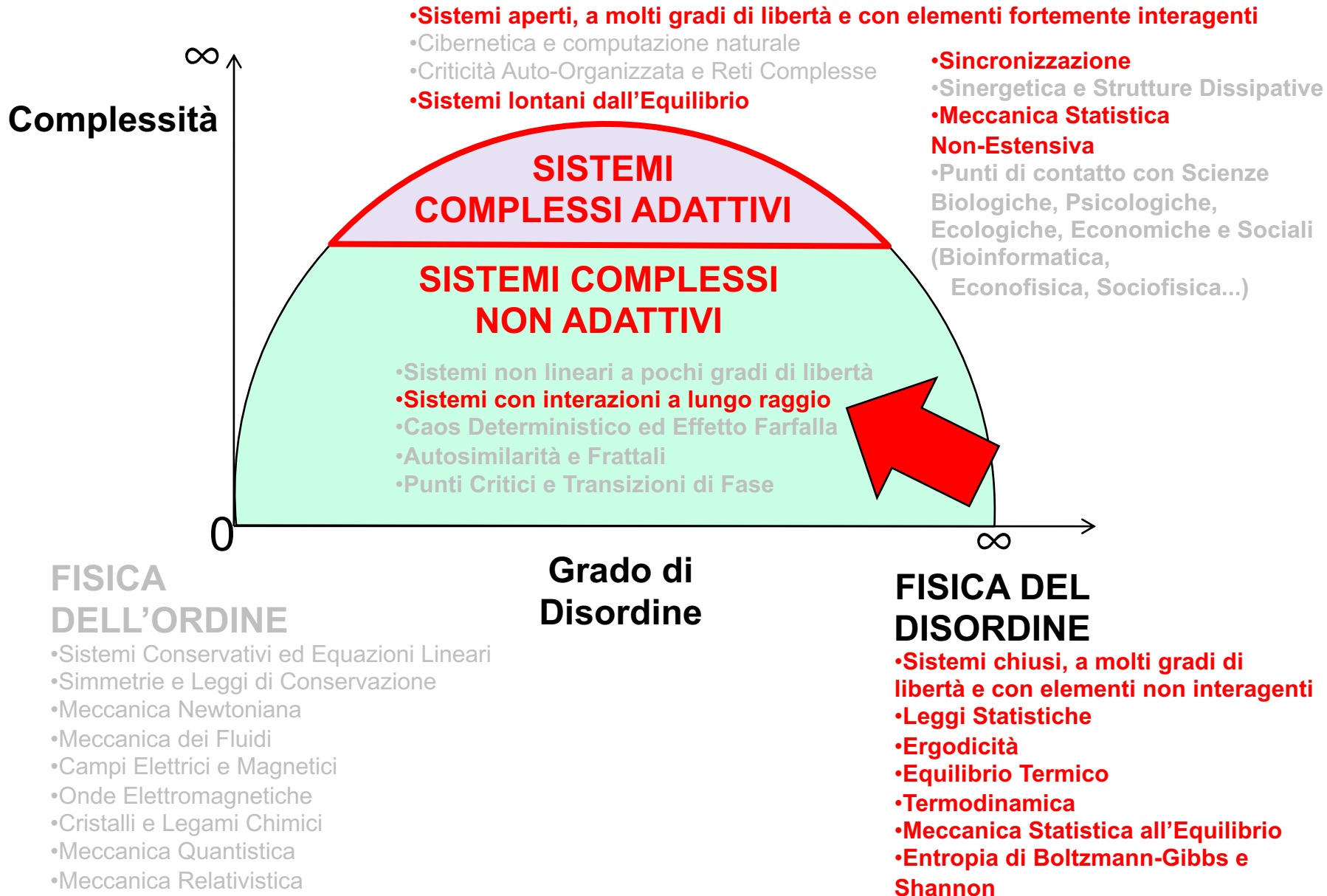


# Parte 3: Sistemi Dinamici a molti gradi di libertà



# Applicazioni: il modello HMF

L'**Hamiltonian Mean Field (HMF) model** è un modello XY a rotatori planari (di massa e modulo unitari, equivalenti a pendoli rigidi) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle  $N$  coppie di variabili canoniche:  $\{\theta_i, p_i\}$

## Sistema di $N$ rotatori accoppiati



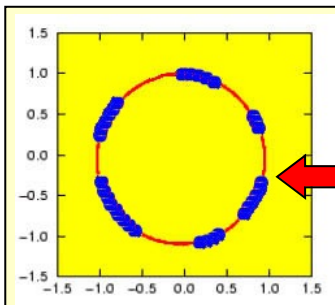
M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j)]$$



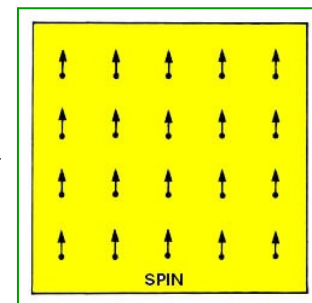
S. Ruffo

Antoni and Ruffo PRE 52 (1995) 2361



L'HMF può essere visto come un semplice reticolo di spin accoppiati...

