

# Classificazione dei Sistemi Dinamici

## Sistemi dinamici continui (Flussi)

$$\dot{X} = f(X)$$

Flussi Dissipativi

Flussi Hamiltoniani

Attrattori

Orbite

1D

Punto  
fisso

2D  
Ciclo  
Limite

3D

Caotici

Periodiche

Quasi  
Periodiche

Caotiche

## Sistemi dinamici discreti (Mappe)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Mappe Dissipative

Mappe Conservative  
(area-preserving)

Attrattori

Orbite

1D,2D

Punto  
fisso

Ciclo  
Limite

Caotici

Periodiche

Quasi  
Periodiche

Caotiche

# **Mappe dissipative unidimensionali: la Mappa Logistica**

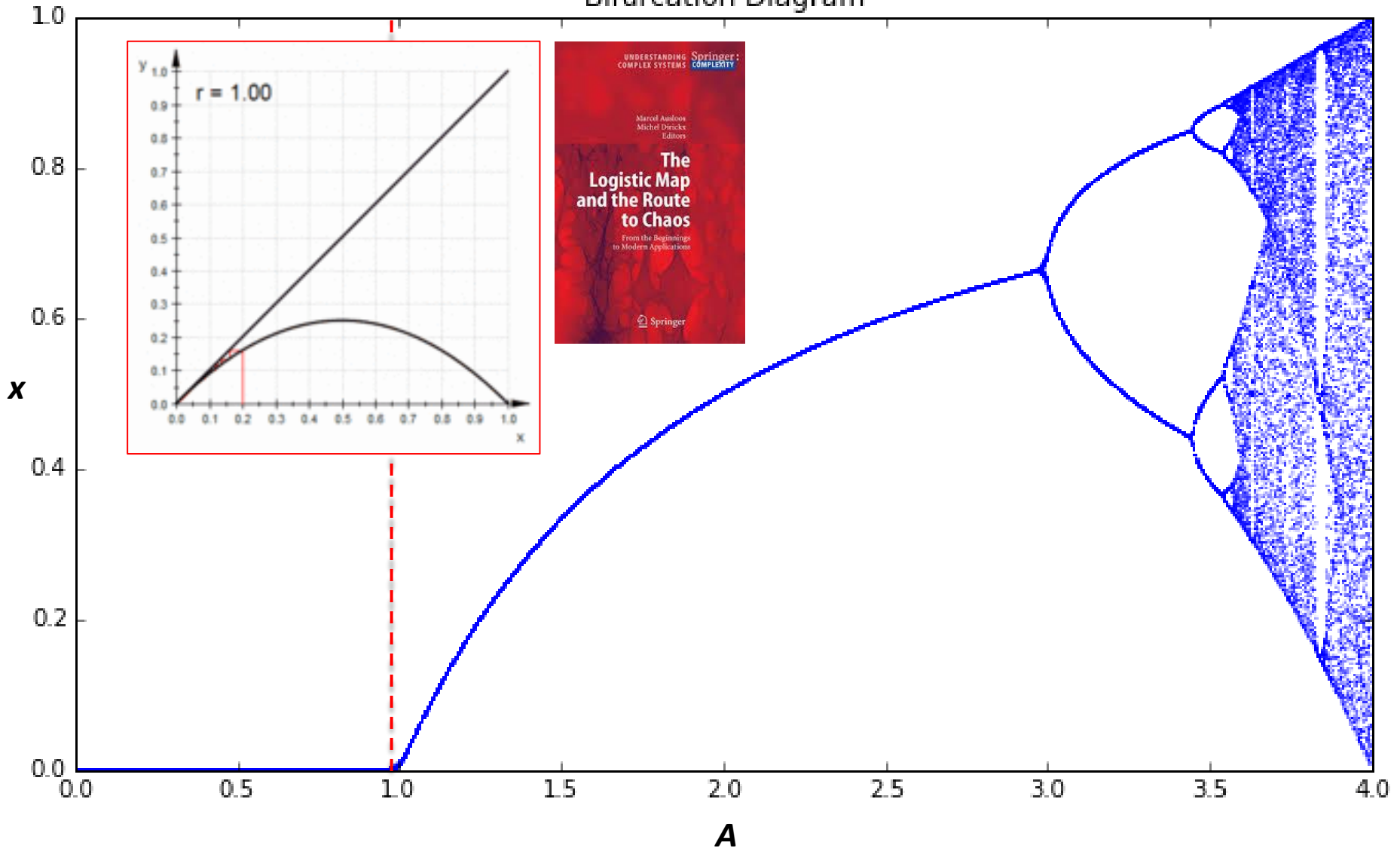


**Robert M. May**  
**1976**

# Tipologie di attrattori nella Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

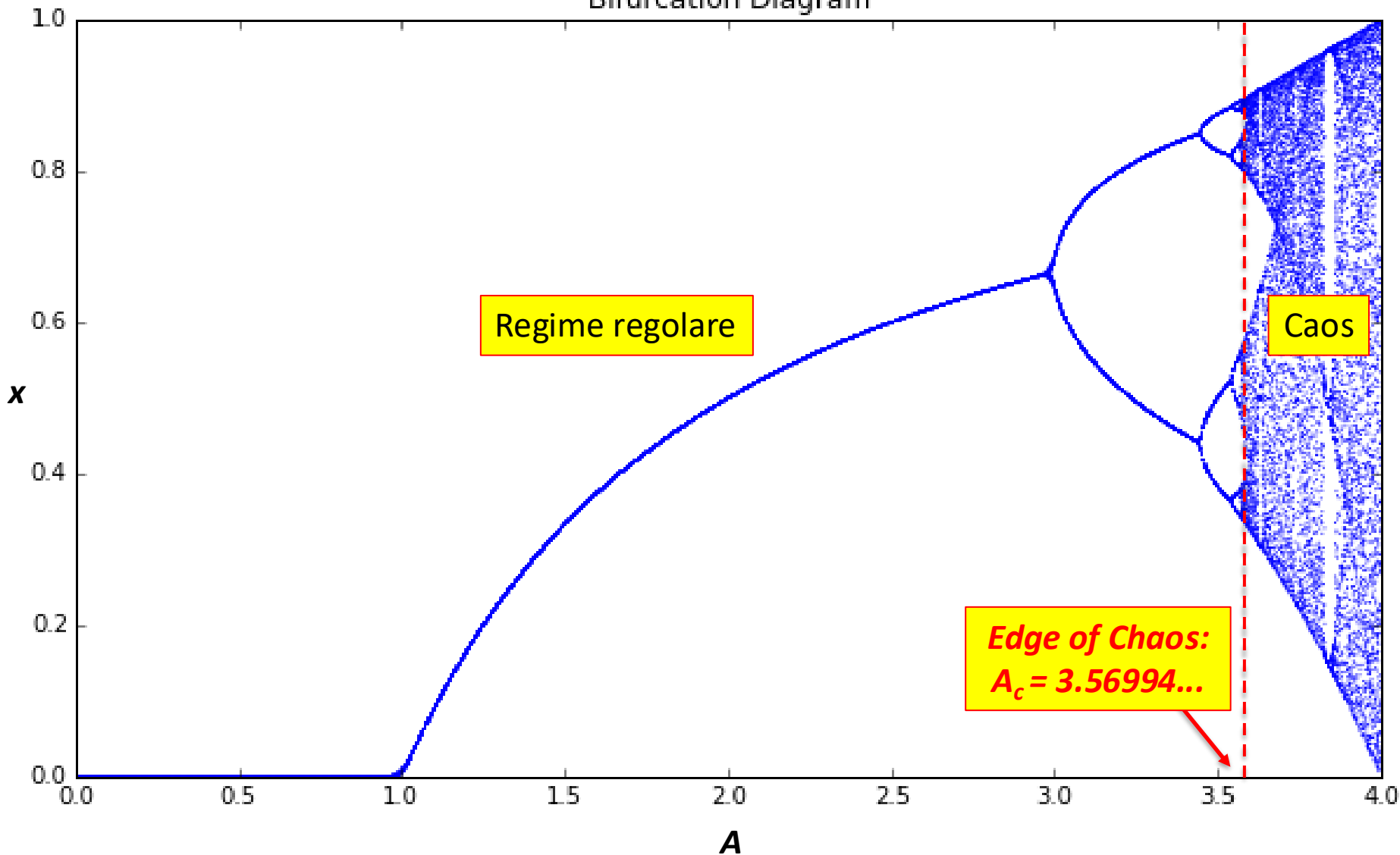
Bifurcation Diagram



# Tipologie di attrattori nella Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

Bifurcation Diagram



# Quantificare il caos dinamicamente: l'Esponente di Lyapunov

## REGIME CAOTICO E SENSIBILITA' ALLE CONDIZIONI INIZIALI

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\lambda t},$$



$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

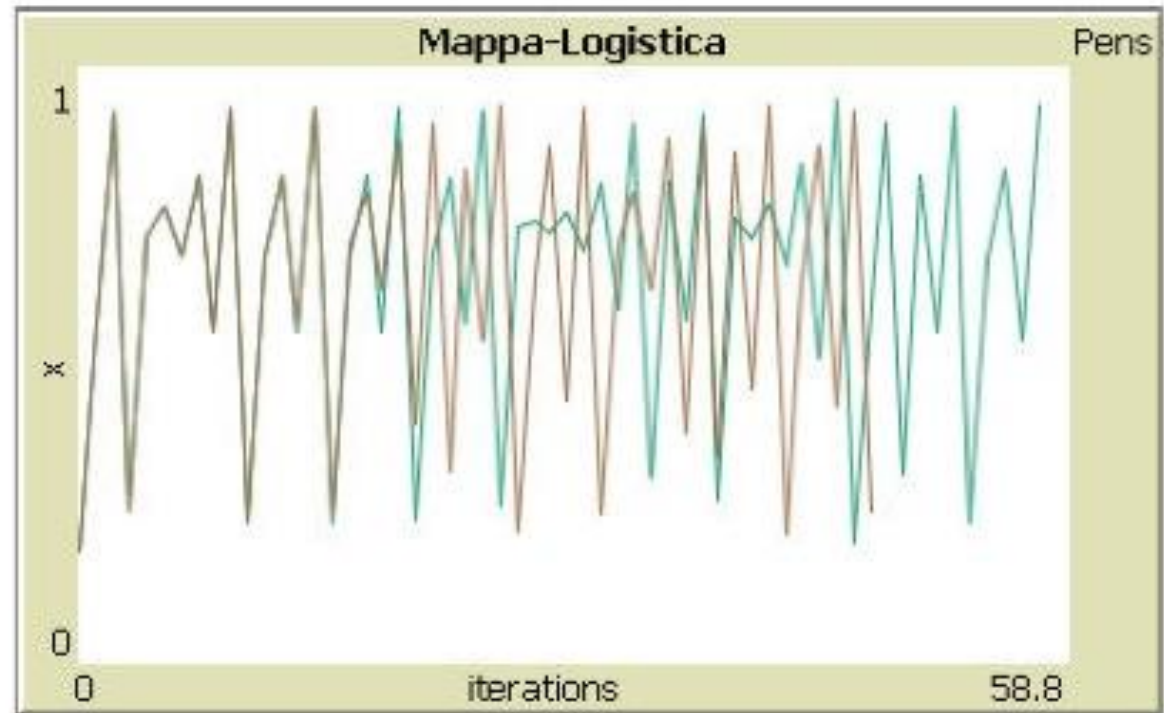


Figura 1.9: Un esempio della sensibilità alle condizioni iniziali delle traiettorie della mappa logistica nel regime caotico: le due traiettorie mostrate in figura sono state ottenute per  $A = 3.78$  e per due diversi valori di  $x_0$ , precisamente 0.18450 e 0.18451. Si vede chiaramente che le traiettorie iniziano a divergere dopo circa 17 iterazioni.

# Quantificare il caos dinamicamente: l'Esponente di Lyapunov

```
set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
clear-plot
set-current-plot-pen "line"
plotxy 0 0 plotxy 100000 0
set-current-plot-pen "default"
set-plot-x-range starting-A final-A
set-plot-y-range -4 1
```



```
let llyapunov 0
set A1 starting-A
let passo ((final-A - starting-A) / 300)
repeat 300
```

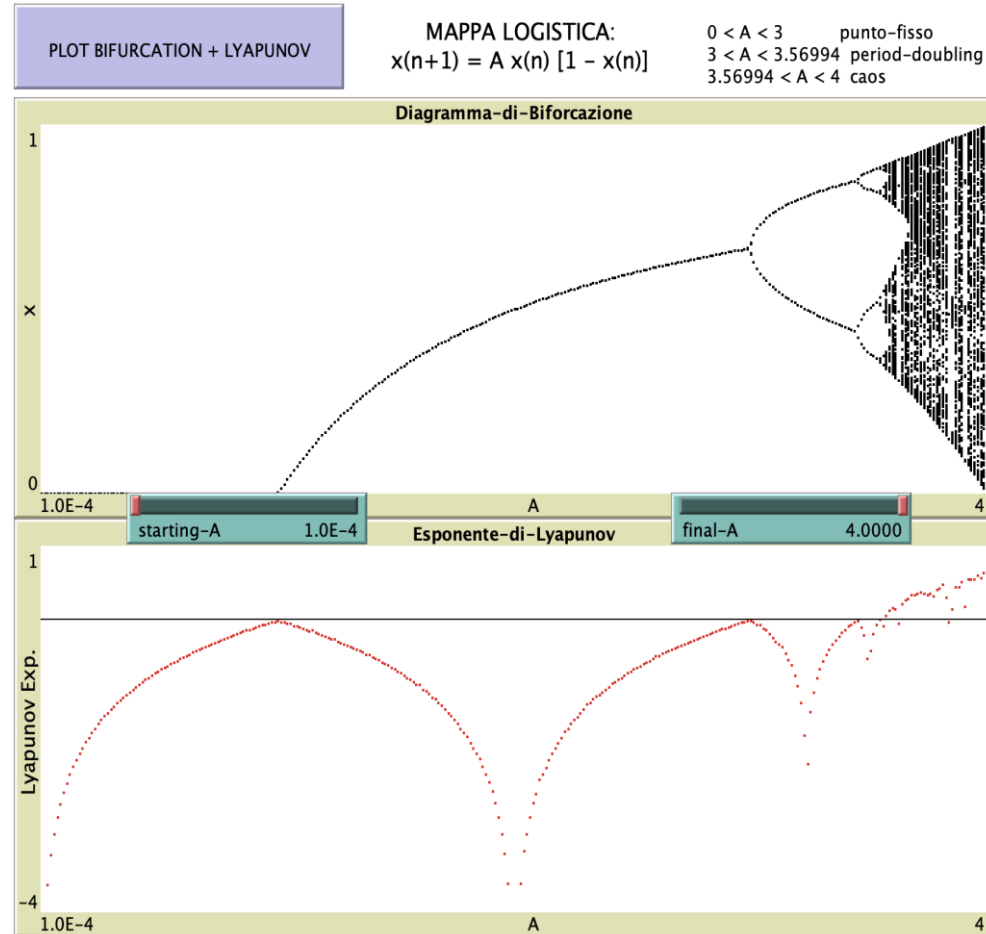
```
set-current-plot "Diagramma-di-Biforcazione"
set-current-plot-pen "default"
```

```
let ll-sum 0
set cont 1
set x random-float 1
repeat 200
[
set x (A1 * x * (1 - x))
set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
set llyapunov (ll-sum / cont)
set cont (cont + 1)
]
```

```
repeat 200
[
set x (A1 * x * (1 - x))
plotxy A1 x
set ll-sum (ll-sum + (ln(abs(A1 - 2 * A1 * x))))
set llyapunov (ll-sum / cont)
set cont (cont + 1)
]
```

```
set-current-plot "Esponente-di-Lyapunov"
```

```
plotxy A1 llyapunov
set A1 (A1 + passo)
```



