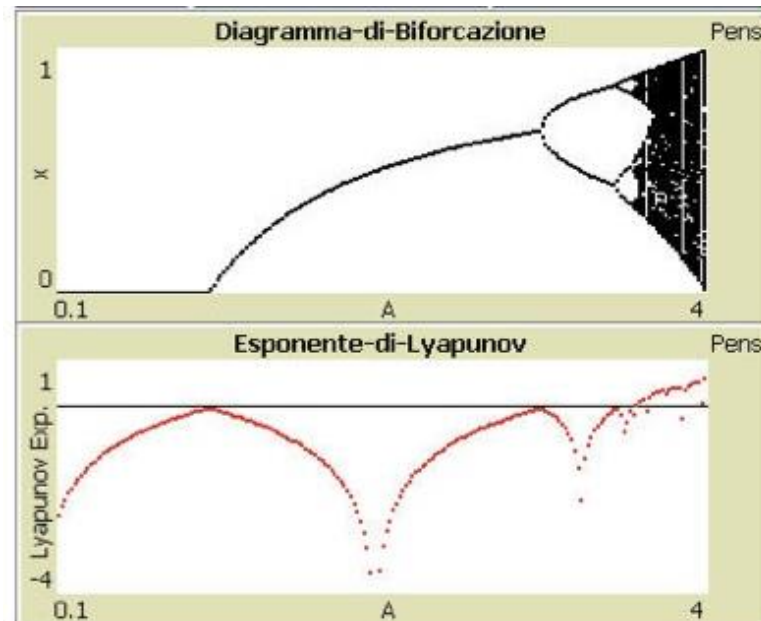
$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|. \quad (1.10)$$

Regola di concatenazione delle derivate:

$$\begin{aligned} \frac{df^{(2)}(x)}{dx} &= \frac{df(f(x))}{dx} \\ &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{f(x)} \left. \frac{df}{dx} \right|_x \end{aligned}$$

Se il regime in cui ci troviamo é caotico, il valore asintotico dell'esponente di Lyapunov (cioé il valore calcolato dopo un numero sufficiente di iterazioni) deve essere positivo, mentre in tutti gli altri casi sará negativo. Un valore di  $\lambda$  uguale o prossimo a zero indicherá invece una situazione intermedia tra ordine e caos, meglio nota come *marginale del caos* ('the edge of chaos'). In Fig.1.12 é mostrato l'andamento dell'esponente di Lyapunov per la mappa logistica al variare del parametro di controllo  $A$ , confrontato con il diagramma di biforcazione completo (con  $0 < A < 4$ ): per ogni valore di  $A$  abbiamo plottato il valore di  $\lambda$  calcolato per mezzo dell'Eq.1.10 dopo  $n = 400$  iterazioni (valore che - come vedremo tra poco - possiamo tranquillamente considerare asintotico, in quanto  $\lambda$  si stabilizza molto prima). Si vede chiaramente che, sia pur con valori alternativamente crescenti e decrescenti, l'esponente di Lyapunov si mantiene negativo fino al confine con la regione caotica, cioé per  $A < 3.569$ , dopodiché diventa positivo e cresce gradualmente (se si eccettuano delle sporadiche inflessioni in corrispondenza delle finestre di regolaritá) verso il valore limite  $\ln(2)$  per  $A = 4$ , indicando cosí un aumento graduale del 'grado di caoticitá' del sistema.

Figura 1.12: Andamento del valore asintotico dell'esponente di Lyapunov della mappa logistica in funzione di  $A$ , confrontato con il diagramma di biforcazione.



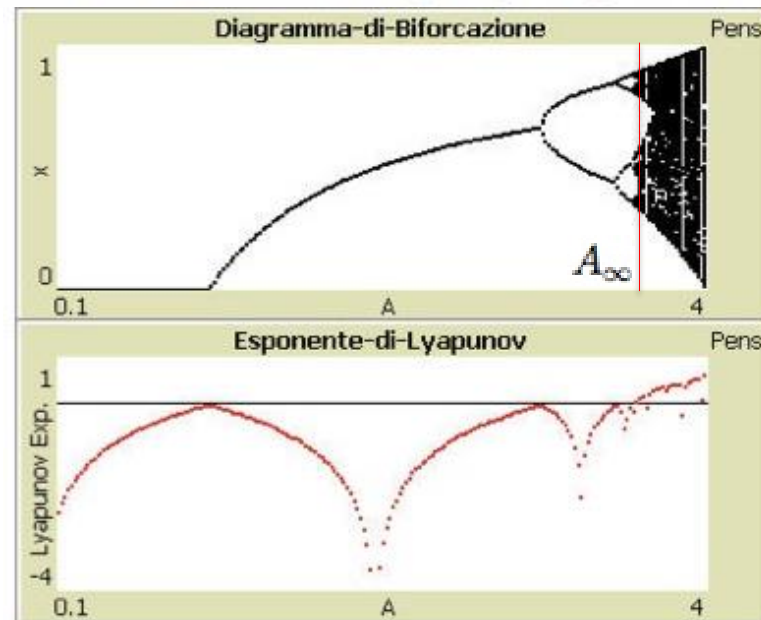
Quest'ultimo risultato é stato formalizzato nel 1980 da Huberman e Rudnick [8], i quali dimostrarono che in generale, quando un sistema diventa caotico attraverso una sequenza di raddoppiamenti di periodo, esiste una relazione analitica universale che lega l'esponente di Lyapunov al parametro di controllo  $A$  nella regione caotica. La relazione é la seguente:

$$\lambda(A) = \lambda_0(A - A_\infty)^{\frac{\ln 2}{\ln \delta}} = \lambda_0(A - A_\infty)^{0.445\dots}, \quad (1.11)$$

dove  $\lambda_0$  é una costante,  $A_\infty$  é il punto di accumulazione dei raddoppiamenti di periodo e  $\delta$  é la costante di Feigenbaum per la mappa logistica  $\delta = 4.669$  (ovviamente per altri tipi di mappe, appartenenti ad altre classi di universalitá, il valore di  $\delta$  sará diverso).

Per inciso, é interessante notare che i valori di  $A$  in cui l'esponente di Lyapunov tende ad annullarsi in Fig.1.12 corrispondono esattamente ai punti di biforcazione degli attrattori a ciclo limite o (nella zona caotica) ai punti corrispondenti a delle biforcazioni tangenti: sono questi i punti della mappa logistica che si trovano al 'margine del caos', una condizione che, piú in generale, rappresenta spesso il sintomo di un cambiamento strutturale nella topologia degli attrattori dei sistemi dissipativi.

Figura 1.12: Andamento del valore asintotico dell'esponente di Lyapunov della mappa logistica in funzione di  $A$ , confrontato con il diagramma di biforcazione.



Quest'ultimo risultato é stato formalizzato nel 1980 da Huberman e Rudnick [8], i quali dimostrarono che in generale, quando un sistema diventa caotico attraverso una sequenza di raddoppiamenti di periodo, esiste una relazione analitica universale che lega l'esponente di Lyapunov al parametro di controllo  $A$  nella regione caotica. La relazione é la seguente:

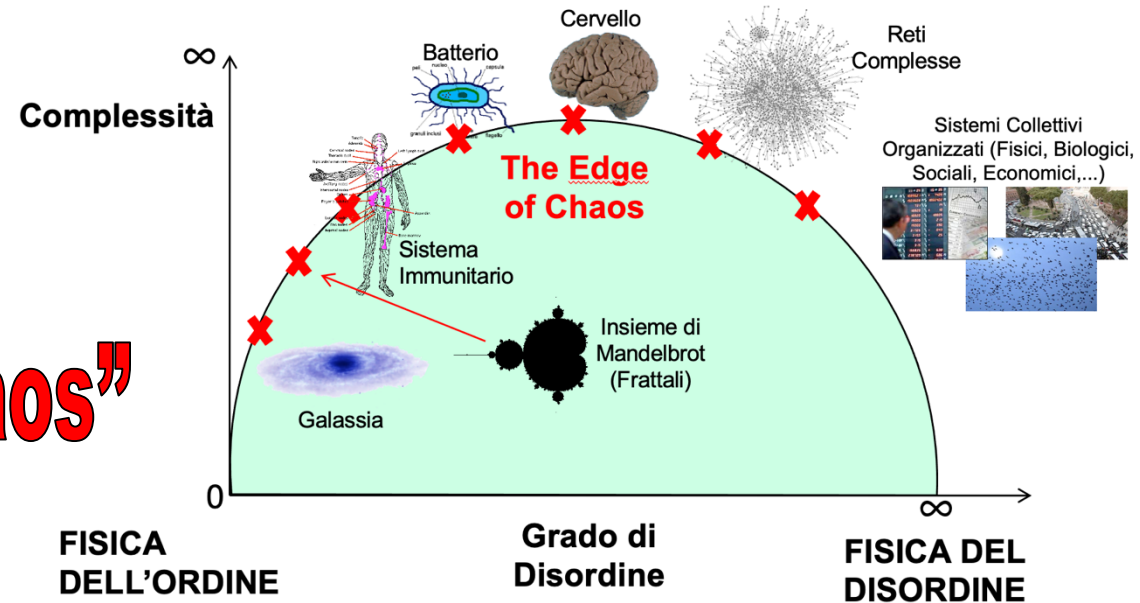
$$\lambda(A) = \lambda_0(A - A_\infty)^{\frac{\ln 2}{\ln \delta}} = \lambda_0(A - A_\infty)^{0.445...}, \quad (1.11)$$