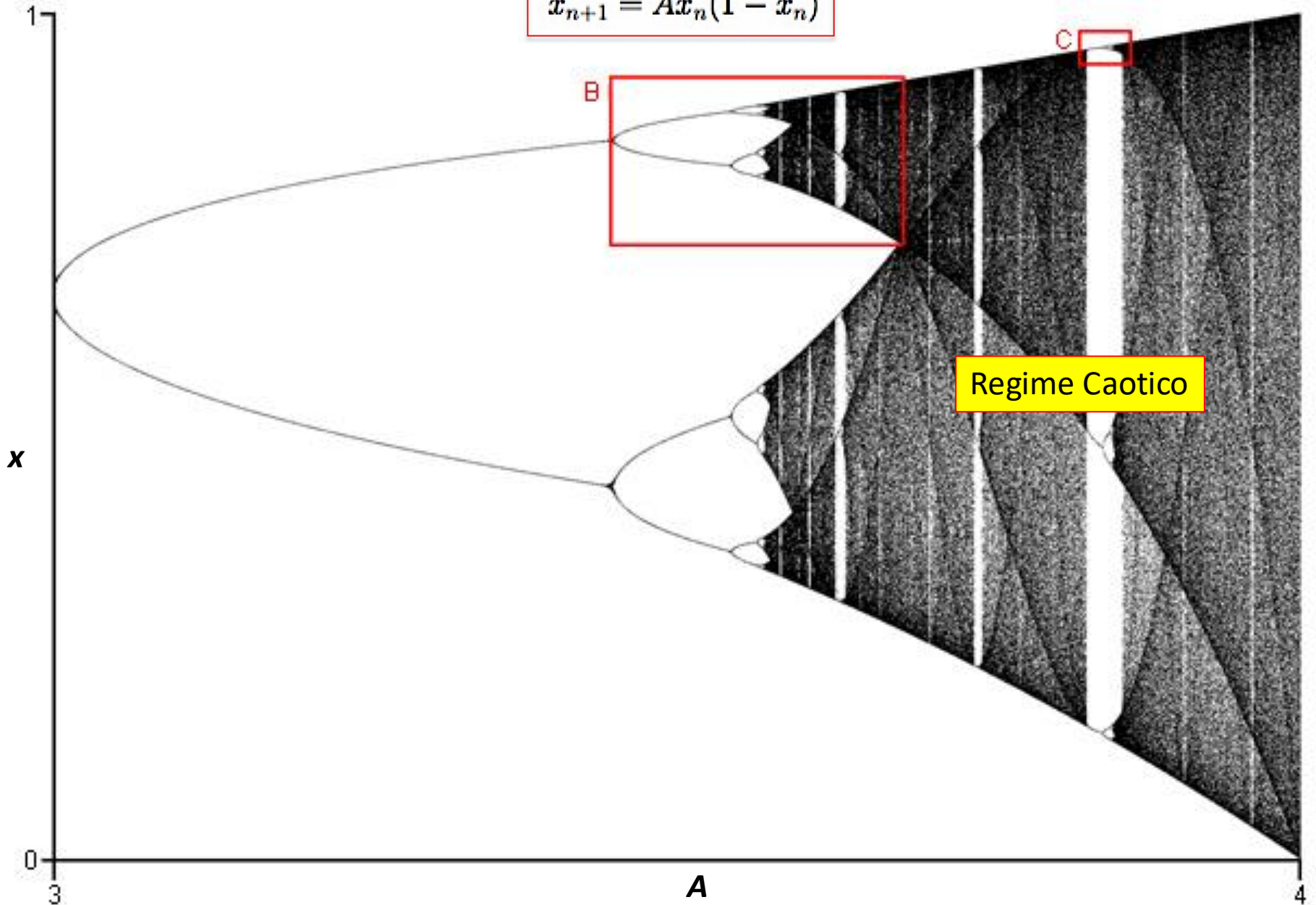
$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

$$f(x) = Ax(1-x) \quad \square \quad f'(x) = A - 2Ax$$

mappa-Logistica-Bifurcation+Lyapunov.nlogo

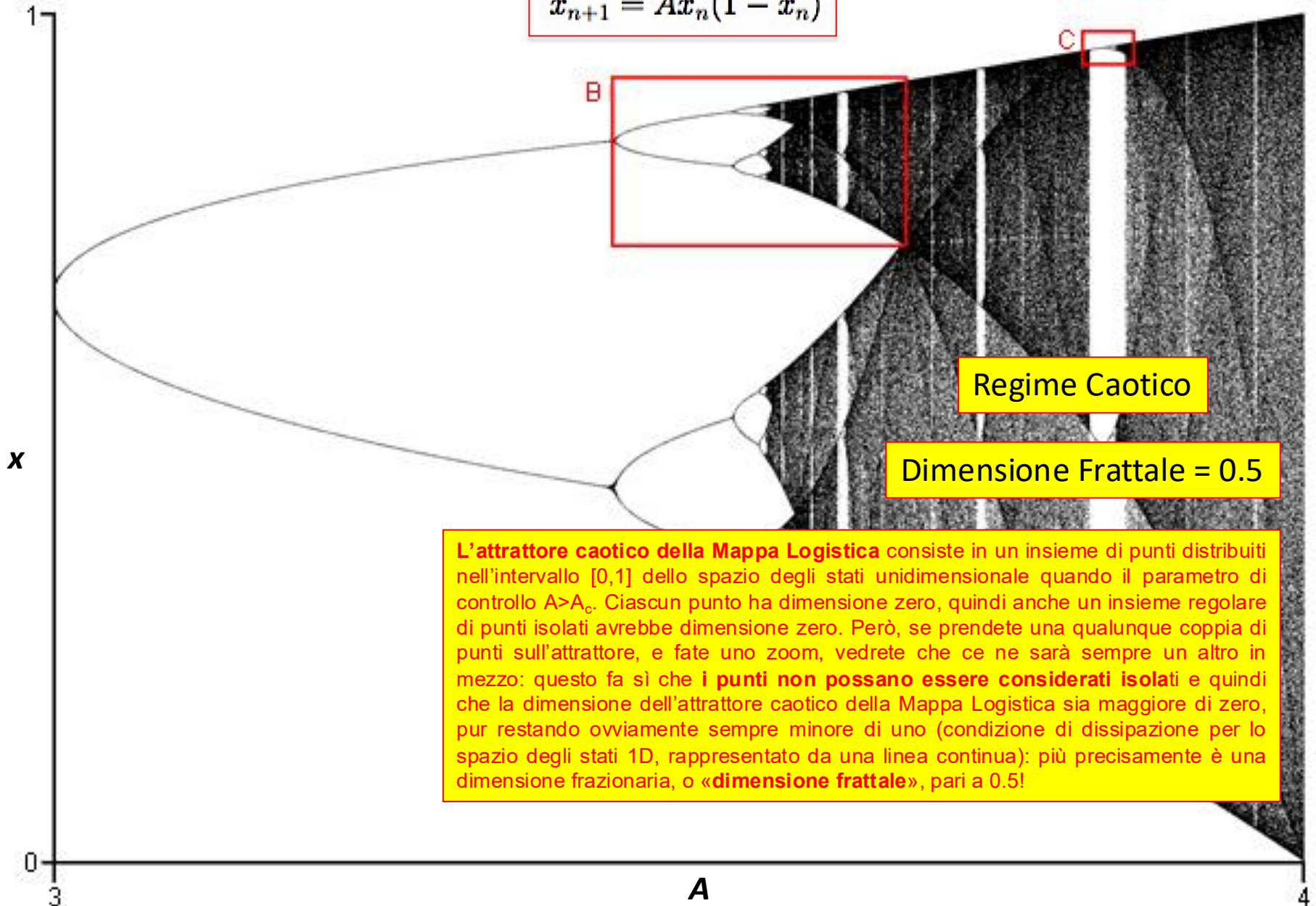
# Autosimilarità e caos nella Mappa Logistica

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$



# Quantificare il caos geometricamente: la Dimensione Frattale

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$



L'attrattore caotico della Mappa Logistica consiste in un insieme di punti distribuiti nell'intervallo  $[0,1]$  dello spazio degli stati unidimensionale quando il parametro di controllo  $A > A_c$ . Ciascun punto ha dimensione zero, quindi anche un insieme regolare di punti isolati avrebbe dimensione zero. Però, se prendete una qualunque coppia di punti sull'attrattore, e fate uno zoom, vedrete che ce ne sarà sempre un altro in mezzo: questo fa sì che i **punti non possano essere considerati isolati** e quindi che la dimensione dell'attrattore caotico della Mappa Logistica sia maggiore di zero, pur restando ovviamente sempre minore di uno (condizione di dissipazione per lo spazio degli stati 1D, rappresentato da una linea continua): più precisamente è una dimensione frazionaria, o «**dimensione frattale**», pari a 0.5!

# Mappe dissipative bidimensionali: la Mappa di Hénon



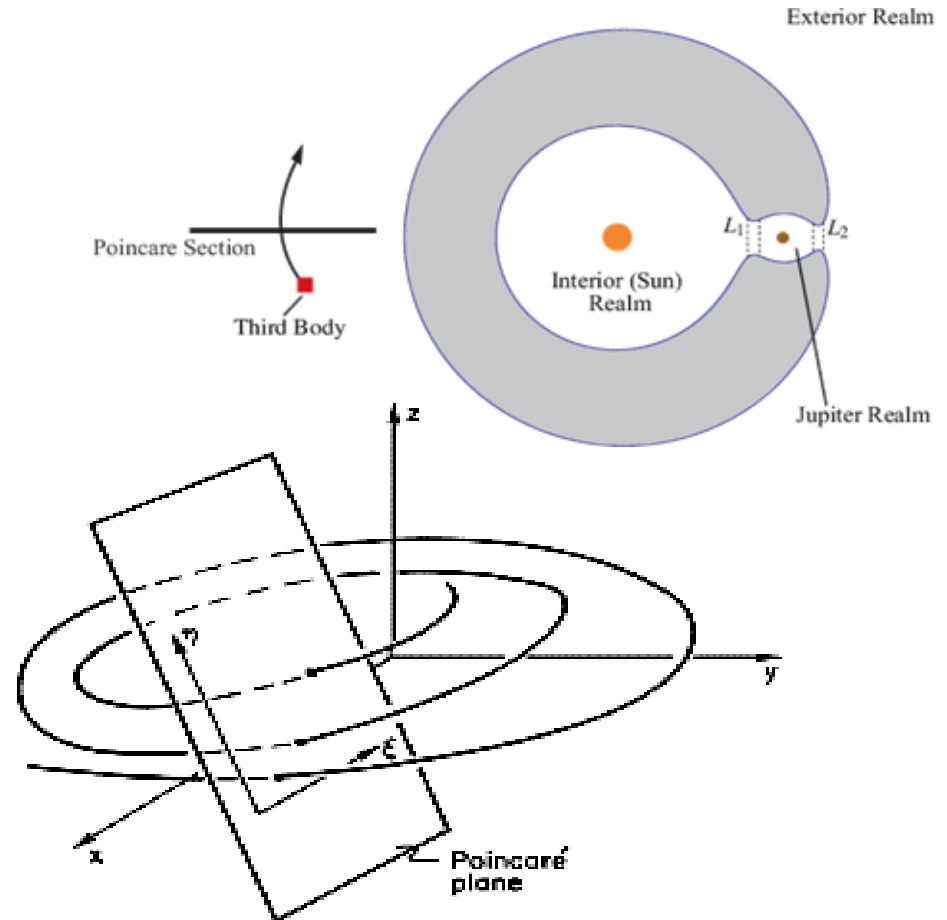
Michel Hénon  
1976

# Reminder: la Mappa di Poincaré 2D



Nel **1887**, cercando di risolvere il problema dei tre corpi e studiare la stabilità a lungo termine del sistema solare, il giovane Henri Poincaré introdusse il metodo oggi noto come «**sezione di Poincaré**» allo scopo di studiare la stabilità dell'orbita periodica di un **piccolo asteroide** lanciato nel campo gravitazionale del sistema formato, ad esempio, da Giove e dal Sole.

In pratica, invece di seguire la traiettoria dell'asteroide nello spazio tridimensionale, immaginò di “**tagliare**” **trasversalmente quella traiettoria con un piano bidimensionale** – pensate ad esempio ad un enorme foglio di carta di dimensioni analoghe a quelle dell'orbita dell'asteroide – e di esaminare il **comportamento nel tempo dei punti di intersezione della traiettoria con quel piano**, come fossero dei piccoli fori prodotti dall'asteroide ogni volta che attraversa il foglio di carta mentre percorre la sua orbita nel sistema Giove-Sole.



# Reminder: la Mappa di Poincaré 2D



Nel **1887**, cercando di risolvere il problema dei tre corpi e studiare la stabilità a lungo termine del sistema solare, il giovane Henri Poincaré introdusse il metodo oggi noto come «**sezione di Poincaré**» allo scopo di studiare la stabilità dell'orbita periodica di un **piccolo asteroide** lanciato nel campo gravitazionale del sistema formato, ad esempio, da Giove e dal Sole.

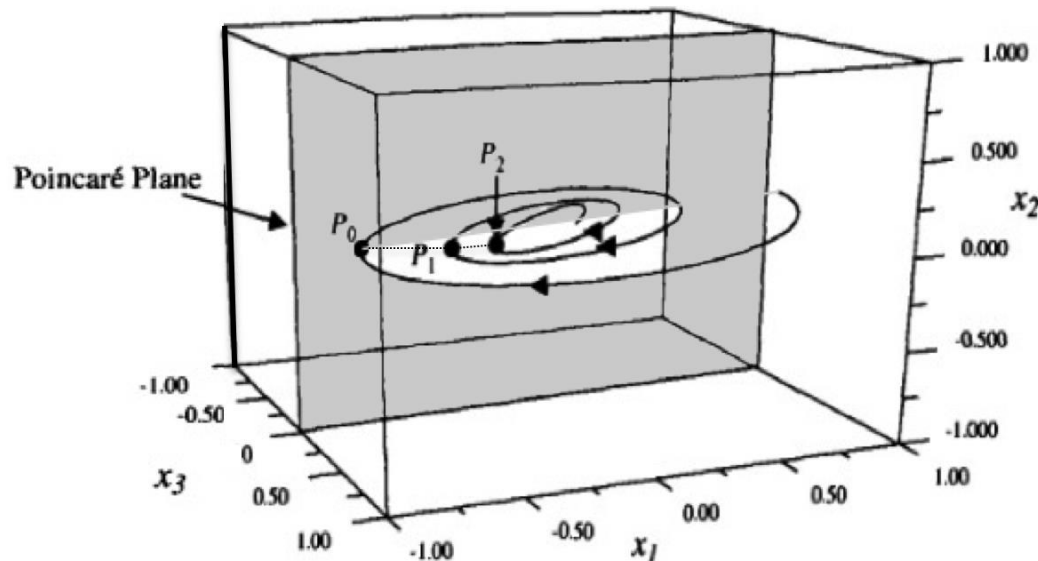
**Equazioni  
generiche di una  
mappa 2D:**

$$x_1^{(n+1)} = F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$$

$$x_2^{(n+1)} = F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$$

(4.6-1)

where the parenthetical superscript indicates the crossing point number.



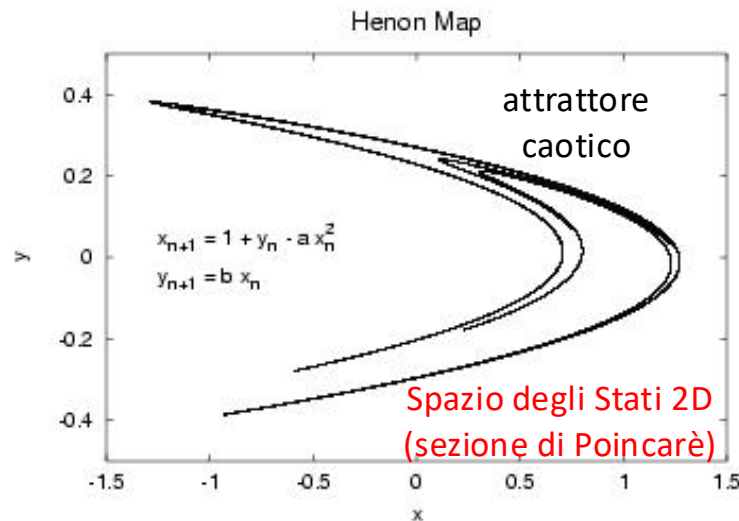
# La Mappa di Hénon

La mappa di Hénon [1], introdotta per la prima volta da Michel Hénon nel 1976 (lo stesso anno in cui May presentava su Nature il suo studio sulla mappa logistica), é un sistema dinamico discreto dissipativo in due variabili caratterizzato dalle seguenti equazioni accoppiate:

$$x_{n+1} = \cancel{x_n} + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = B\cancel{x_n} \quad (1.1)$$

dove  $B$  e  $C$  sono due parametri di controllo, entrambi positivi. Si vede subito che per  $B = 0$  la mappa di Hénon si riduce ad una mappa quadratica unidimensionale, nella cui classe di universalità rientra la mappa logistica. Per questo motivo la mappa di Hénon può essere considerata la generalizzazione bidimensionale (cioè a due gradi di libertà) della logistica. Vediamo subito come implementare lo studio di questa mappa in ambiente Netlogo, dopodiché utilizzeremo quanto appreso per introdurre un nuovo e fondamentale concetto, quello di 'dimensione frattale'.

Michel Hénon  
(1931-2013)



Hénon era un astronomo e osservò che, per determinati valori di energia, le intersezioni tra le orbite degli oggetti celesti ed un ipotetico piano trasversale (sezione di Poincaré 2D) davano luogo a distribuzioni di punti isolati, mentre, per energie più elevate, tali intersezioni diventavano delle linee continue, corrispondenti ad orbite caotiche.

# DOWNLOADING NETLOGO: <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>



Products

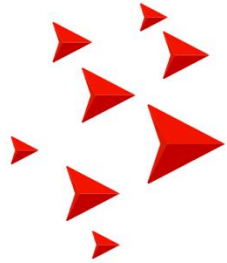
Documentation

Learn

Community

About

Donate



# NetLogo

Simulate, Explore, Understand

Powerful yet easy-to-learn environment for agent-based modeling in both research and education.

GET NETLOGO

Donate

100% Free

Understanding Emergence

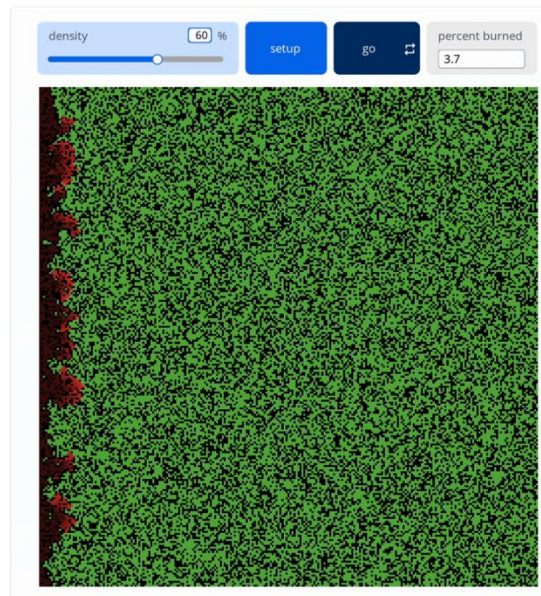
Scientific Research

Learning

Teaching

Intuitive Code

NetLogo is designed to model emergent phenomena in which large-scale patterns arise from the interactions of many individuals.



# DOWNLOADING NETLOGO: <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>



Products

Documentation

Learn

Community

About

Donate

## Get NetLogo

There are five different products in NetLogo. Find the one that suits your need.



### NetLogo

A programmable modeling environment for simulating natural and social phenomena that runs on Mac, Windows, and Linux. This is the most powerful version of NetLogo.

Download

**Scegliete la versione**



### NetLogo Web

A version of NetLogo that runs in all modern web browsers, without any need for installation. Very useful for embedding in online educational materials.

Use Online



### Turtle Universe

Powered by the NetLogo engine but with its own unique interface, Turtle Universe brings the limitless power of computational modeling to smartphones and tablets of young students and educators.

Download



### NetTango

A block-based interface for NetLogo for creating educational models with domain-specific programming blocks.

Use Online



### HubNet Web

An online platform for creating and running participatory simulations in which people can play the role of agents in a NetLogo model.