dove  $\lambda_0$  é una costante,  $A_\infty$  é il punto di accumulazione dei raddoppiamenti di periodo e  $\delta$  é la costante di Feigenbaum per la mappa logistica  $\delta = 4.669$  (ovviamente per altri tipi di mappe, appartenenti ad altre classi di universalitá, il valore di  $\delta$  sará diverso).

Per inciso, é interessante notare che i valori di  $A$  in cui l'esponente di Lyapunov tende ad annullarsi in Fig.1.12 corrispondono esattamente ai punti di biforcazione degli attrattori a ciclo limite o (nella zona caotica) ai punti corrispondenti a delle biforcazioni tangenti: sono questi i punti della mappa logistica che si trovano al 'margine del caos', una condizione che, piú in generale, rappresenta spesso il sintomo di un cambiamento strutturale nella topologia degli attrattori dei sistemi dissipativi.

# Complessità

# "at the edge of chaos"

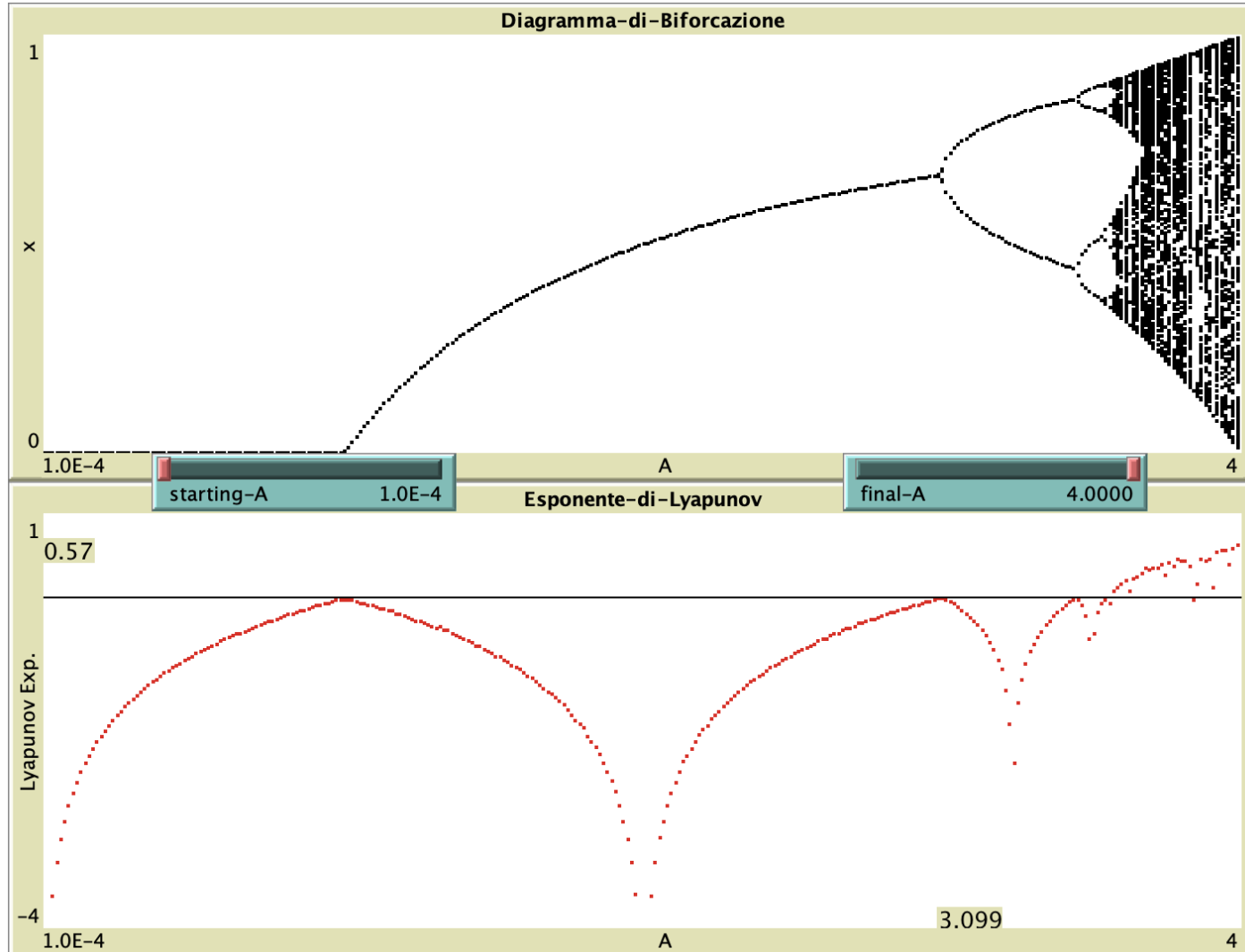


# Mappa-Logistica-Bifurcation+Lyapunov.nlogo

PLOT BIFURCATION + LYAPUNOV

MAPPA LOGISTICA:  
 $x(n+1) = A x(n) [1 - x(n)]$

$1 < A < 3$  punto-fisso  
 $3 < A < 3.56994$  period-doubling  
 $3.56994 < A < 4$  caos



# mapa-Logistica-Bifurcation+Lyapunov.nlogo

```
set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
clear-plot
set-current-plot-pen "line"
plotxy 0 0 plotxy 100000 0
set-current-plot-pen "default"
set-plot-x-range starting-A final-A
set-plot-y-range -4 1
```

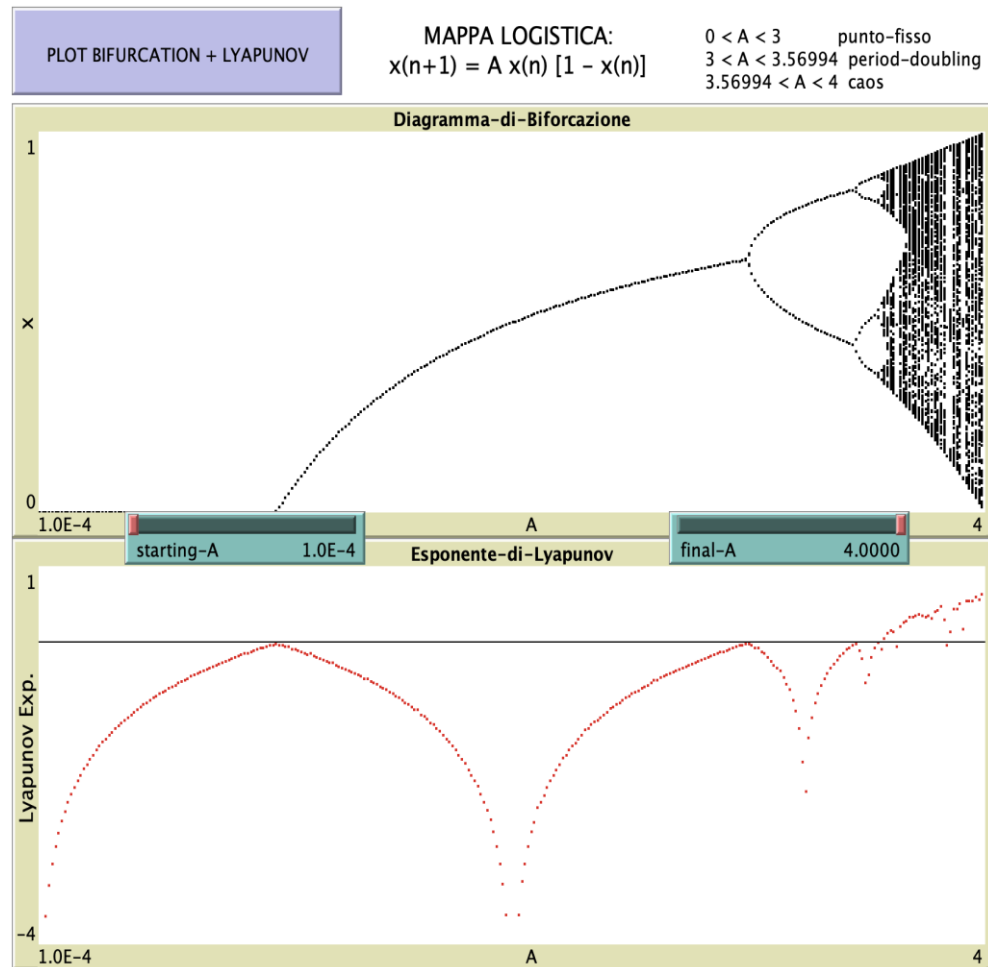
```
let llyapunov 0
set A1 starting-A
let passo ((final-A - starting-A) / 300)
repeat 300
```

```
set-current-plot "Diagramma-di-Biforcazione"
set-current-plot-pen "default"
```

```
let ll-sum 0
set cont 1
set x random-float 1
repeat 200
[
  set x (A1 * x * (1 - x))
  set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
  set llyapunov (ll-sum / cont)
  set cont (cont + 1)
]
```

```
repeat 200
[
  set x (A1 * x * (1 - x))
  plotxy A1 x
  set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
  set llyapunov (ll-sum / cont)
  set cont (cont + 1)
]
```

```
set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
plotxy A1 llyapunov
set A1 (A1 + passo)
```