Use Online

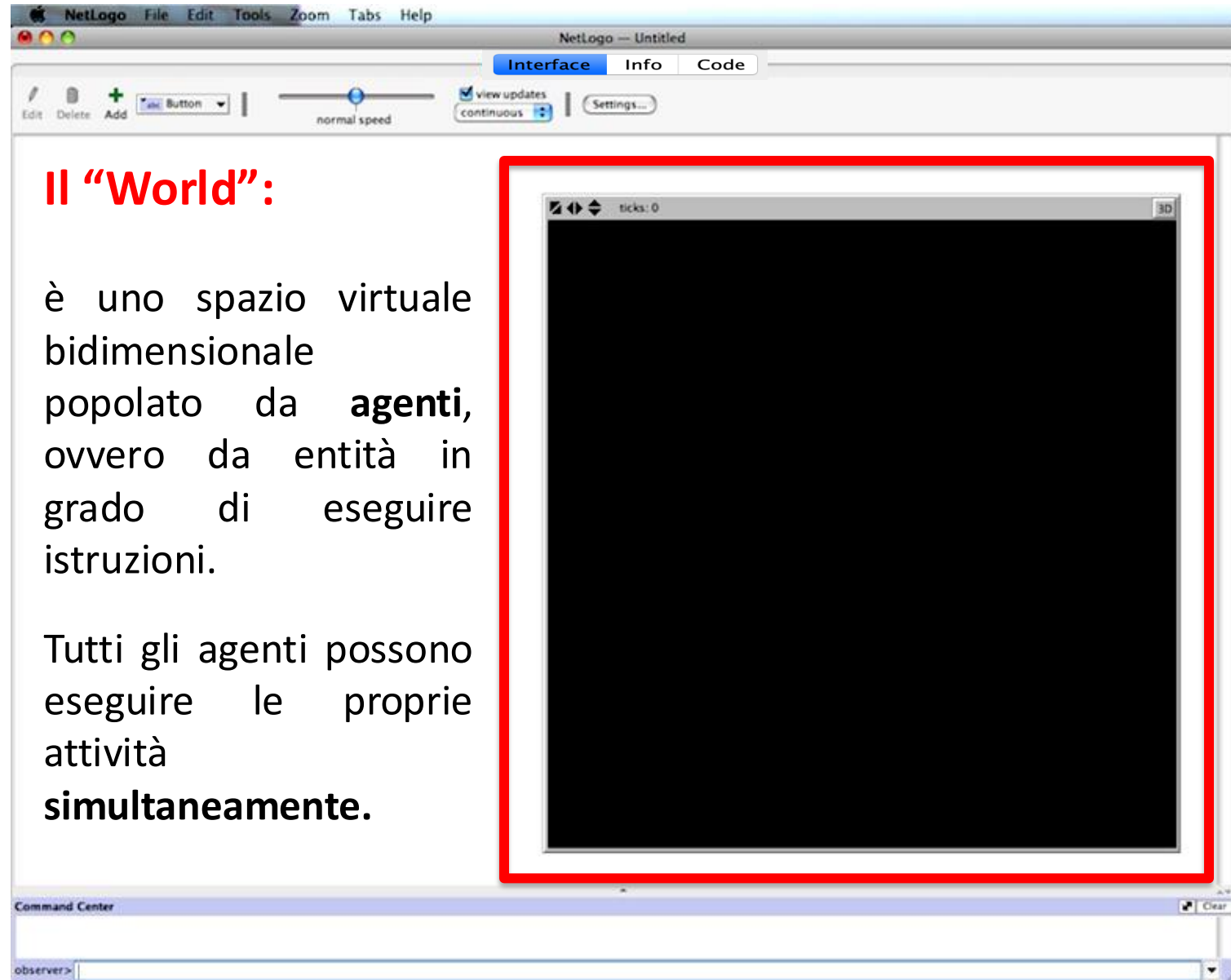
## NetLogo Download Archive

Archive of previous NetLogo versions. See [release notes](#) for details on version differences. Click on any version to go to its download page. (Mac OS X users wanting to use NetLogo versions prior to 5.0.4, please [read this](#))

Show Beta Versions  Show Milestone Versions  Show Release Candidates  Show Revision Versions

- [NetLogo 7.0.2](#) Latest Invalid Date
- [NetLogo 7.0.1](#) Invalid Date
- [NetLogo 7.0.0](#) Invalid Date
  - New modernized GUI with light, dark, and classic modes
  - New .nlogox XML file format for better extensibility
  - Enhanced widget tools for easier model authoring
  - Improved customization with more preferences and settings
- [NetLogo 6.4.0](#) **Versione consigliata** Invalid Date
  - Major BehaviorSpace upgrade with full experiments, conditional measurements, and pause/resume capabilities.
- [NetLogo 6.3.0](#) Invalid Date
  - Upgraded from Java 8 to Java 17 for improved performance and security.
- [NetLogo 6.2.2](#) Invalid Date
- [NetLogo 6.2.1](#) Invalid Date
- [NetLogo 6.2.0](#) Invalid Date
  - Pop-out code tab for side-by-side view
  - Time extension now bundled
  - View2.5D extension significantly upgraded
- [NetLogo 6.1.1](#) Invalid Date
- [NetLogo 6.1.0](#) Invalid Date
  - Extension Manager for easy installation and updates
  - Python extension now bundled

# NetLogo 6.4.0: prima apertura



The screenshot shows the NetLogo 6.4.0 application window. The title bar reads "NetLogo -- Untitled". The menu bar includes "File", "Edit", "Tools", "Zoom", "Tabs", and "Help". The interface has three tabs: "Interface" (selected), "Info", and "Code". The toolbar contains icons for "Edit", "Delete", "Add", a "Button" dropdown, a "normal speed" slider, a "view updates" checkbox, a "continuous" dropdown, and a "Settings..." button. The main workspace is a large black rectangle, which is highlighted with a red border. The top-left corner of this workspace shows "ticks: 0" and a "3D" button. At the bottom, there is a "Command Center" area with a "Clear" button and a text input field containing "observer>".

## Il "World":

è uno spazio virtuale bidimensionale popolato da **agenti**, ovvero da entità in grado di eseguire istruzioni.

Tutti gli agenti possono eseguire le proprie attività **simultaneamente**.

# Le principali Categorie di Agenti in NetLogo

## Turtles

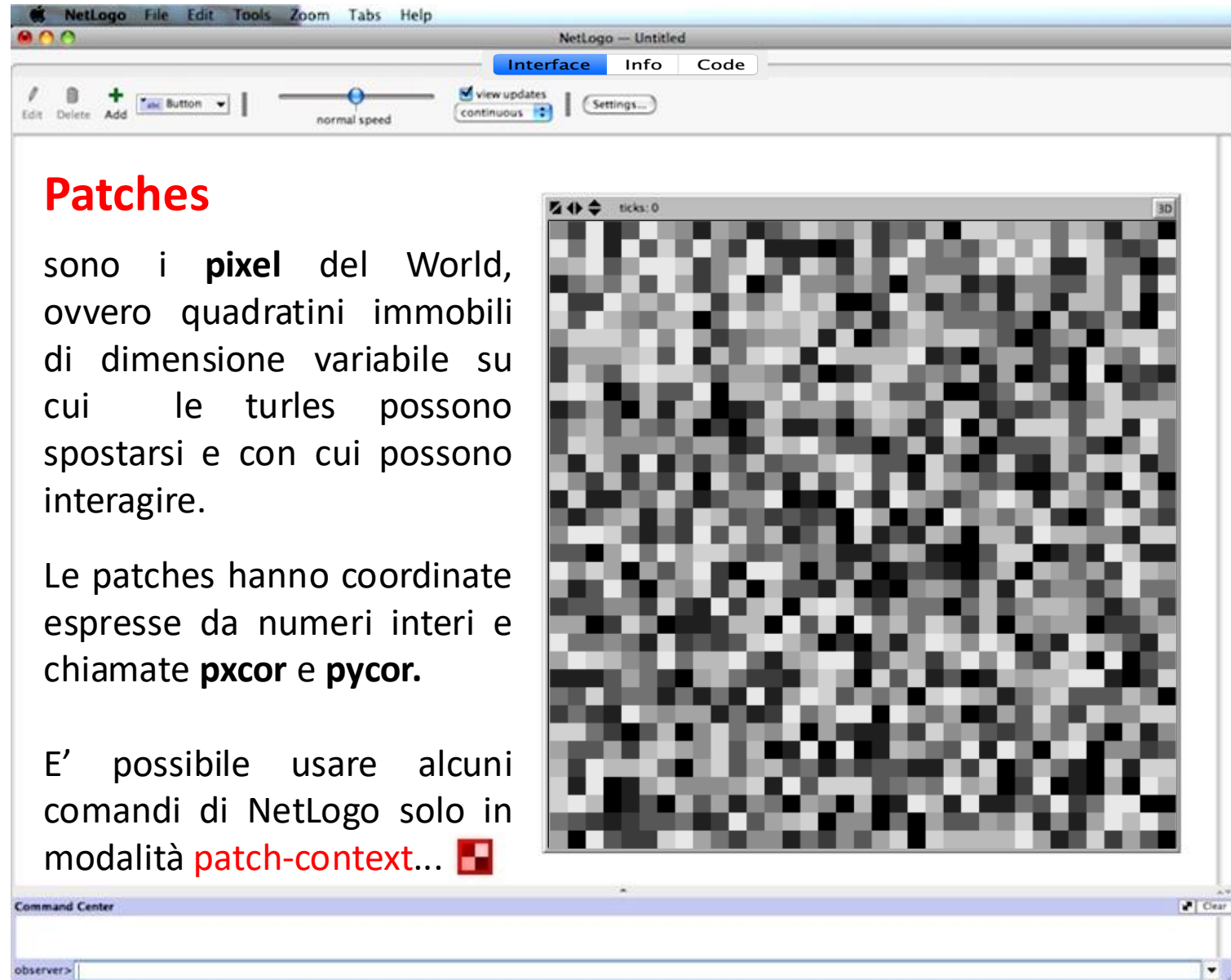
sono agenti in grado di muoversi all'interno del World.

Ogni turtle ha due coordinate **xcor** e **ycor** (numeri reali) e può cambiare **forma** e **colore**.

E' possibile usare alcuni comandi di NetLogo solo in modalità **turtle-context**.. 🐢



# Le principali Categorie di Agenti in NetLogo




The screenshot shows the NetLogo application window. At the top, there is a menu bar with 'File', 'Edit', 'Tools', 'Zoom', 'Tabs', and 'Help'. Below the menu bar is a toolbar with buttons for 'Edit', 'Delete', 'Add', and a 'Button' dropdown. A slider for 'normal speed' and a 'view updates continuous' checkbox are also present. The main window is titled 'NetLogo -- Untitled' and has three tabs: 'Interface', 'Info', and 'Code'. The 'Interface' tab is active, showing a 3D view of a world filled with patches. The patches are represented as a grid of small squares in various shades of gray and black. The 3D view has a 'ticks: 0' label and a '3D' button. At the bottom, there is a 'Command Center' with a 'Clear' button and a text input field containing 'observer>'.

## Patches

sono i **pixel** del World, ovvero quadratini immobili di dimensione variabile su cui le turtles possono spostarsi e con cui possono interagire.

Le patches hanno coordinate espresse da numeri interi e chiamate **pxcor** e **pycor**.

E' possibile usare alcuni comandi di NetLogo solo in modalità **patch-context...** 

# Esempi di variabili proprietarie

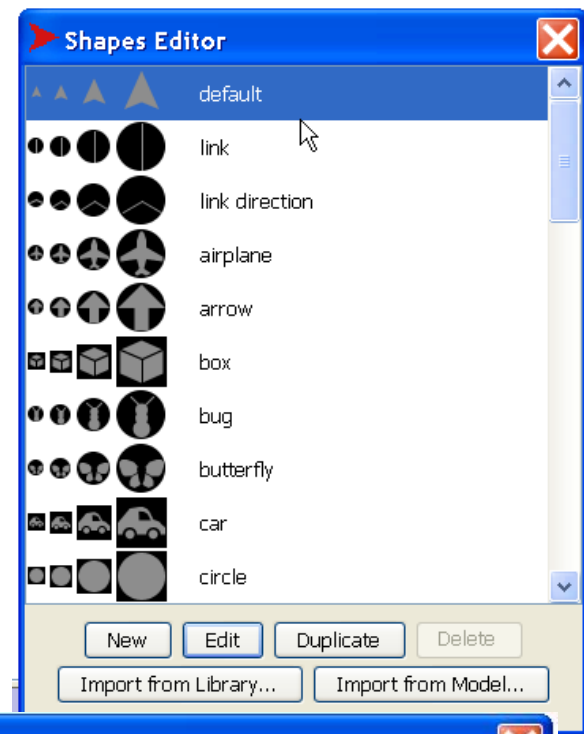
## turtles-own

who  
xcor, ycor  
heading  
color  
shape  
size  
label  
turtles-own [var1 var2 ...]

## breeds-own

breed [boxes]  
breed [cars]

## agentset



## patches-own

pxcor, pycor  
pcolor  
plabel  
plabel-color  
patches-own [pvar1 pvar2 ...]



# Mappa-Henon.nlogo

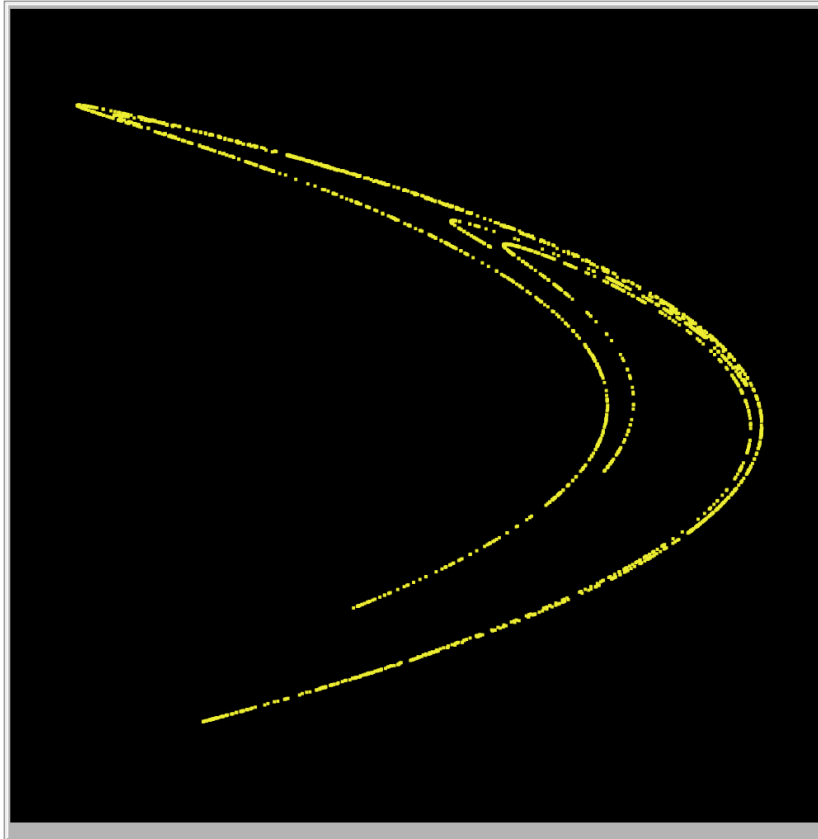
Interface Info Code

Edit Delete Add

normal speed  view updates ticks: continuous Settings...

MAPPA DI HENON

$$x(n+1) = y(n) + 1 - C x(n)^2$$
$$y(n+1) = B x(n)$$



iteration 191

count points 2000

iteration 191

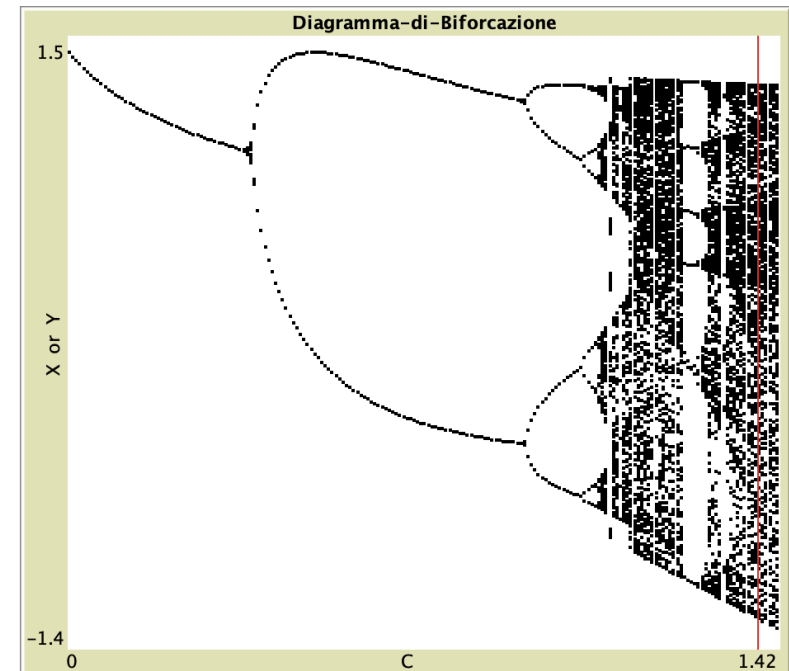
count points 2000

variable x

N 2000

B 0.30

C 1.377



x-range 1.50

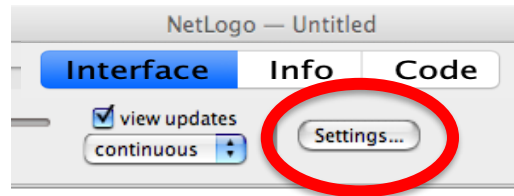
x

y-range 0.50

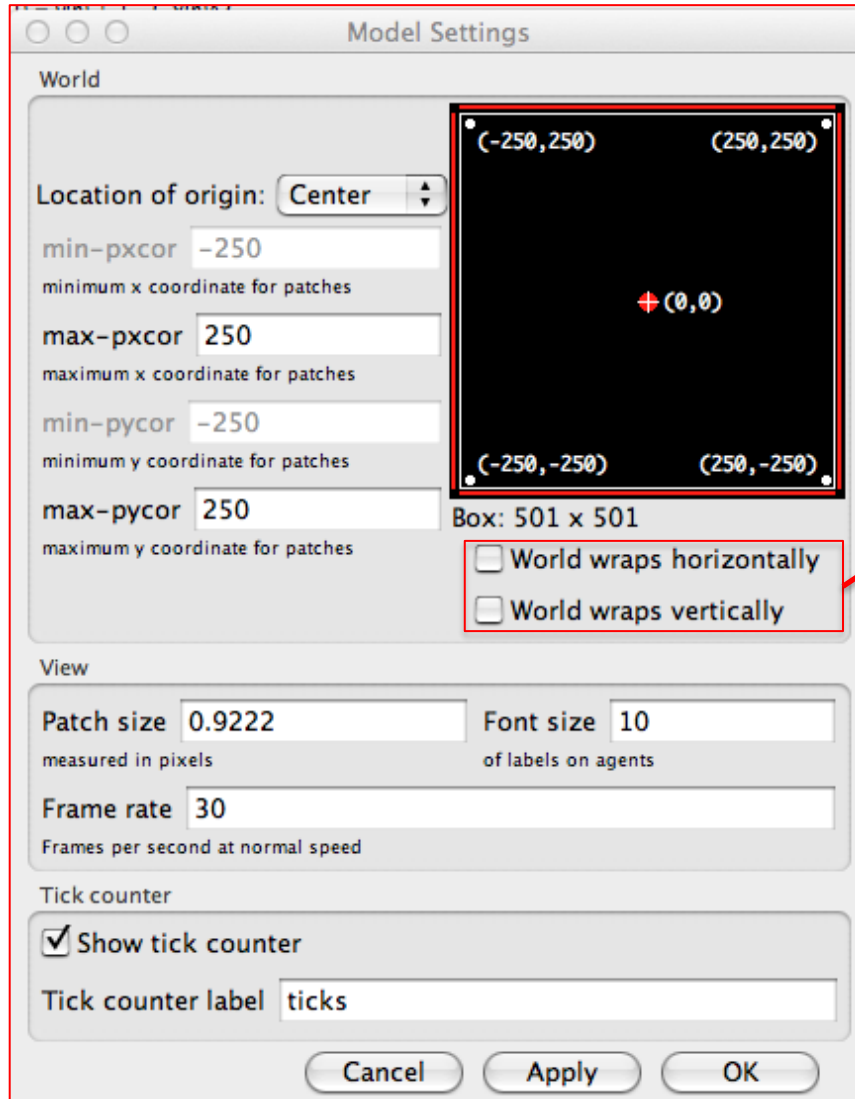
starting-C 0.000

final-C 1.420

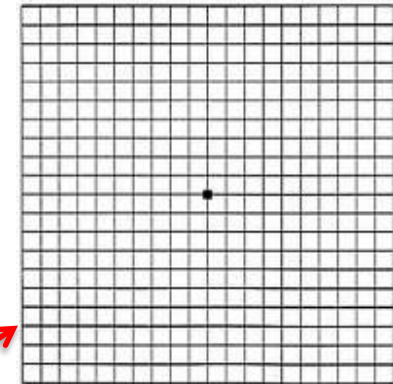
# Mappa-Henon.nlogo



## World Settings



closed boundary conditions



# Mappa-Henon.nlogo

Interface Info Code

```
globals [ C1 itime ]
breed [ mappe mappa]
mappe-own [ x y ]
```

to SETUP

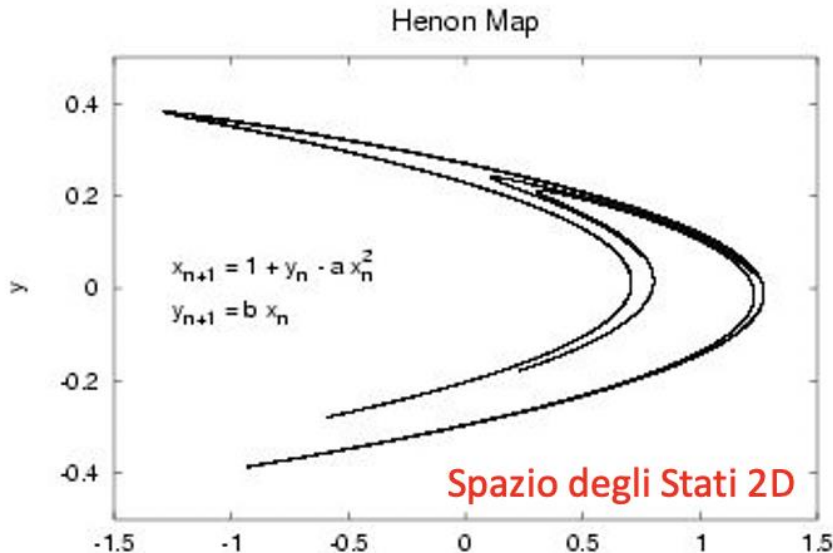
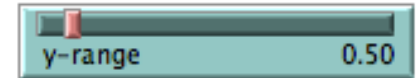
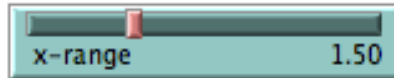
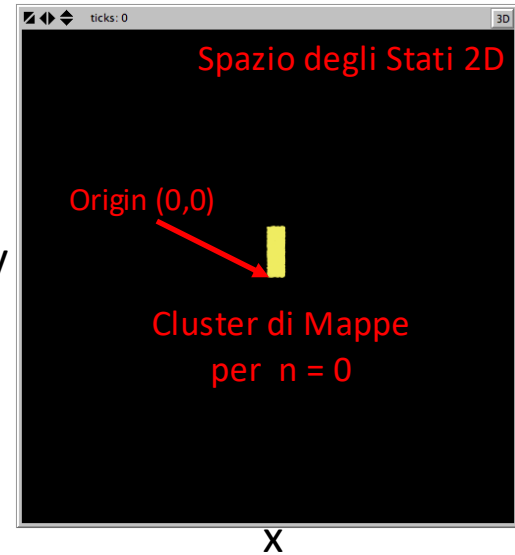
```
ca
set itime 0
set-default-shape mappe "dot"
create-mappe N
[
set size 2 set color yellow
set x (random-float 0.1)
set y (random-float 0.1)
setxy ((x / x-range) * max-pxcor) ((y / y-range) * max-pycor)
]
```

do-bifurcation

end



Interface Info Code



$$x_{n+1} = y_n + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = Bx_n$$

# Mappa-Henon.nlogo

Interface Info Code

```
globals [ C1 itime ]  
breed [ mappe mappa ]  
mappe-own [ x y ]
```

to SETUP

```
ca  
set itime 0  
set-default-shape mappe "dot"  
create-mappe N  
[  
  set size 2 set color yellow  
  set x (random-float 0.1)  
  set y (random-float 0.1)  
  setxy ((x / x-range) * max-pxcor) ((y / y-range) * max-pycor)  
]
```

do-bifurcation

end

to GO

```
set itime (itime + 1)  
ask mappe  
[  
  let x-new (y + 1 - (C * x * x))  
  let y-new (B * x)  
  set x x-new  
  set y y-new  
  let xx ((x / x-range) * max-pxcor) let yy ((y / y-range) * max-pycor)  
  if (abs(xx) < max-pxcor and abs(yy) < max-pycor) [setxy xx yy]  
]
```

```
if (itime mod 15 = 0) [do-bifurcation]
```

end

N 2000

SETUP

Interface Info Code

x-range 1.50

y-range 0.50

GO

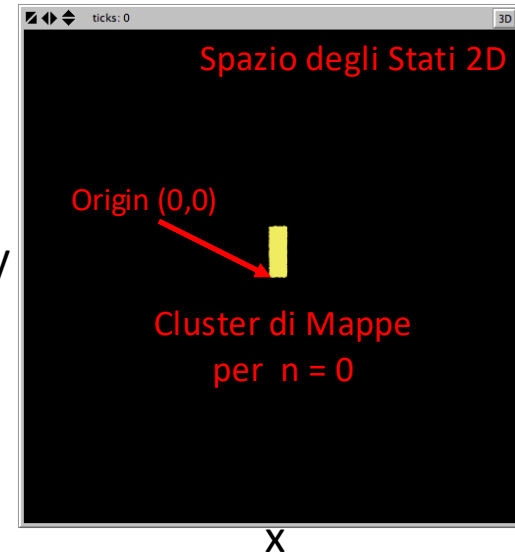
$$x_{n+1} = y_n + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = Bx_n$$

B=0.3

0 < C < 1.42

B 0.30

C 1.377



# Mappa-Henon.nlogo

BIFURCATION

variable

x

0.751

```
globals [ C1 itime ]  
breed [ mappe mappa ]  
mappe-own [ x y ]
```

```
to SETUP
```

$$x_{n+1} = y_n + 1 - Cx_n^2, \quad y_{n+1} = Bx_n$$

```
to GO
```

```
to DO-BIFURCATION
```

```
set-current-plot "Diagramma-di-Biforcazione"
```

```
clear-plot
```

```
set-current-plot-pen "line-pen"
```

```
plotxy C -2 plotxy C 2
```

```
set-current-plot-pen "default"
```

```
set-plot-x-range starting-C final-C
```

```
if-else (variable = "x")
```

```
[set-plot-y-range -1.4 1.5]
```

```
[set-plot-y-range -0.4 0.5]
```

```
set C1 starting-C
```

```
let passo ((final-C - starting-C) / 200)
```

```
repeat 200
```

```
[
```

```
let xx random-float 0.1
```

```
let yy random-float 0.1
```

```
repeat 200 [ let x-new (yy + 1 - (C1 * xx * xx)) let y-new (B * xx)
```

```
set xx x-new set yy y-new ]
```

```
repeat 200 [ let x-new (yy + 1 - (C1 * xx * xx)) let y-new (B * xx)
```

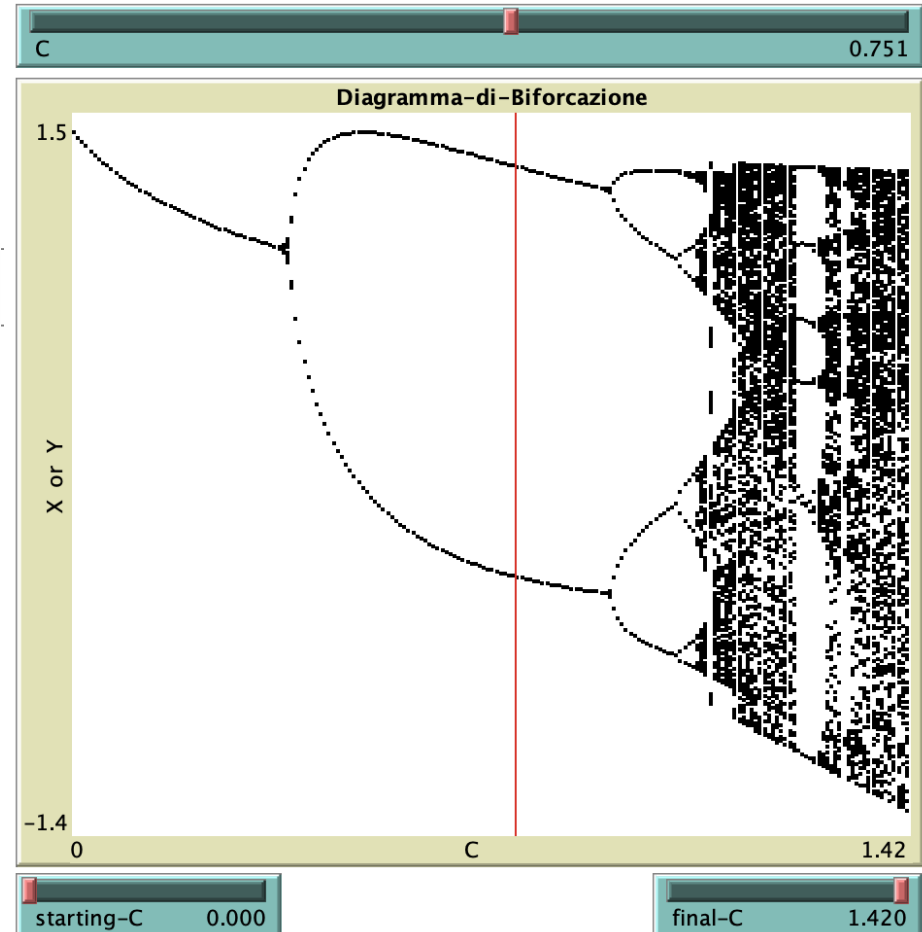
```
set xx x-new set yy y-new
```

```
if-else (variable = "x") [plotxy C1 xx] [plotxy C1 yy] ]
```

```
set C1 (C1 + passo)
```

```
]
```

```
end
```

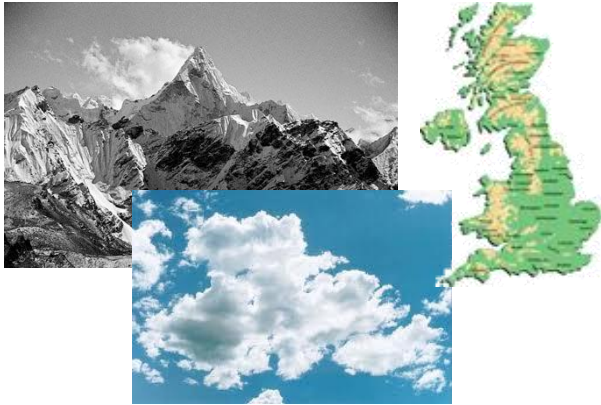


# Quantificare il caos geometricamente: la Dimensione Frattale

Abbiamo già visto in dettaglio come il calcolo dell'esponente di Lyapunov costituisca un importante strumento per la valutazione del grado di caoticità nella mappa logistica. Esso appartiene ad una classe di metodi basati essenzialmente sugli aspetti dinamici (cioé dipendenti dal tempo) delle traiettorie seguite dal sistema che si sta studiando. Esiste però un'altra grande categoria di metodi per quantificare il caos, che si basa piuttosto sugli aspetti geometrici degli attrattori e piú in particolare sul calcolo della loro **dimensionalità** [2].

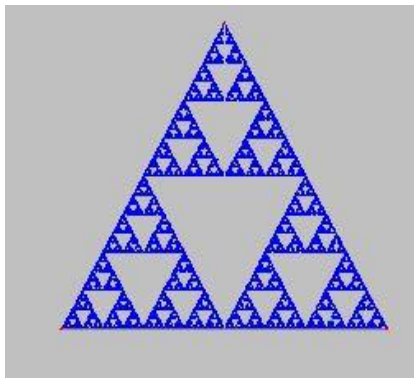
Per un sistema dissipativo la dimensionalità  $D$  di un attrattore, che deve ovviamente essere inferiore al numero di dimensioni dello spazio delle fasi in cui vive l'attrattore stesso, é un indicatore molto utile per descrivere il comportamento a lungo termine del sistema, in quanto permette di stimare il numero di gradi di libertà che rimangono effettivamente attivi una volta che il sistema ha raggiunto lo stato asintotico della sua dinamica. É evidente che un attrattore a punto fisso avrà una dimensione  $D = 0$ , mentre un attrattore a ciclo limite, essendo rappresentato da una linea, avrà dimensione  $D = 1$ . Meno immediata sembra invece la valutazione della dimensionalità di un attrattore caotico.

# Reminder sulla dimensione frattale



Per descrivere matematicamente **oggetti complessi e frastagliati**, come la linea costiera di un'isola, il profilo di una catena montuosa o la struttura di una nuvola, i matematici hanno introdotto il concetto di "frattale".

Più precisamente, il termine "frattale" venne coniato nel 1975 dal matematico francese **Benoît Mandelbrot**, e deriva dal latino **fractus** (rotto, spezzato), così come il termine frazione.



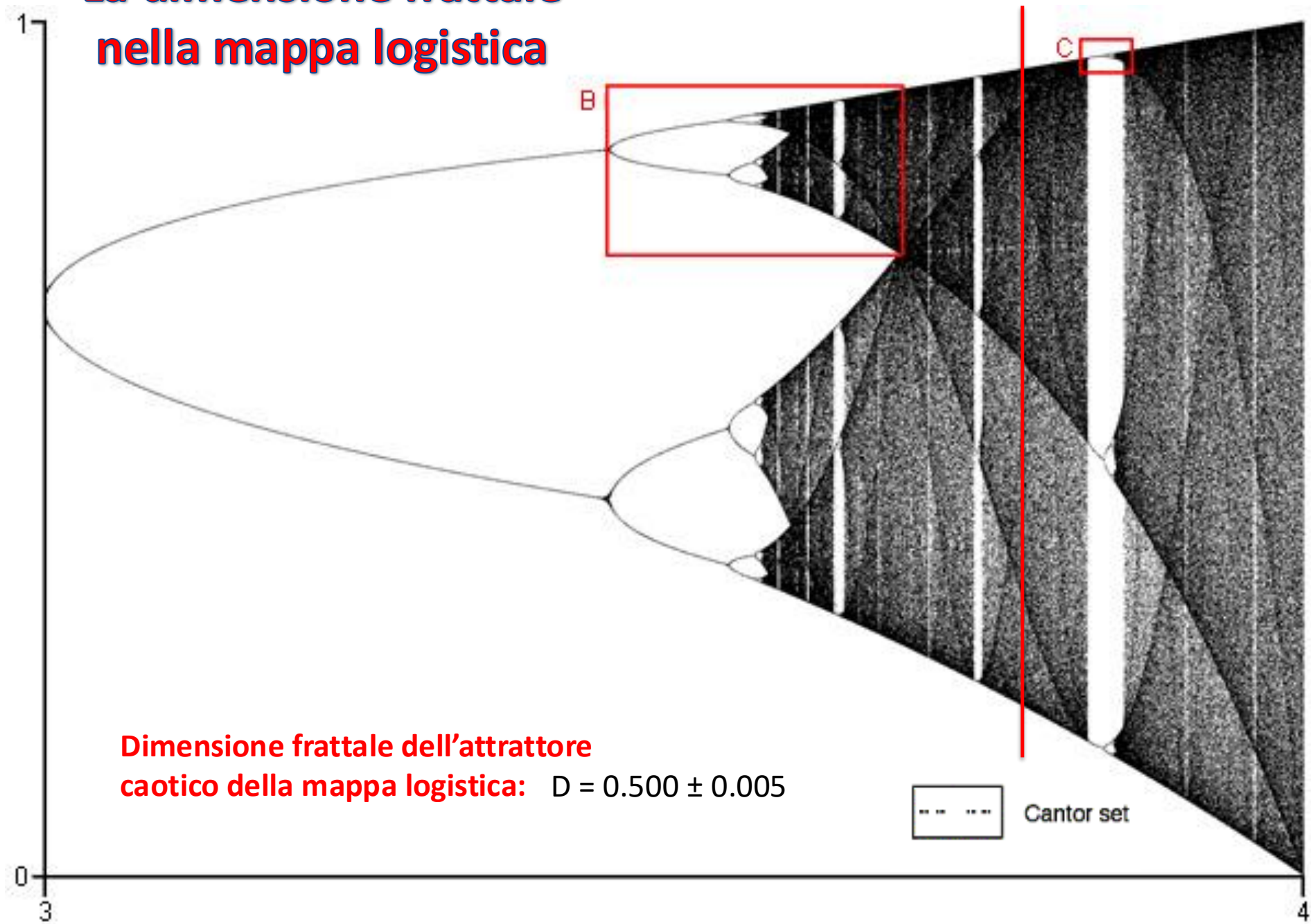
Un **frattale** è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero che non cambia aspetto anche se visto con una lente d'ingrandimento. In altre parole è un oggetto dotato delle proprietà di **auto-similarità e invarianza di scala**. Ma ha anche la strana caratteristica matematica di possedere una **dimensione frazionaria**.