$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

$$f(x) = Ax(1-x) \quad \square \quad f'(x) = A - 2Ax$$



### Showing 1–50 of 127 results for title: logistic map

Search v0.5.6 released 2020-02-24

logistic map Title Search

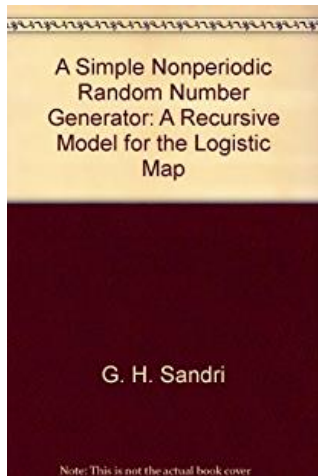
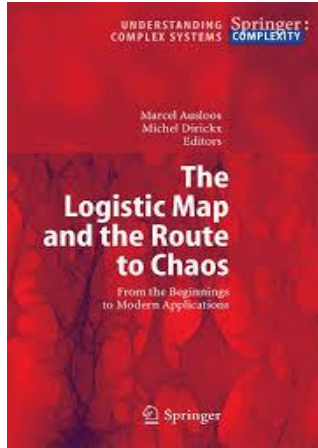
Show abstracts Hide abstracts

Advanced Search

50 results per page. Sort results by Announcement date (newest first) Go

1 2 3

Next



1. arXiv:2503.13256 [pdf, ps, other] nlin.CD math-ph  
**On Fractional Generalizations of the Logistic Map and their Applications**

Authors: Mark Edelman

Abstract: The regular logistic map was introduced in 1960s, served as an example of a complex system, and was used as an instrument to demonstrate and investigate the period doubling cascade of bifurcations scenario of transition to chaos. In this paper, we review various fractional generalizations of the logistic map and their applications.

Submitted 18 March, 2025; v1 submitted 17 March, 2025; originally announced March 2025.

Comments: 42 pages, 20 figures, a book chapter

MSC Class: 26A33; 47H99; 34A99; 37G15; 70K50; 39A70

2. arXiv:2501.12398 [pdf, other] nlin.CD  
**Synchronization of branching chain of coupled maps: application to the logistic map**

Authors: Franco Bagnoli, Michele Baia, Tommaso Matteuzzi, Arkady Pikovsky

Abstract: We investigate the synchronization dynamics in a chain of coupled chaotic maps organized in a single-parent family tree, whose properties can be captured considering each parent node connected to two children, one of which also serves as the parent for the subsequent node. Our analysis focuses on two distinct synchronization behaviors: parent-child synchronization, defined by the vanishing distanc... More

Submitted 7 January, 2025; originally announced January 2025.

Comments: 22 pages, 18 figures

3. arXiv:2409.15175 [pdf, ps, other] math.DS cs.DM math.CO  
**Generalized Logistic Maps and Convergence**

Authors: Steven Finch

Abstract: We treat three cubic recurrences, two of which generalize the famous iterated map  $x \mapsto x(1-x)$  from discrete chaos theory. A feature of each asymptotic series developed here is a constant, dependent on the initial condition but otherwise intrinsic to the function at hand.

Submitted 5 November, 2024; v1 submitted 23 September, 2024; originally announced September 2024.

Comments: 13 pages

MSC Class: 39A20 (Primary) 05C05; 05C30; 11B37; 26A18; 37E05 (Secondary)

4. arXiv:2409.07174 [pdf, other] math.DS  
**Dynamical Analysis Of Fractional Order Generalized Logistic Map**

Authors: Sachin Bhalekar, Janardhan Chevala, Prashant M. Gade

Abstract: In this work, we propose a generalization to the classical logistic map. The generalized map preserves most properties of the classical map and has richer dynamics as it contains the fractional order and one more parameter. We propose the stability bounds for each equilibrium point. The detailed bifurcation analysis with respect to both parameters is presented using the bifurcation diagrams in one... More

Submitted 11 September, 2024; originally announced September 2024.