# La dimensione frattale



# La dimensione frattale nella mappa logistica

Spazio degli stati 1D



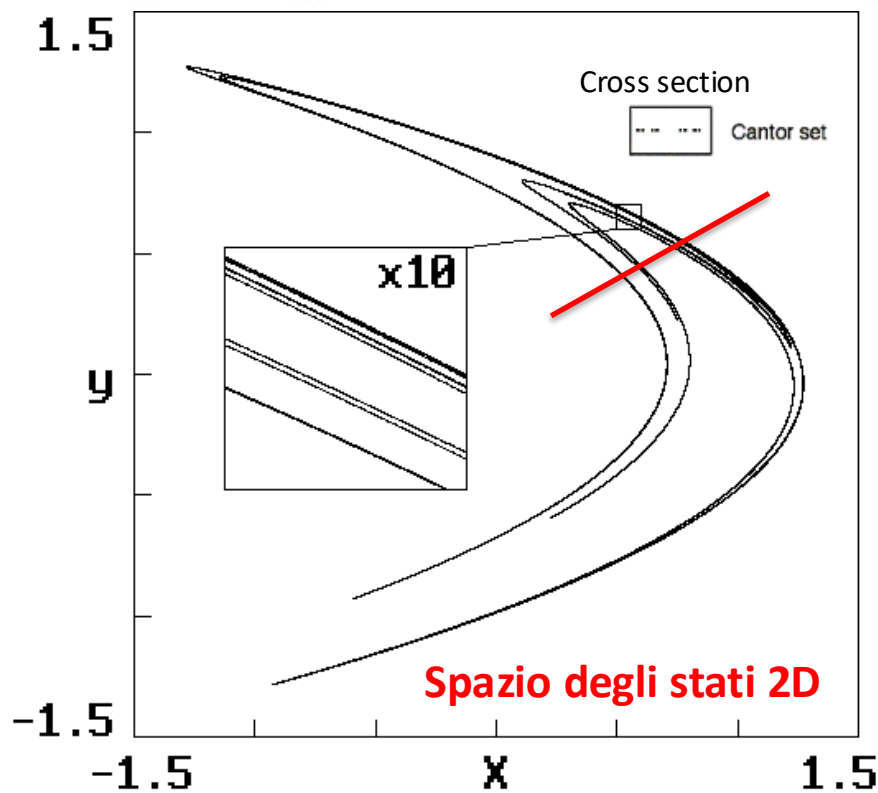
**Dimensione frattale dell'attrattore caotico della mappa logistica:**  $D = 0.500 \pm 0.005$

... .. Cantor set

# La dimensione frattale nella mappa di Hénon

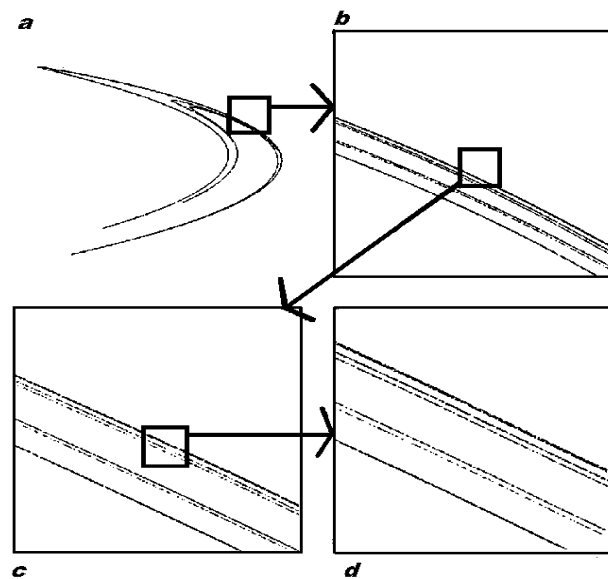
Se osserviamo in-

fatti l'attrattore della mappa di Hénon mostrato in Fig.1.1, ci rendiamo conto che esso é costituito da un insieme molto fitto di punti che giacciono su delle linee che a loro volta sembrano in qualche modo estendersi sulla tipica superficie a forma di mezzaluna senza però riempirla. Lo stesso Hénon si era quasi subito reso conto del fatto che ciascuna delle linee dell'attrattore caotico, che a prima vista sembrano uniche, una volta ingrandita appariva in realtà costituita da due linee distinte, che a loro volta, ad ingrandimenti maggiori, diventavano prima quattro, poi otto, e così via. Al lettore attento questa peculiarità ricorderà quanto osservato in precedenza parlando del diagramma di biforcazione della mappa logistica: si tratta infatti della cosiddetta autosimilarità, cioè la ripetizione delle medesime configurazioni geometriche a diverse scale di ingrandimento.

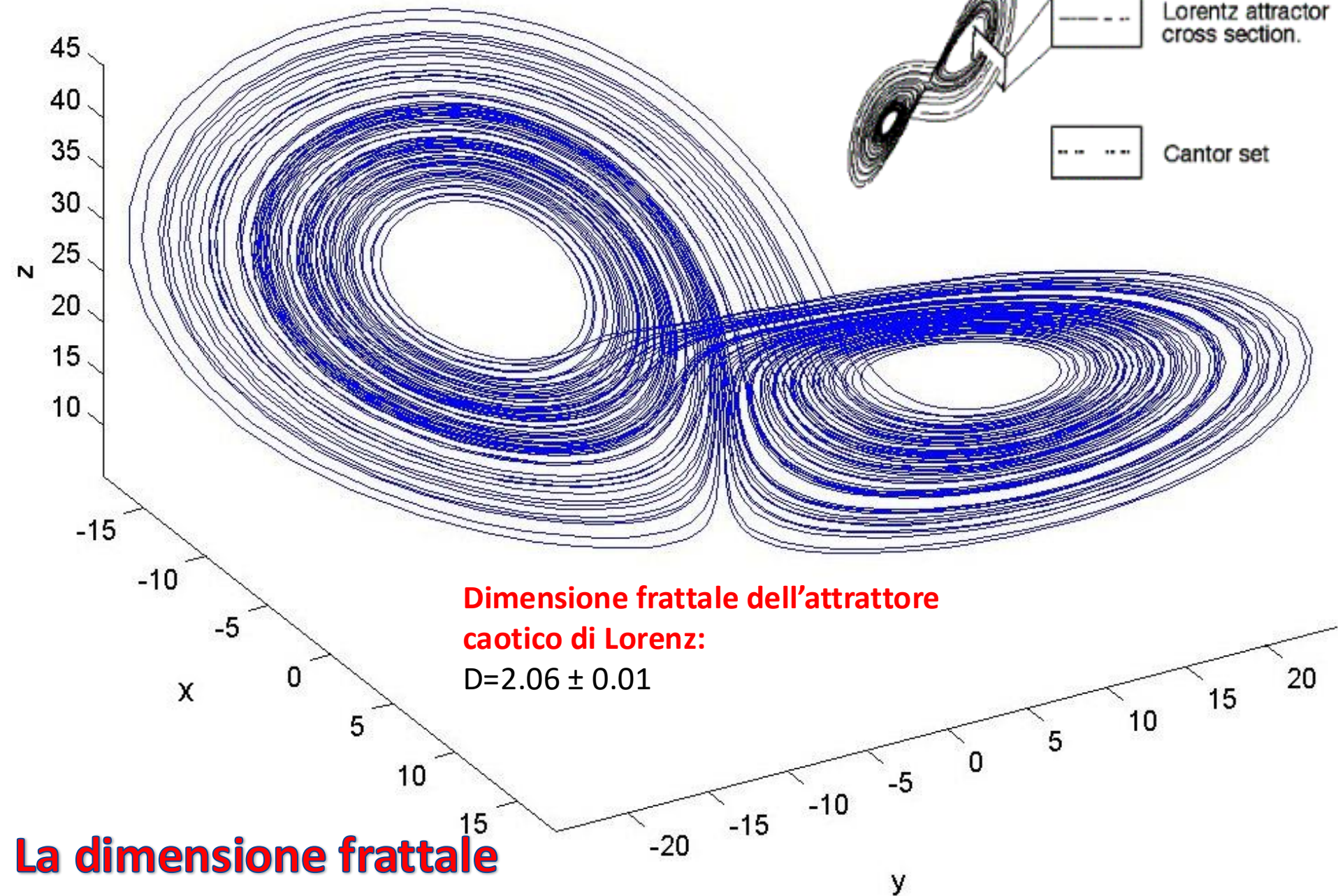


**Dimensione frattale dell'attrattore caotico della mappa di Hénon:**

$$D = 1.25 \pm 0.02$$



## Spazio degli stati 3D



**Dimensione frattale dell'attrattore  
caotico di Lorenz:**

$$D = 2.06 \pm 0.01$$

**La dimensione frattale  
nel sistema di Lorenz**

# Calcolare la Dimensione Frattale

Queste considerazioni ci spingono con insistenza a porci una domanda fondamentale: qual'è la dimensione di un attrattore caotico? È la stessa domanda che si erano posti i matematici nei primi anni Ottanta, e la risposta a cui arrivarono fu quanto meno sorprendente: gli attrattori caotici sembrano infatti possedere una dimensione frazionaria, una proprietà davvero molto bizzarra, tant'è che spesso ci si riferisce a questo tipo di attrattori chiamandoli **attrattori strani**.

Già nel 1975 il matematico francese (di origine polacca) Benoit Mandelbrot aveva coniato il termine frattali (dal latino 'fractus, che significa 'rotto', 'spezzato') per riferirsi a quella intrigante categoria di oggetti la cui struttura autosimile dava luogo ad una dimensionalità frazionaria [3]. Lo stesso Mandelbrot si cimentò subito nel compito di individuare dei possibili metodi per stimare quella che da quel momento in poi venne chiamata dimensione frattale, la quale, in sostanza, esprimerebbe il grado di irregolarità dell'oggetto frattale. Da allora molti altri metodi sono stati elaborati a questo scopo e ad oggi esistono molte differenti misure della dimensione frattale (non sempre equivalenti) senza che nessuna di esse possa pretendere di rappresentare la dimensione frattale. Una delle misure più note, probabilmente a causa della sua intuitività, è la cosiddetta dimensione di box-counting  $D_b$ , che in realtà era stata già introdotta nell'ambito dei sistemi dinamici dal matematico russo Andrej Kolmogorov verso la fine degli anni '50 [4].



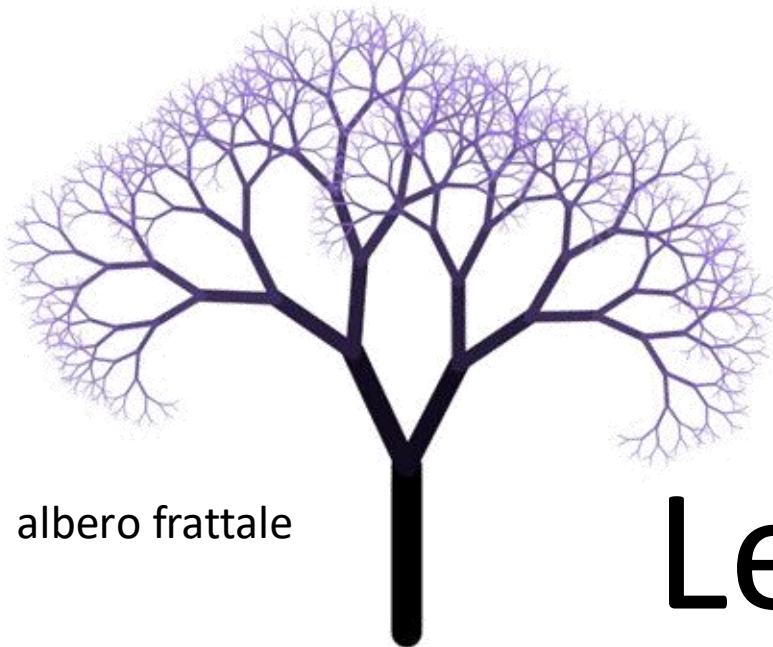
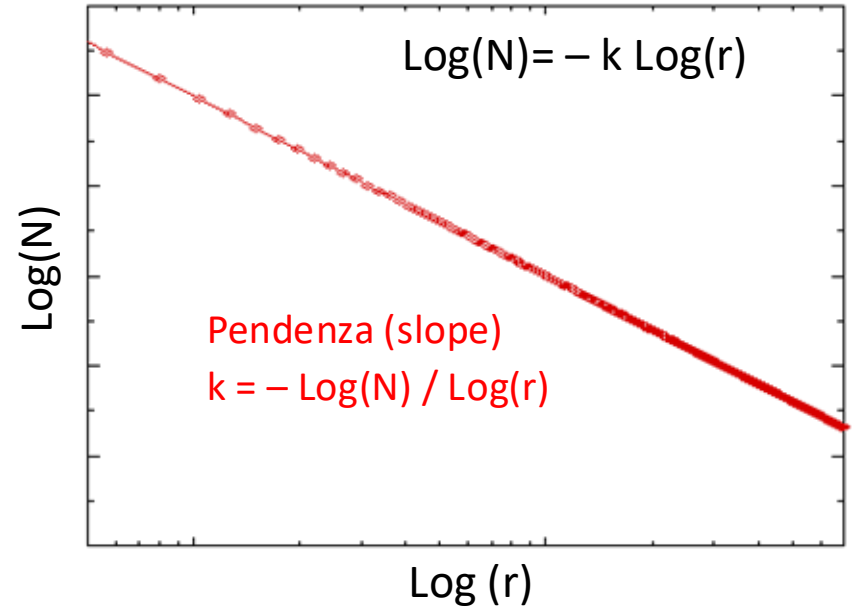
Benoit Mandelbrot (1924-2010)



Andrei Kolmogorov (1903-1987)

# Reminder

La 'firma' matematica dell'autosimilarità e della invarianza di scala è la legge di potenza! (power law)



numero di rami

dimensione dei rami

$$N \approx r^{-k}$$

Legge di Pc



# Dimensione Frattale di Box Counting

Il metodo del box-counting si basa sul ricoprimento dello spazio delle fasi in cui si trova l'oggetto frattale, nel nostro caso l'attrattore strano, per mezzo di un certo numero di cellette ('boxes') di lato  $R$ . Nel caso unidimensionale queste cellette saranno dei segmenti, in 2 dimensioni dei quadrati, in 3 dei cubi e così via. A questo punto, per un valore fissato di  $R$ , basta contare il numero di cellette  $N(R)$  necessario a contenere tutti i punti dell'attrattore e studiare come questo numero varia al variare di  $R$ . É evidente che riducendo  $R$ , e dunque la dimensione delle cellette, il numero  $N(R)$  tenderá ad aumentare in quanto saranno necessarie sempre piú cellette per ricoprire l'attrattore. La dimensione di box-counting sará dunque definita in modo da soddisfare la relazione

$$N(R) = \lim_{R \rightarrow 0} kR^{-D_b}, \quad \text{power law} \quad (1.2)$$

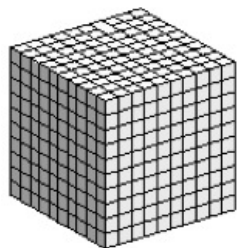
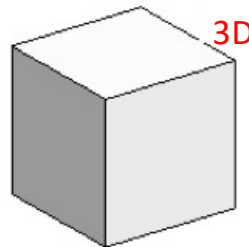
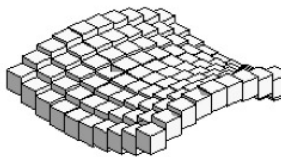
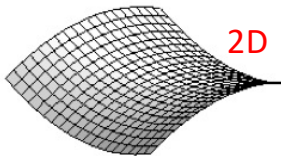
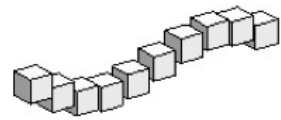
**con slope negativa**

dove  $k$  é una costante di proporzionalitá. Prendendo il logaritmo di entrambi i membri e trascurando i termini che svaniscono per  $R$  che tende a zero, si ottiene subito l'espressione finale di  $D_b$ :

$$\left( \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log k}{\log R} \rightarrow 0 \right)$$

$$D_b = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R} \quad (1.3)$$

la quale, come é semplice verificare, produce come risultato 0 se applicata ad un punto, 1 se applicata a un segmento, e cosí via. Questo dimostra che si tratta di una misura affidabile della dimensionalitá di un oggetto, e dunque che puó essere ragionevolmente utilizzata anche per la valutazione di dimensioni frazionarie.



$$D_b = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R}$$

## Alcuni esempi:

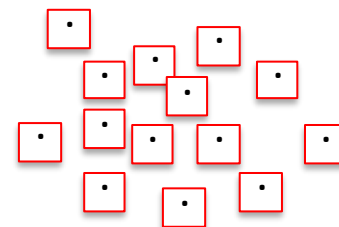
To gain some confidence that Eq. (9.7-3) gives a reasonable definition of dimension, let us apply it to some simple examples. First, consider a two-dimensional space and let the geometric object be a point. In this case, the box is just a square of side  $R$ . Only one box is needed to contain the point; therefore, we have  $N(R) = 1$  for all values of  $R$ . Using this result in Eq. (1.3) gives  $D_b = 0$ , just as we would expect for a point.

1 punto



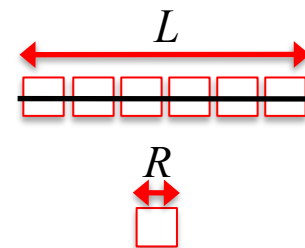
What happens if the object consists of a number of isolated points? The answer is that  $D_b$  is still equal to 0. To see how this comes about, let  $N$  be the number of isolated points. When  $R$  is small enough (smaller than the smallest distance between neighboring points), we will have one box around each point. When  $R$  gets smaller than this value, the numerator in Eq. (1.3) stays fixed while the denominator grows (more negative) without limit. So again we have  $D_b = 0$ .