Comments: 25 pages, 46 figures

MSC Class: 26A33; 39A28; 39A30; 39A33



1. arXiv:2102.08102 [pdf, other] [cond-mat.stat-mech](#) [math-ph](#) [math.DS](#) [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1063/5.0040544

**Logistic map trajectory distributions: Renormalization-group, entropy and criticality at the transition to chaos**

**Authors:** Alvaro Diaz-Ruelas, Fulvio Baldovin, Alberto Robledo

**Abstract:** We study the evolution of the probability density of ensembles of iterates of the **logistic...** [More](#)

Submitted 16 February, 2021; originally announced February 2021.

Comments: 20 pages, 12 figures, v1

2. arXiv:1608.02891 [pdf, other] [nlin.CD](#) [cond-mat.stat-mech](#) [doi](#) 10.1140/epjst/e2016-60011-y

**Sums of variables at the onset of chaos, replenished**

**Authors:** Alvaro Diaz-Ruelas, Alberto Robledo

**Abstract:** As a counterpart to our previous study of the stationary distribution formed by sums of positions at the Feigenbaum point via the period-doubling cascade in the **logistic...** [More](#)

Submitted 9 August, 2016; originally announced August 2016.

Comments: To be published in European Physical Journal Special Topics: Temporal and Spatio-Temporal Dynamic Instabilities: Novel Computational and Experimental Approaches

3. arXiv:1504.06358 [pdf, ps, other] [nlin.CD](#) [cond-mat.stat-mech](#) [doi](#) 10.1088/1742-6596/604/1/012018

**Pascal (Yang Hui) triangles and power laws in the logistic map**

**Authors:** Carlos Velarde, Alberto Robledo

**Abstract:** We point out the joint occurrence of Pascal triangle patterns and power-law scaling in the standard **logistic map**, or more generally, in unimodal **maps**. It is known that these features are present in its two types of bifurcation cascades: period and chaotic- band doubling of attrac...

[More](#)

Submitted 23 April, 2015; originally announced April 2015.

Comments: Proceedings of 4th International Workshop on: Statistical Physics and Mathematics of Complex Systems (SPMCS2015), Yichang, China October 12-16 2014. To be published in the Journal of Physics: Conference Series(2015), ISSN 1742-6596

4. arXiv:1409.7449 [pdf, ps, other] [nlin.CD](#) [cond-mat.stat-mech](#) [doi](#) 10.1209/0295-5075/108/20008

**Scaling of distributions of sums of positions for chaotic dynamics at band-splitting points**

**Authors:** Alvaro Diaz-Ruelas, Miguel Angel Fuentes, Alberto Robledo

**Abstract:** The stationary distributions of sums of positions of trajectories generated by the **logistic map** have been found to follow a basic renormalization group (RG) structure: a nontrivial fixed-point multi-scale distribution at the period-doubling onset of chaos and a Gaussian trivial fixed-point distribution for all chaotic... [More](#)

Submitted 25 September, 2014; originally announced September 2014.

5. arXiv:1401.3771 [pdf, other] [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1140/epjbe/e2014-40882-1

**Sums of variables at the onset of chaos**

**Authors:** Miguel Angel Fuentes, Alberto Robledo

**Abstract:** ...the period-doubling route. We study the sums of successive positions generated by an ensemble of initial conditions uniformly distributed in the entire phase space of a unimodal **map** as represented by the **logistic map**. We find that these sums acquire their salient, multiscale, fea...

[More](#)

Submitted 15 January, 2014; originally announced January 2014.

Comments: arXiv admin note: text overlap with arXiv:1312.0716

6. arXiv:cond-mat/0504033 [pdf, ps, other] [cond-mat.stat-mech](#) [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1103/PhysRevE.72.066213

**Parallels between the dynamics at the noise-perturbed onset of chaos in logistic maps and the dynamics of glass formation**

**Authors:** Fulvio Baldovin, Alberto Robledo

**Abstract:** We develop the characterization of the dynamics at the noise-perturbed edge of chaos in **logistic...** [More](#)

Submitted 10 October, 2005; v1 submitted 1 April, 2005; originally announced April 2005.