N punti isolati



As a second example, let us use a line segment of length  $L$  as the geometric object. In this case we need  $N(R) = L/R$  boxes to cover the segment. [When  $N$  is sufficiently large, we can safely ignore any fraction of a box in counting  $N(R)$ .] We now use this value in Eq. (1.3) to find

1 segmento



$$D_b = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log(L/R)}{\log R} = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log L - \log R}{\log R} = 1 \quad (9.7-4)$$

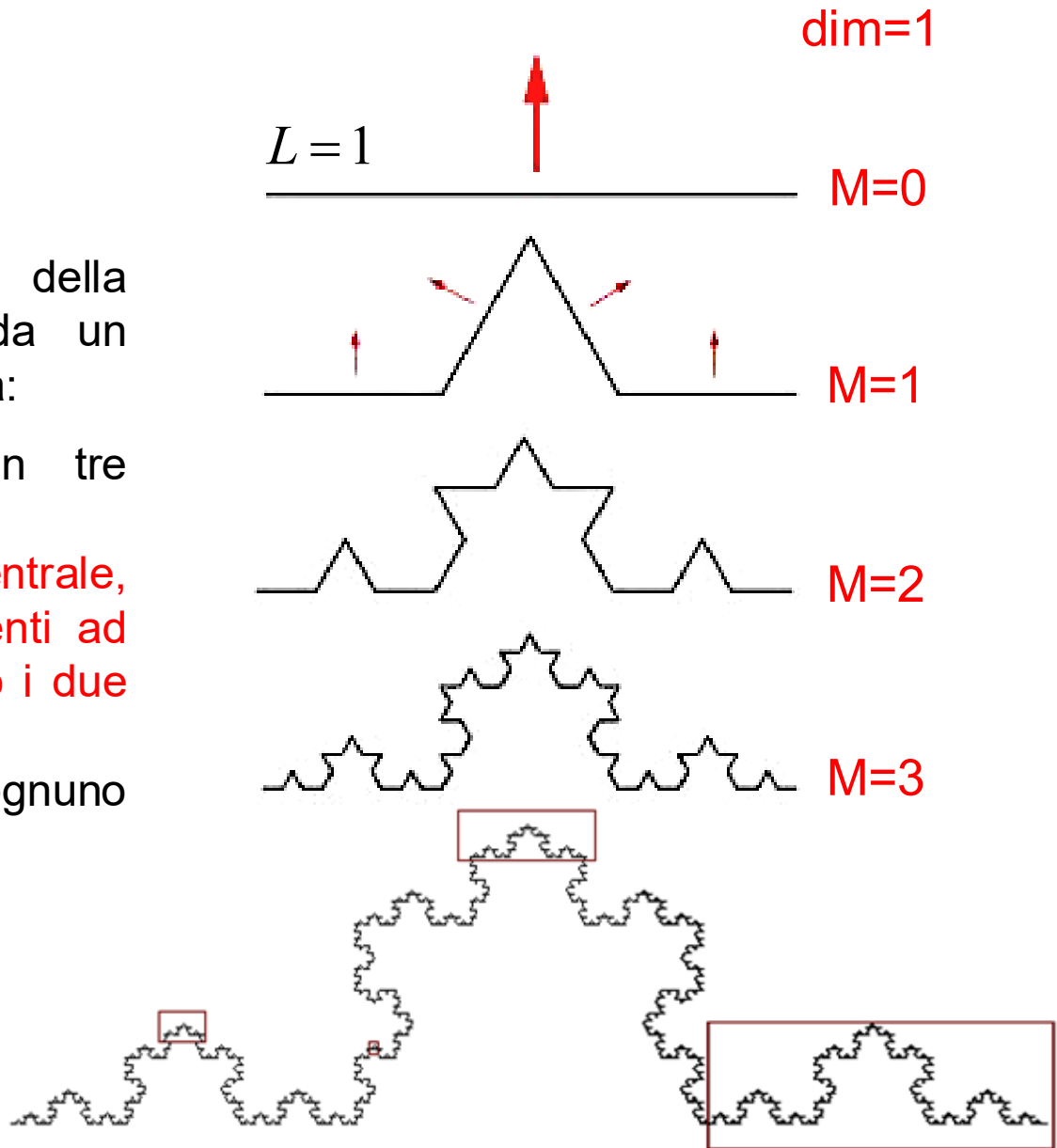
$$R = \frac{1}{6}L \rightarrow N(R) = 6$$

As we expect, the box-counting dimension of a line segment is equal to 1.

# La curva di Koch

Procedura di generazione della curva di Koch a partire da un segmento di lunghezza unitaria:

1. dividere il segmento in tre segmenti uguali;
2. cancellare il segmentino centrale, sostituendolo con due segmenti ad esso identici che costituiranno i due lati di un triangolo equilatero;
3. tornare al punto 1 per ognuno degli attuali segmenti.



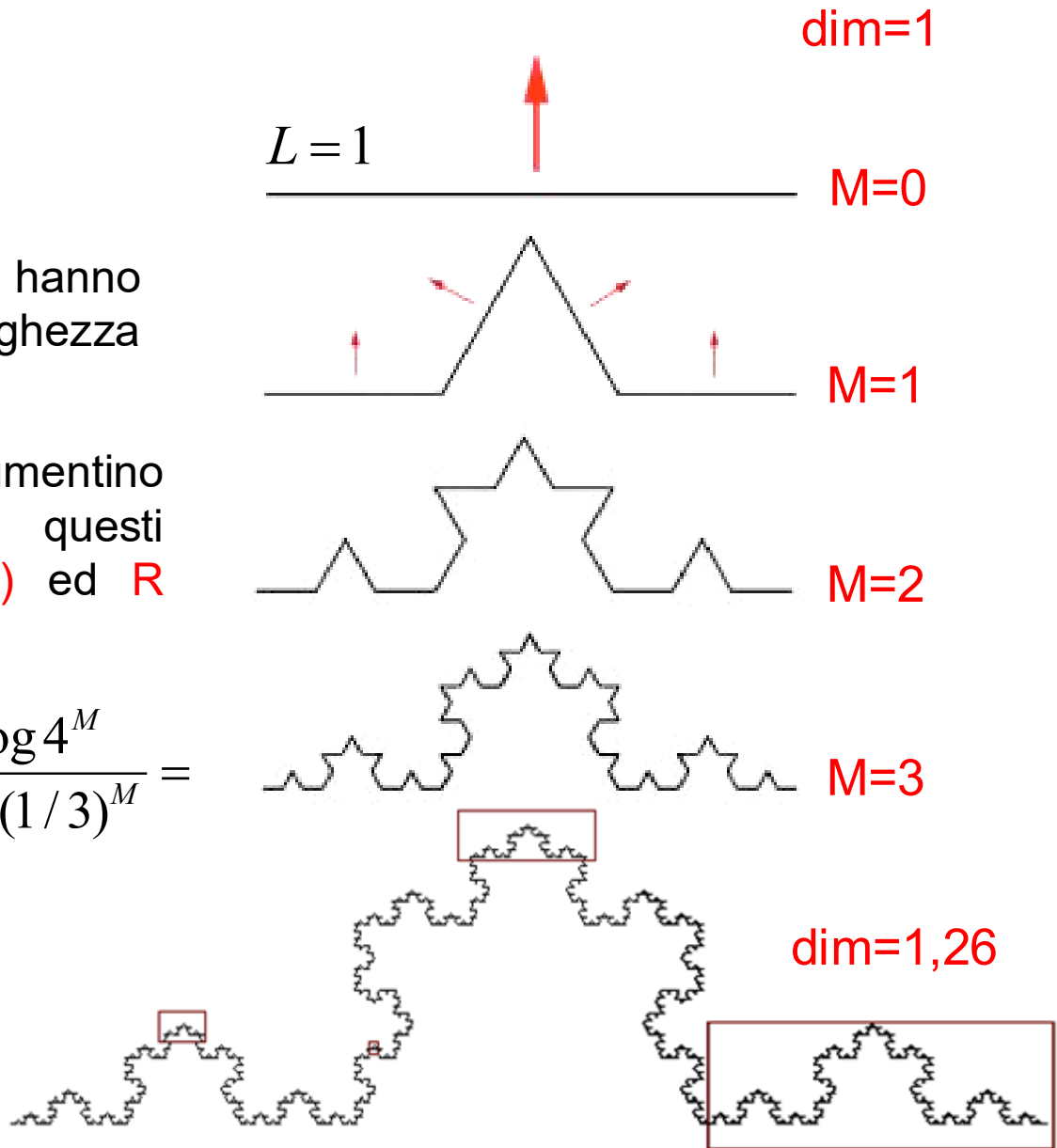
# La curva di Koch

Si noti che al passo **M-esimo** si hanno  **$N=4^M$**  segmentini, ciascuno di lunghezza  **$R=(1/3)^M = 3^{-M}$**  ( $M \rightarrow \infty \Rightarrow R \rightarrow 0$ ).

Immaginando di coprire ogni segmentino con una celletta, sostituiamo questi valori, rispettivamente, ad  **$N(R)$**  ed  **$R$**  nell'Eq.(1.3):

$$D_b = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R} = -\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\log 4^M}{\log (1/3)^M} =$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M \log 4}{M \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26\dots$$



# Dimensione Frattale di Correlazione

Nonostante la sua ragionevolezza e semplicitá, però, l'applicazione pratica del metodo del box-counting é abbastanza dispendiosa dal punto di vista computazionale, in quanto il numero di operazioni da eseguire cresce esponenzialmente con le dimensioni dello spazio delle fasi in cui l'oggetto frattale é situato. É per questo motivo che, soprattutto per la caratterizzazione degli attrattori caotici, spesso si preferisce utilizzare un'altro metodo, introdotto da Grassberger e Procaccia nel 1983 [5], basato sul calcolo della cosiddetta somma di correlazione. Si tratta di una tecnica che conta direttamente i punti di un attrattore senza richiedere il partizionamento dello spazio delle fasi, e dunque permette di giungere molto piú rapidamente alla valutazione della sua dimensione frattale, che in questo caso prende il nome di dimensione di correlazione. Sarà proprio di questa tecnica che ci serviremo per stimare la dimensione frattale dell'attrattore strano di Hénon. Passiamo subito, quindi, ad esaminarla in dettaglio [2].



Peter Grassberger (1940)



Itamar Procaccia (1949)

# Dimensione di Correlazione di un attrattore (traiettoria) formato da N punti



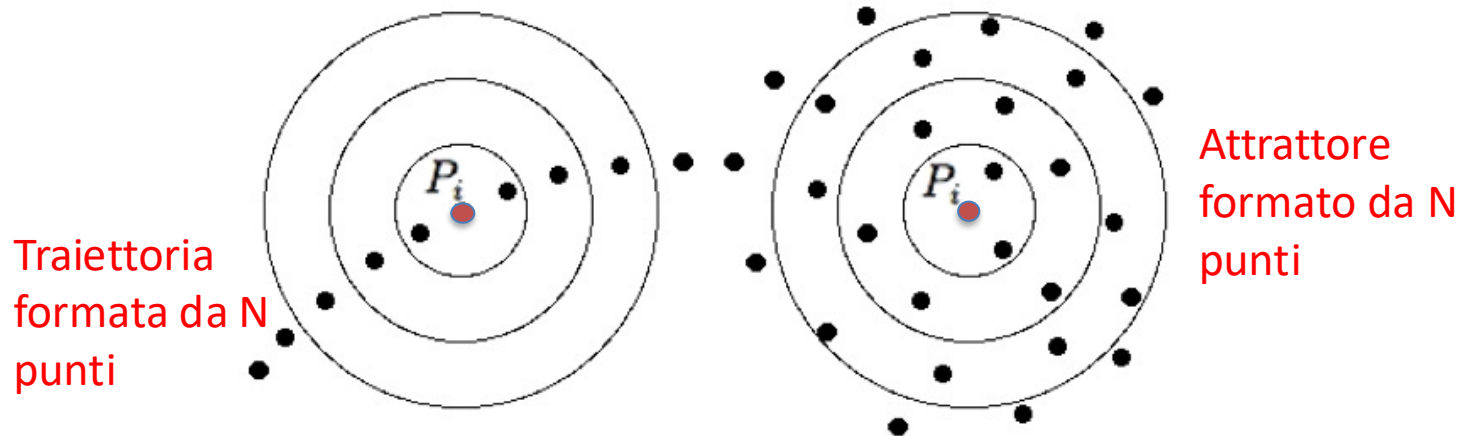
L'idea di Grassberger e Procaccia consiste nel calcolare, per ogni punto  $P_i$  dell'attrattore, il numero  $N_i(R)$  di punti che si trovano all'interno di una circonferenza di raggio  $R$  centrata sul punto  $P_i$  (escludendo quest'ultimo) e di ottenere da questa la quantità  $p_i(R) = N_i(R)/(N - 1)$ , che rappresenta quindi **la frazione** di punti situati ad una distanza dal punto  $P_i$  inferiore ad  $R$ . A questo punto **la somma di correlazione**  $C(R)$  si definisce semplicemente come:

$$C(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i(R), \quad (1.4)$$

e risulta compresa tra 0 e 1 (due situazioni limite che corrispondono, rispettivamente, ai due casi in cui  $R$  è più piccolo della distanza minima tra due punti qualunque dell'attrattore o è più grande di quella massima).

$C(R)=1$ : tutti i punti cadono dentro la circonferenza

$C(R)=0$ : nessun punto cade dentro la circonferenza



In analogia a quanto visto nel caso della dimensione di box-counting, la dimensione di correlazione  $D_c$  risulta allora definita come quel numero che soddisfa la relazione

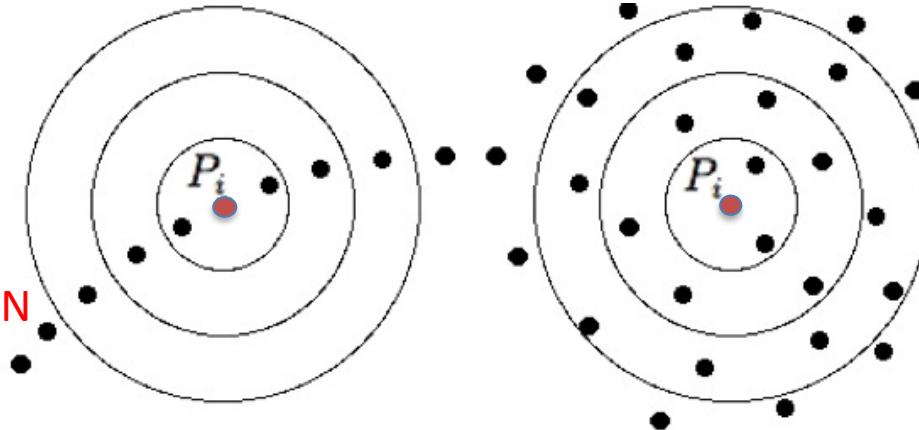
$$C(R) = \lim_{R \rightarrow 0} kR^{D_c}, \quad \text{power law con slope positiva} \quad (1.6)$$

da cui, passando ai logaritmi, avremo finalmente:

$$D_c = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log C(R)}{\log R}. \quad (1.7)$$

A volte la dimensione di correlazione 1.7 viene chiamata anche correlation scaling index, in quanto ci dice proprio come la somma  $C(R)$  scala con il raggio  $R$ . In pratica, poiché evidentemente è impossibile nei calcoli al computer far tendere  $R$  a zero, si preferisce calcolare la  $C(R)$  all'interno di un certo range  $[R_{\min}, R_{\max}]$  e plottare il  $\log C(R)$  in funzione del  $\log(R)$  in quel range: il valore di  $D_c$  si ricaverà dalla pendenza di questa curva nella regione in cui essa segue un andamento approssimativamente lineare. E questo è esattamente quello che faremo tra un attimo, applicando l'intera procedura appena descritta all'attrattore strano della mappa di Hénon.

Traiettoria formata da N punti



Attrattore formato da N punti

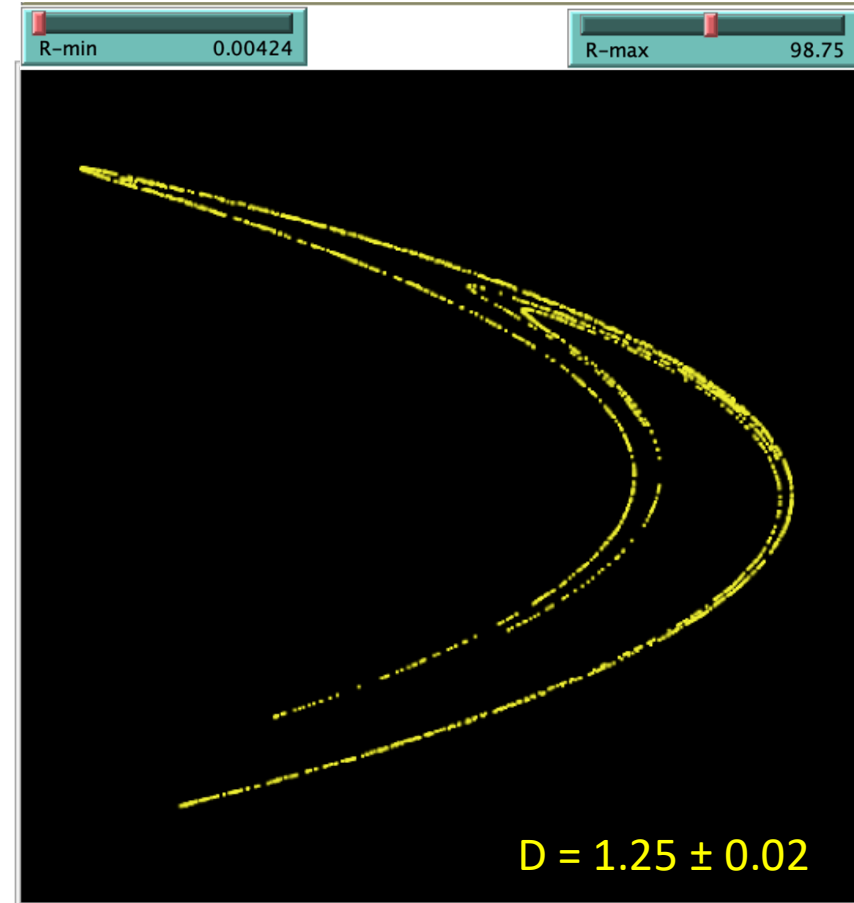


# Mappa-Henon-Corrdim.nlogo

to CALCULATE-CORRELATION-DIMENSION

```
set iter 1
set scaling-index 0
let C-min 100 let C-old 0
let R-step 0 let R-old R-min let R R-min
while [R <= R-max]
[
  if (R >= 1.0E-4 and R < 1.0E-3) [set R-step 1.0E-4 ]
  if (R >= 1.0E-3 and R < 1.0E-2) [set R-step 1.0E-3 ]
  if (R >= 1.0E-2 and R < 1.0E-1) [set R-step 1.0E-2 ]
  if (R >= 1.0E-1 and R <= 1 ) [set R-step 1.0E-1 ]
  if (R >= 1 and R <= 10 ) [set R-step 1 ]
  if (R >= 10 and R <= 100 ) [set R-step 10 ]

  let C-sum 0
  ask mappe
  [
    let t-cont (count (mappe in-radius R))
    set C-sum (C-sum + (t-cont / (N - 1)))
  ]
  set C-sum (C-sum / N)
  if (R = R-min) [set C-old C-sum]
  set-current-plot "Correlation-Sum-Plot"
  plotxy log R 10 log C-sum 10
  if (R > R-min)
  [
    set scaling-index ((log C-sum 10 - log C-old 10) / (log R 10 - log R-old 10))
    set-current-plot "Correlation-Scaling-Index-Plot"
    plotxy (log R 10) scaling-index
    set R-old R
    set C-old C-sum
    set iter (iter + 1)
  ]
  set R (R + R-step)
]
end
```