Comments: Revised version with substantial improvements. Revtex, 8 pages, 11 figures

Journal ref: Phys. Rev. E (Ibf 72), 066213 (2005)

7. arXiv:cond-mat/0501398 [pdf, ps, other] [cond-mat.stat-mech](#) [nlin.CD](#) [doi](#) 10.1007/3-540-32023-7\_19

**A recent appreciation of the singular dynamics at the edge of chaos**

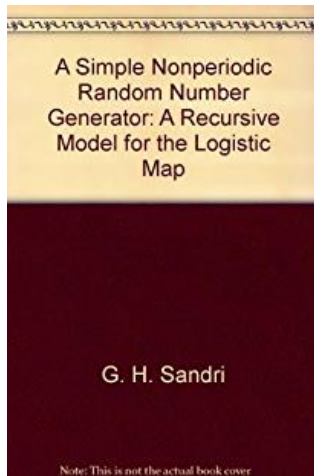
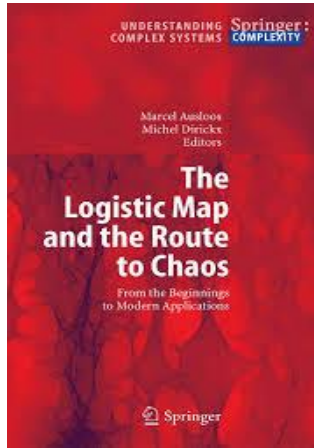
**Authors:** E. Mayoral, A. Robledo

**Abstract:** We study the dynamics of iterates at the transition to chaos in the **logistic map** and find that it is constituted by an infinite family of Mori's  $q$ -phase transitions. Starting from Feigenbaum's  $\sigma$  function for the diameters ratio, we determine the atypical weak sensitivity to initial conditions  $\xi_t$  associ... [More](#)

Submitted 17 January, 2005; originally announced January 2005.

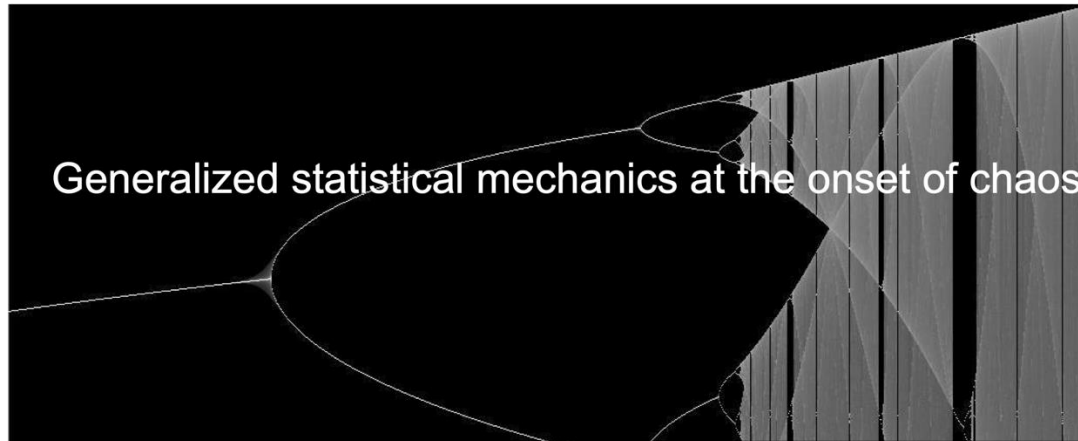
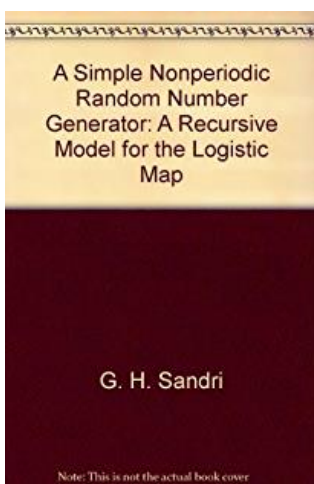
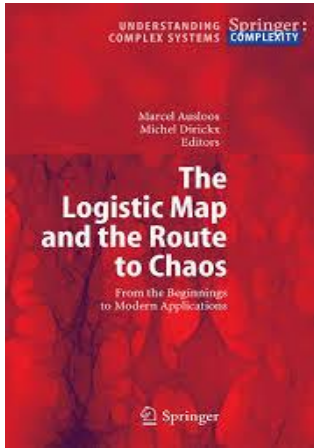


A. Robledo



G. H. Sandri

Note: This is not the actual book cover



A. Robledo

Alberto Robledo  
LATIN-AMERICAN SCHOOL AND CBP

**Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis**

**LEGGE DI POTENZA**  $\delta=200$   $n=20$   $(q=1.7, \beta=4)$

**q-GAUSSIANA**

**Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs**

**ESPONENZIALE**  $\delta=3000$   $n=20$

**GAUSSIANA**

# MAPPA LOGISTICA: L'EQUAZIONE CHE CAMBIERA' IL MODO IN CUI GUARDATE IL MONDO!

YouTube IT

Cerca



$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n)$$



0:14 / 18:38



This equation will change how you see the world (the logistic map)

10.082.901 visualizzazioni • 29 gen 2020

443.834

6385

CONDIVIDI

SALVA

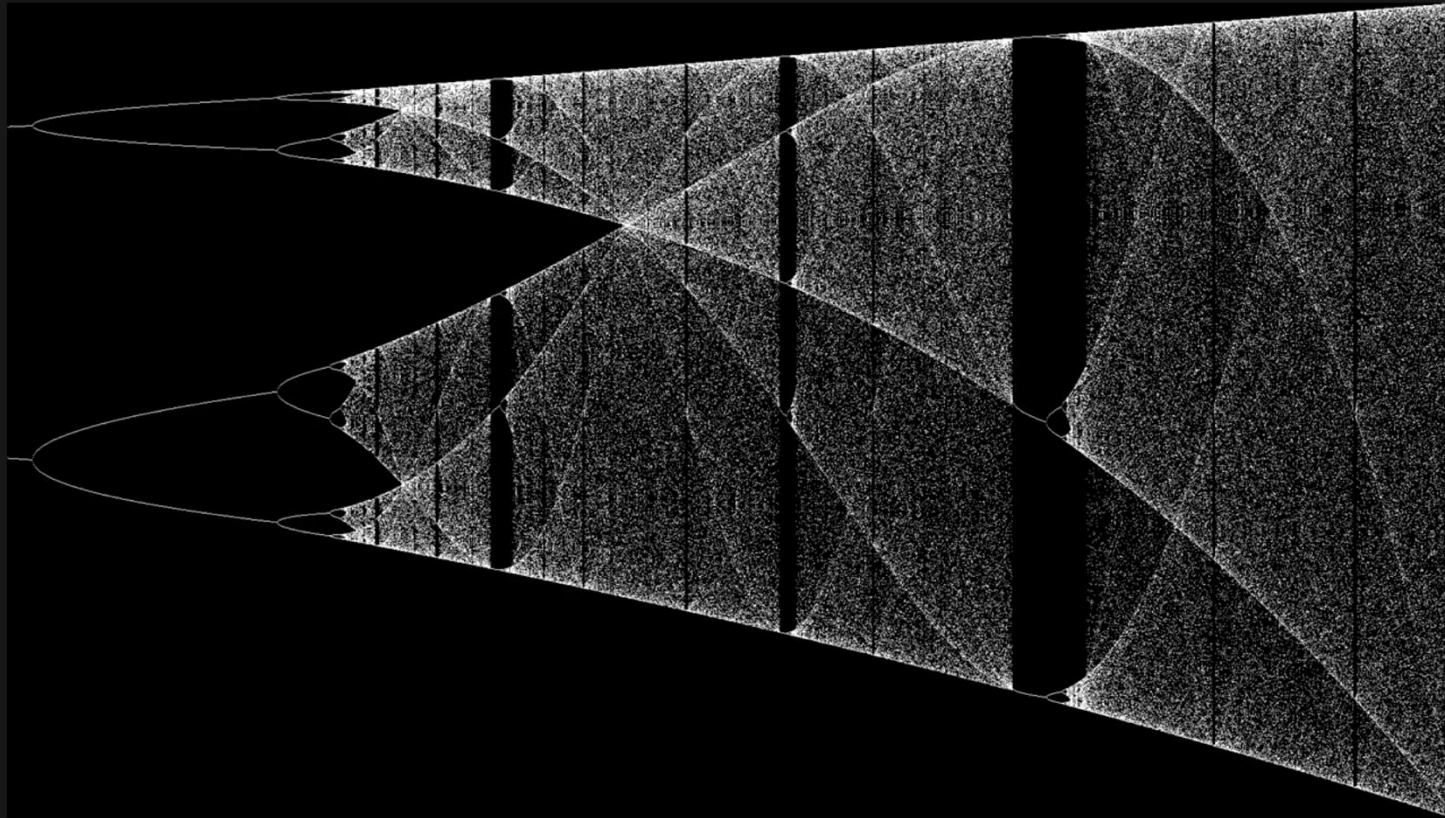


<https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk>

# IL SUONO DELLA MAPPA LOGISTICA

YouTube IT

Cerca



The Sound of the Logistic Map

12.859 visualizzazioni • 13 feb 2020

👍 535

💬 6

➦ CONDIVIDI

≡+ SALVA



<https://www.youtube.com/watch?v=owq6xCFDbDQ>