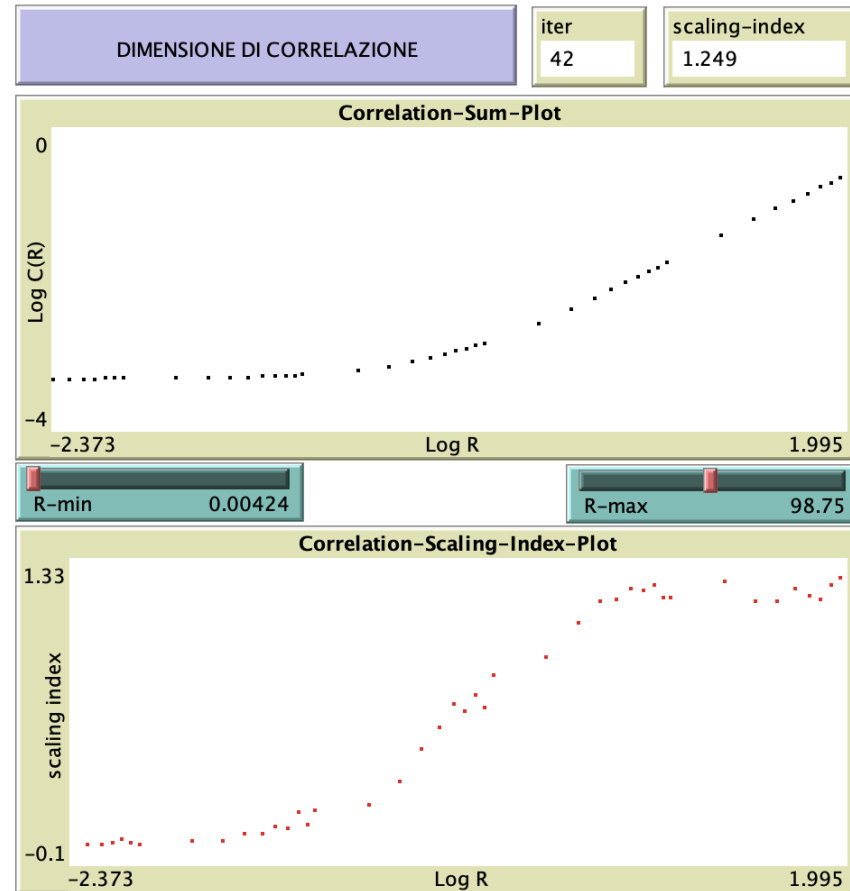


# Mappa-Henon-Corrdim.nlogo

to CALCULATE-CORRELATION-DIMENSIONION

```
set iter 1
set scaling-index 0
let C-min 100 let C-old 0
let R-step 0 let R-old R-min let R R-min
while [R <= R-max]
[
  if (R >= 1.0E-4 and R < 1.0E-3) [set R-step 1.0E-4 ]
  if (R >= 1.0E-3 and R < 1.0E-2) [set R-step 1.0E-3 ]
  if (R >= 1.0E-2 and R < 1.0E-1) [set R-step 1.0E-2 ]
  if (R >= 1.0E-1 and R <= 1 ) [set R-step 1.0E-1 ]
  if (R >= 1 and R <= 10 ) [set R-step 1 ]
  if (R >= 10 and R <= 100 ) [set R-step 10 ]

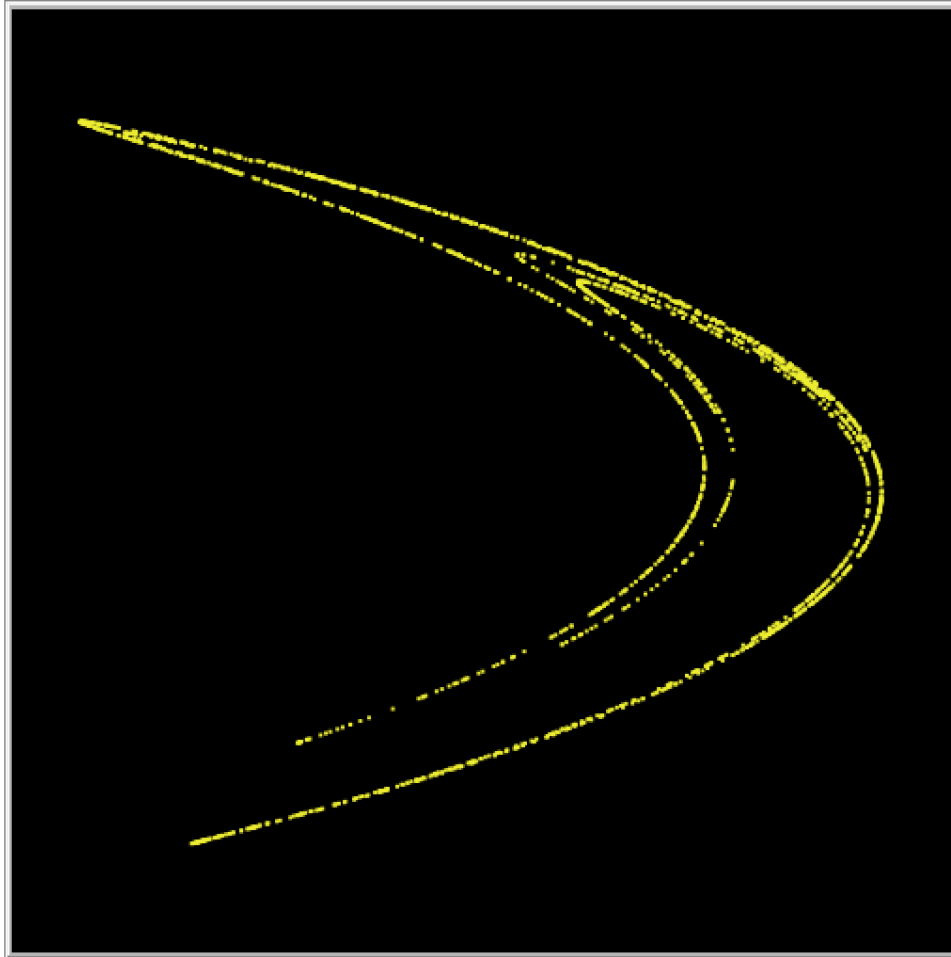
  let C-sum 0
  ask mappe
  [
    let t-cont (count (mappe in-radius R))
    set C-sum (C-sum + (t-cont / (N - 1)))
  ]
  set C-sum (C-sum / N)
  if (R = R-min) [set C-old C-sum]
  set-current-plot "Correlation-Sum-Plot"
  plotxy log R 10 log C-sum 10
  if (R > R-min)
  [
    set scaling-index ((log C-sum 10 - log C-old 10) / (log R 10 - log R-old 10))
    set-current-plot "Correlation-Scaling-Index-Plot"
    plotxy (log R 10) scaling-index
    set R-old R
    set C-old C-sum
    set iter (iter + 1)
  ]
  set R (R + R-step)
]
end
```



# Mappa-Henon-Corrdim.nlogo

MAPPA DI HENON

$$x(n+1) = y(n) + 1 - C x(n)^2$$
$$y(n+1) = B x(n)$$



x



SETUP

iteration: 321

count points: 2000

N: 2000

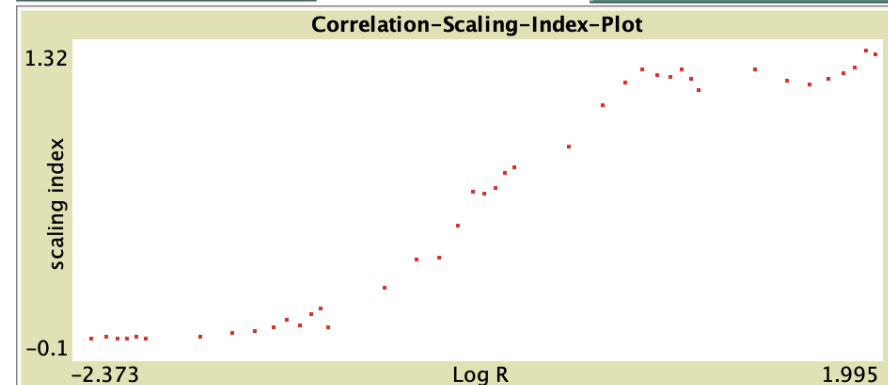
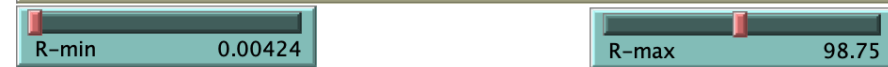
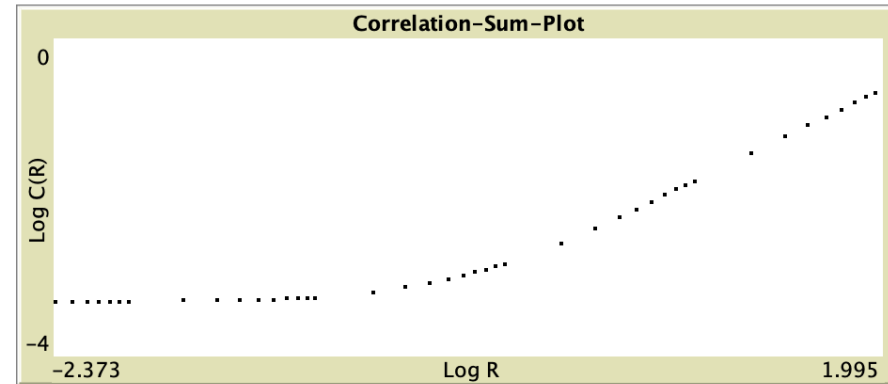
B: 0.30

C: 1.40

DIMENSIONE DI CORRELAZIONE

iter: 42

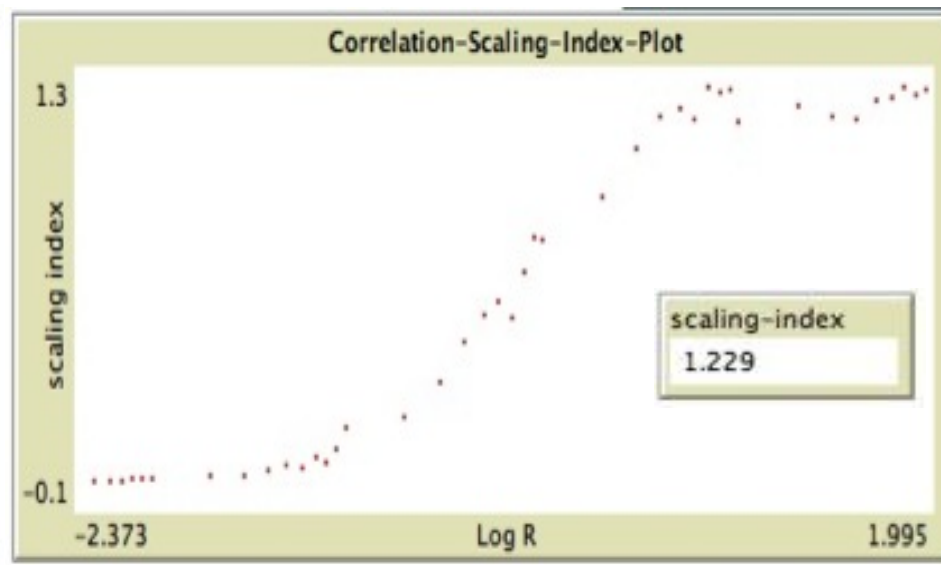
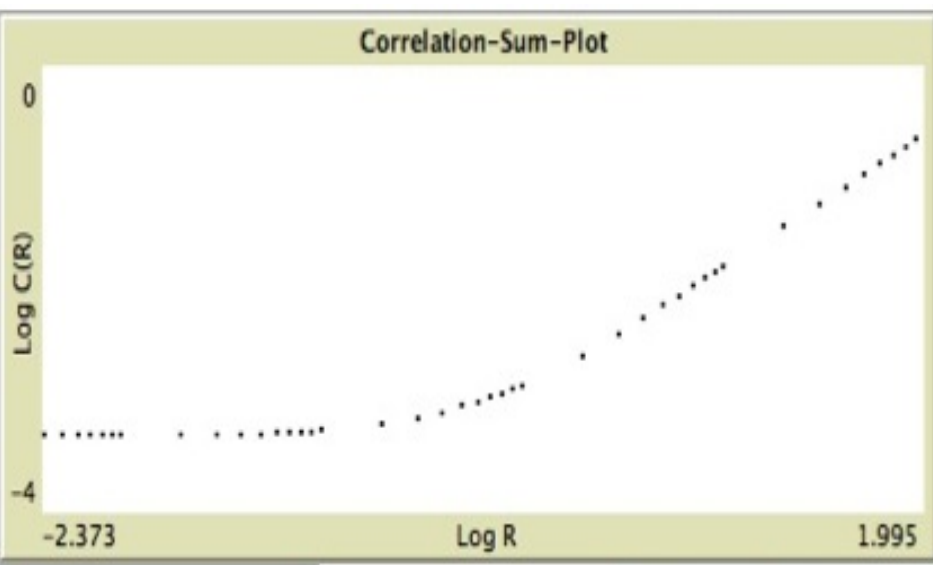
scaling-index: 1.263



I valori scelti per  $R - min$  (dell'ordine di  $10^{-3}$ ) ed  $R - max$  (dell'ordine di  $10^2$ ) sono abbastanza tipici e possono essere utilizzati per esplorare il comportamento asintotico dell'indice di scaling al variare del parametro di controllo  $C$ , e dunque del tipo di attrattore. Fissato al solito  $B = 0.3$ , per  $C = 1.4$  troviamo l'attrattore strano di Fig.1.4 e dal relativo plot si vede chiaramente che l'indice di scaling, che poi non é nient'altro che la dimensione di correlazione, si assesta attorno al valore 1.23 (mostrato anche nella casella del monitor **scaling-index** in alto a destra): come ci si aspettava, la dimensione dell'attrattore strano risulta essere frazionaria e compresa tra 1 e 2. Il valore trovato risulta anche in buon accordo con il valore della cosiddetta dimensione di Hausdorff (introdotta nel 1918 dal matematico tedesco Felix Hausdorff per misurare la dimensionalità di spazi metrici arbitrari, e che poi si é rivelata molto utile anche come dimensione frattale), che per l'attrattore caotico di Hénon é circa 1.26.



Felix Hausdorff  
(1868-1942)



Per valori di  $C$  inferiori a  $C \sim 1.06$  (come si vede anche in Fig.1.1) gli attrattori della mappa di Hénon sono di tipo punto fisso o ciclo limite, quindi le mappe si concentreranno in punti isolati sullo schermo (in numero pari al periodo del ciclo limite, ovvero numero di rami della biforcazione corrispondente). Ad esempio, in Fig.1.5 é mostrato il calcolo della dimensione di correlazione nel caso  $C = 0.43$  (sempre per  $B = 0.3$ ), dove l'attrattore é un ciclo limite di periodo due: nel World sono visibili solo due punti, e la somma di correlazione rimane costantemente nulla, cosí come l'indice di scaling. La dimensione dell'attrattore é dunque 0, come anche in questo caso ci si aspettava trattandosi di punti isolati.

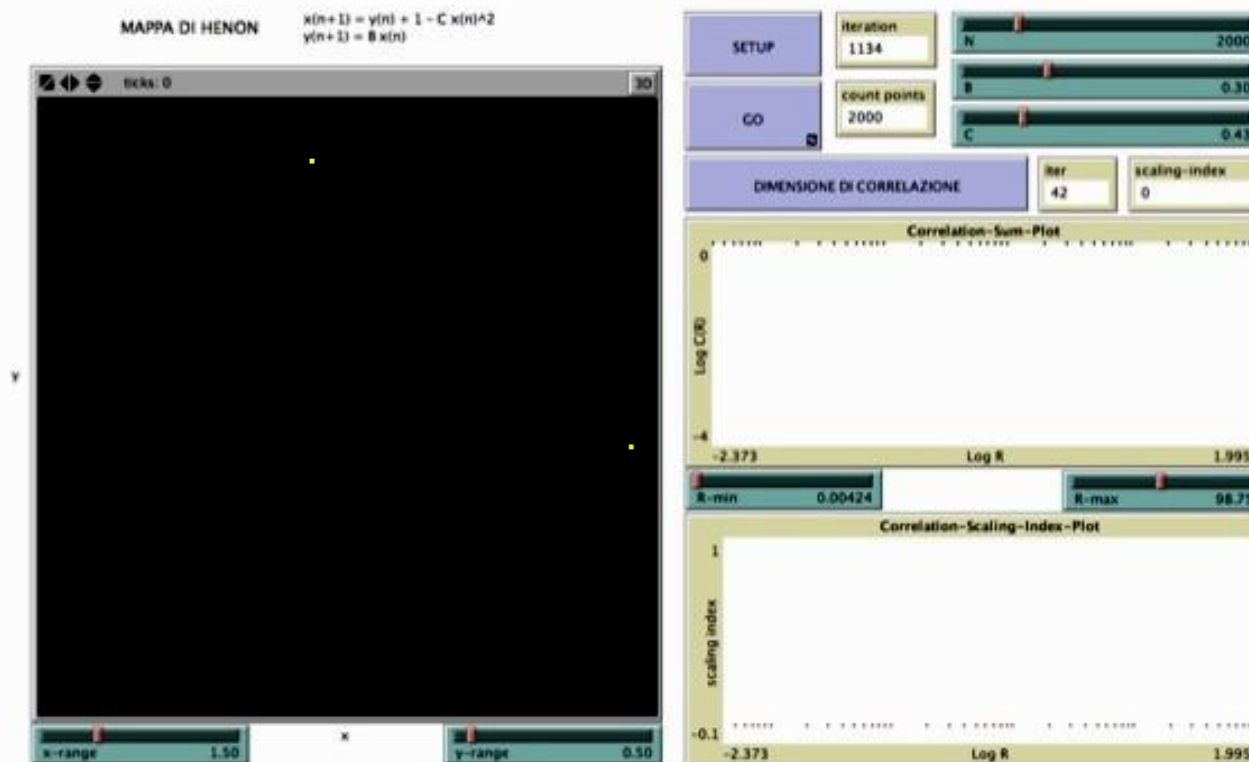


Figura 1.5: Calcolo della dimensione di correlazione di un attrattore a ciclo limite della mappa di Hénon, di periodo 4.

Se invece andiamo a calcolare la dimensione di correlazione del quadrato delle condizioni iniziali che abbiamo finora utilizzato per studiare l'evoluzione delle mappe di Hénon, e che in Fig.1.6 appare come un rettangolo a causa del differente rapporto di scala dei due assi del World ( $x - range \neq y - range$ ), vediamo come l'indice di scaling si assesti rapidamente sul valore 1.912, molto vicino a 2 in quanto le mappe ricoprono quasi uniformemente la superficie bidimensionale  $0.1 \times 0.1$ .

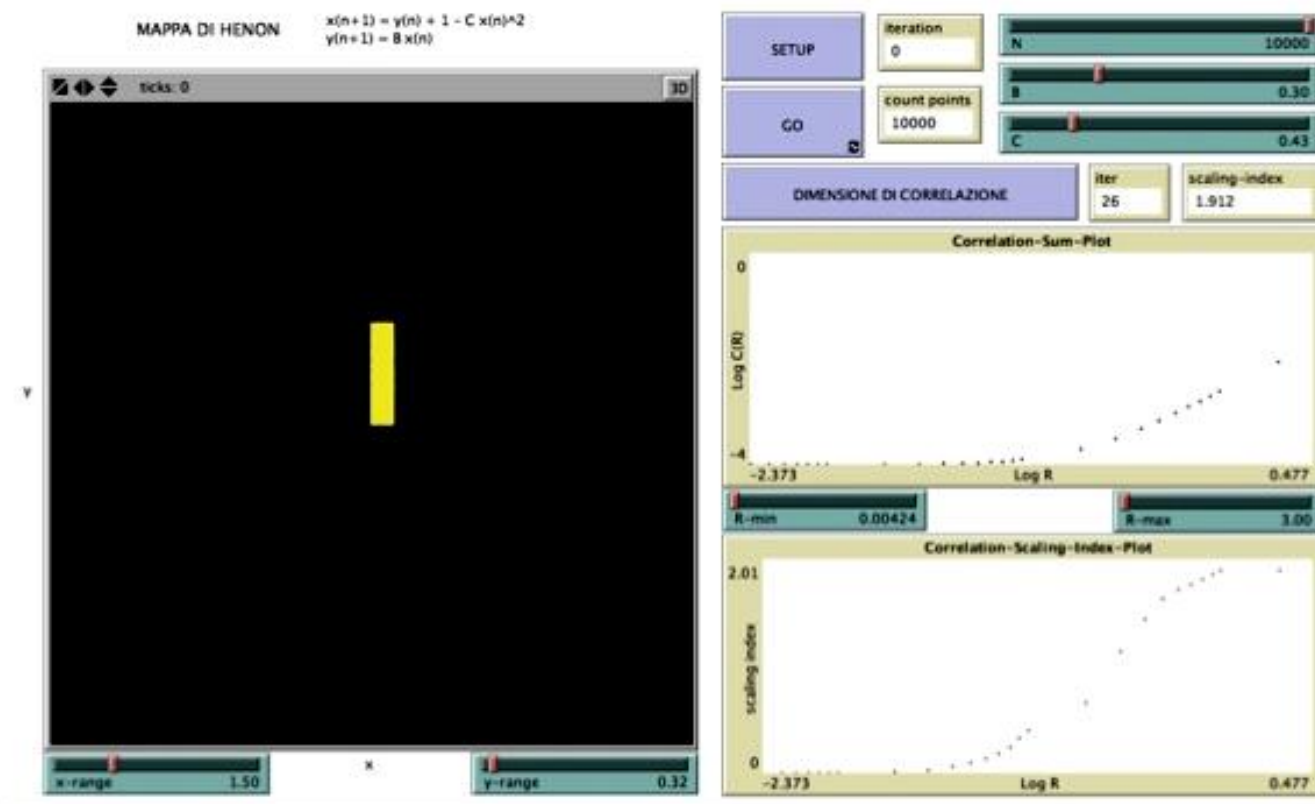
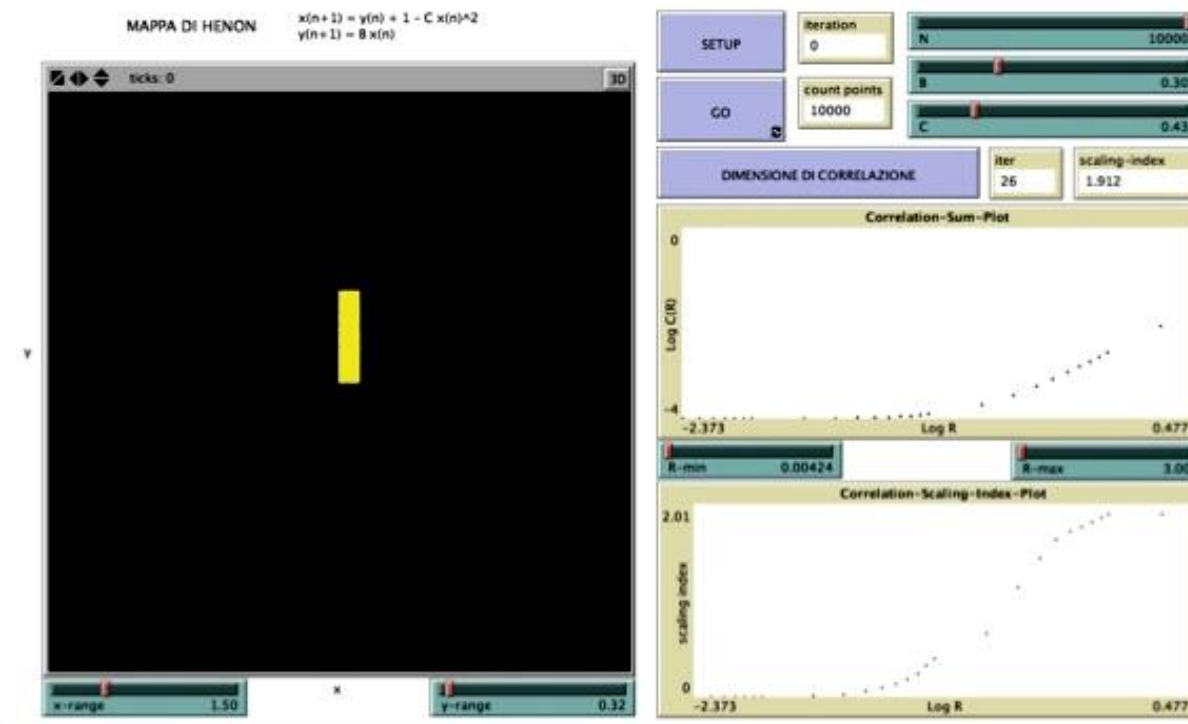


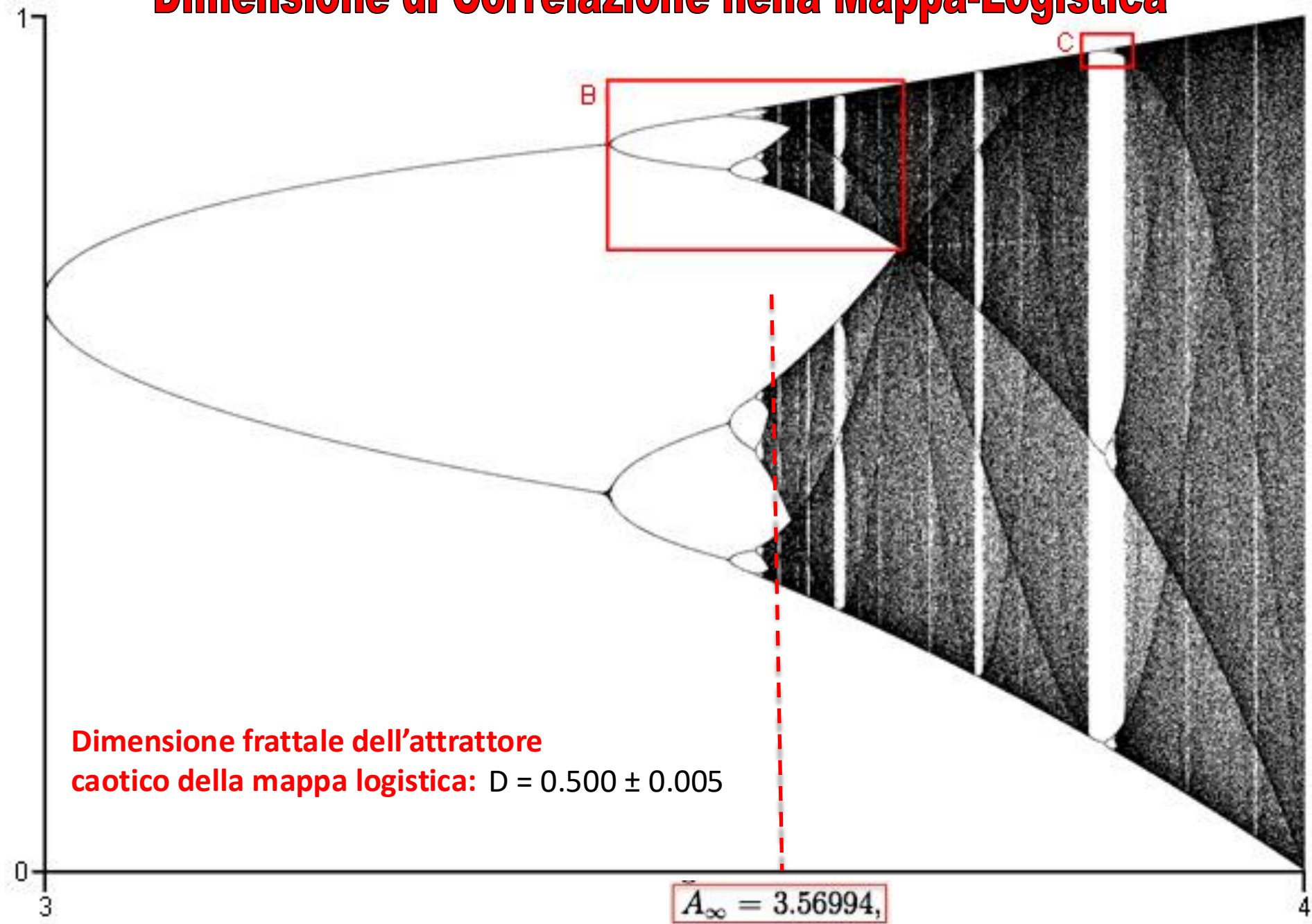
Figura 1.6: Calcolo della dimensione di correlazione del quadrato  $0.1 \times 0.1$  delle condizioni iniziali.

Come si vede dal relativo slider, si é utilizzato un valore di  $R - max$  inferiore a quello usato nei due casi precedenti per rimanere all'interno della regione di  $R$  in cui la curva  $C(R)$  soddisfa la relazione 1.6, ossia in cui la sua pendenza rimane sufficientemente costante da permettere la valutazione dell'indice di scaling  $D_c$  (questa regione prende il nome di scaling region).

Si noterá anche che in questo caso abbiamo dovuto usare un numero maggiore di mappe rispetto ai casi precedenti,  $N = 10000$  per l'esattezza, per rendere il ricoprimento del quadrato iniziale il piú uniforme possibile. Il lettore puó sperimentare da sé che usando un numero inferiore di mappe, ad esempio 5000, nelle medesime condizioni dell'esempio appena visto, si sarebbe ottenuto un indice di scaling pari a 1.866, dunque minore rispetto a prima, in quanto il ricoprimento sarebbe stato meno fitto.



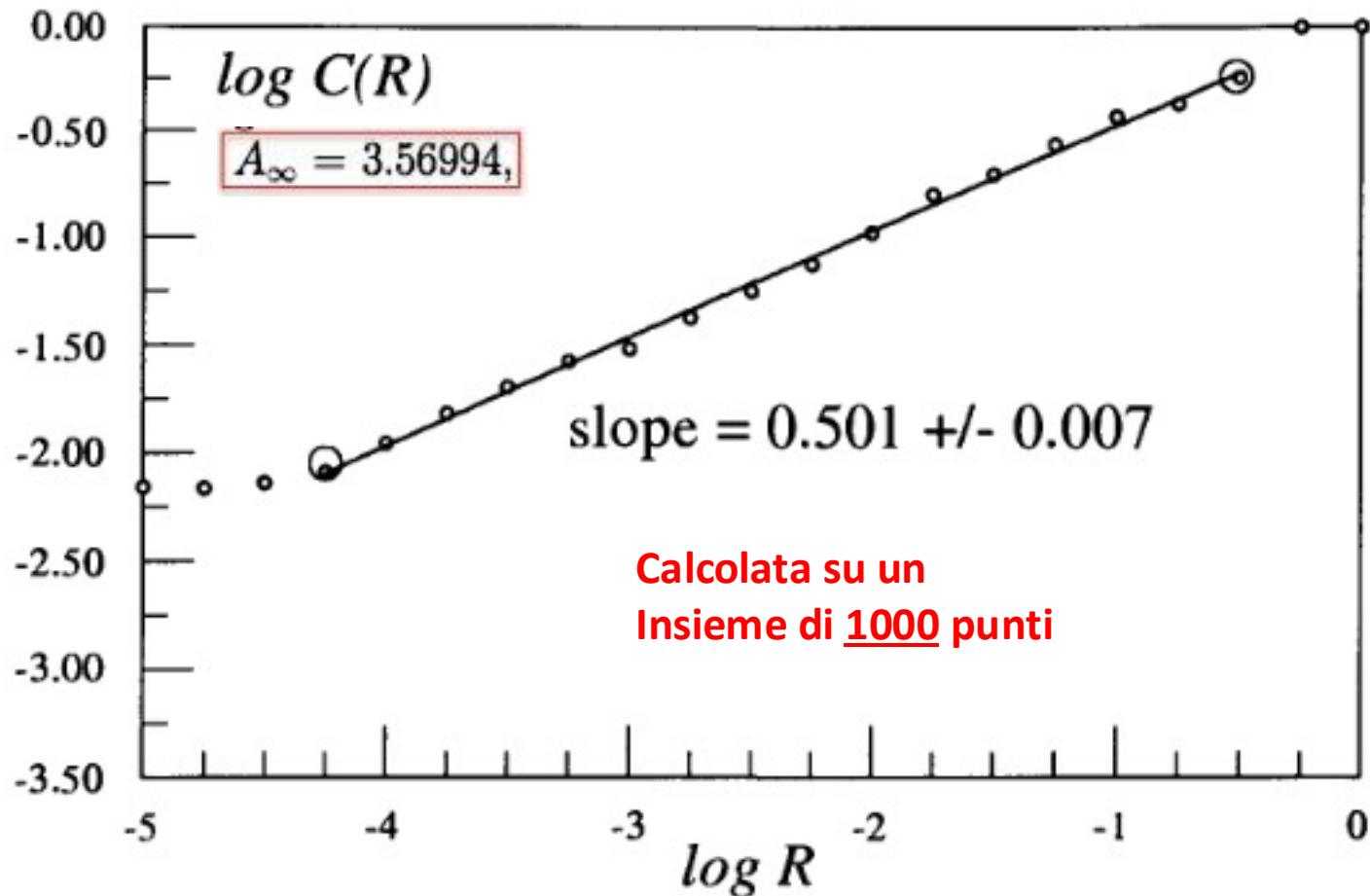
# Dimensione di Correlazione nella Mappa-Logistica



**Dimensione frattale dell'attrattore  
caotico della mappa logistica:  $D = 0.500 \pm 0.005$**

$A_\infty = 3.56994,$

# Dimensione di Correlazione nella Mappa-Logistica



**Fig. 9.10.** The same calculation as shown in Fig. 9.9 but with 1,000 data points used for calculating the correlation sum. The probabilities for each value of  $R$  were averaged over 40 randomly chosen points. The effects due to the finite number of data points are pushed to smaller values of  $R$ . The slope is much closer to that found by GRP83.

# Dimensione di Correlazione nella Mappa-Logistica

MAPPA DI HENON

$$x(n+1) = y(n) + 1 - C x(n)^2$$
$$y(n+1) = B x(n)$$



x



SETUP

iteration  
1169

N 10000

GO

count points  
2000

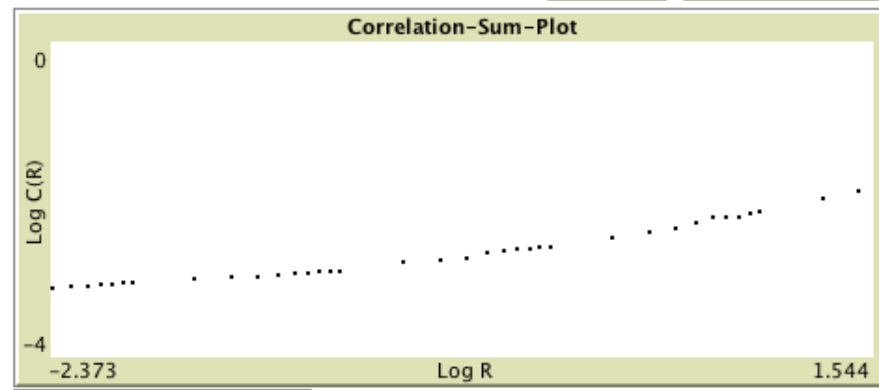
B 0.00

C 1.40

DIMENSIONE DI CORRELAZIONE

iter  
36

scaling-index  
0.536



R-min 0.00424

R-max 35.00