...o come un sistema di particelle interagenti in moto (senza collisioni) su un cerchio unitario.



L'importanza di HMF sta nel fatto che si tratta di un toy-model il cui comportamento sembra essere **paradigmatico di una ampia classe di sistemi con interazioni a lungo range**, come per esempio sistemi nucleari o astrofisici (self-gravitating systems) e riveste un interesse particolare per lo studio della multiframmentazione e dei clusters atomici.

# Applicazioni: il modello HMF

L'**Hamiltonian Mean Field (HMF) model** è un modello XY a rotatori planari (di massa e modulo unitari, equivalenti a pendoli rigidi) con interazione a range infinito, definito dalla seguente hamiltoniana classica nelle  $N$  coppie di variabili canoniche:  $\{\theta_i, p_i\}$

## Sistema di $N$ rotatori accoppiati



M. Antoni

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)]$$



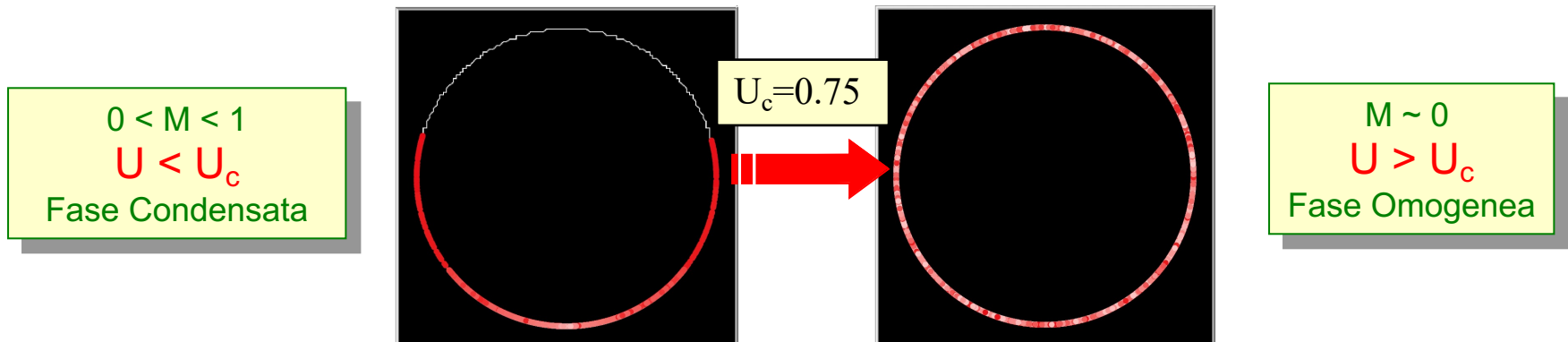
S. Ruffo

$$\vec{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i) \Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \Rightarrow$$

$$\vec{M} = (M_x, M_y) = M e^{i\phi}$$

**Magnetizzazione**

La soluzione in **Ensemble Canonico** del modello mostra una **transizione** da una fase **Condensata** (ferromagnetica con  $M > 0$ ) ad una fase **Omogenea** (paramagnetica, con  $M \sim 0$ ) in corrispondenza di un valore critico  $U_c=0.75$  della **Densità di Energia** ( $U=H/N$ ):



$0 < M < 1$   
 $U < U_c$   
Fase Condensata

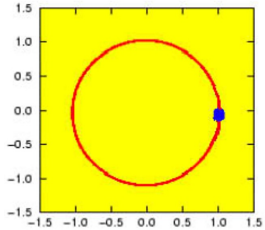
$U_c = 0.75$

$M \sim 0$   
 $U > U_c$   
Fase Omogenea

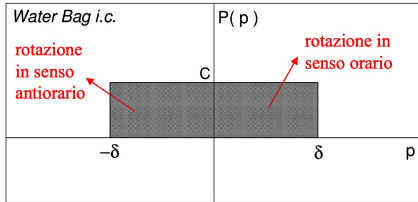
# Stati metastabili (QSS)

Equazioni del moto in campo medio:

$$\ddot{\theta}_i = M \sin(\Phi - \theta_i)$$

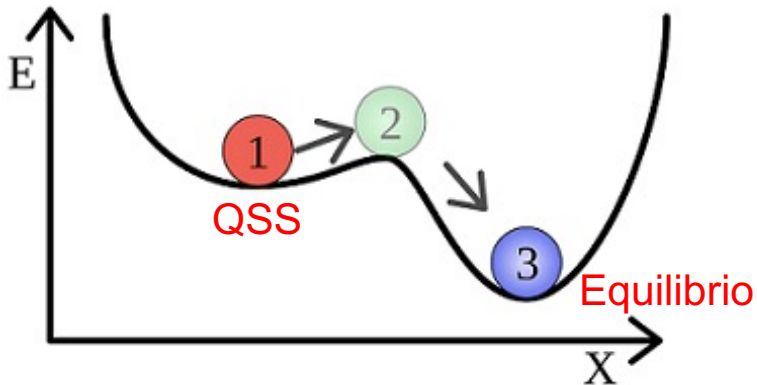
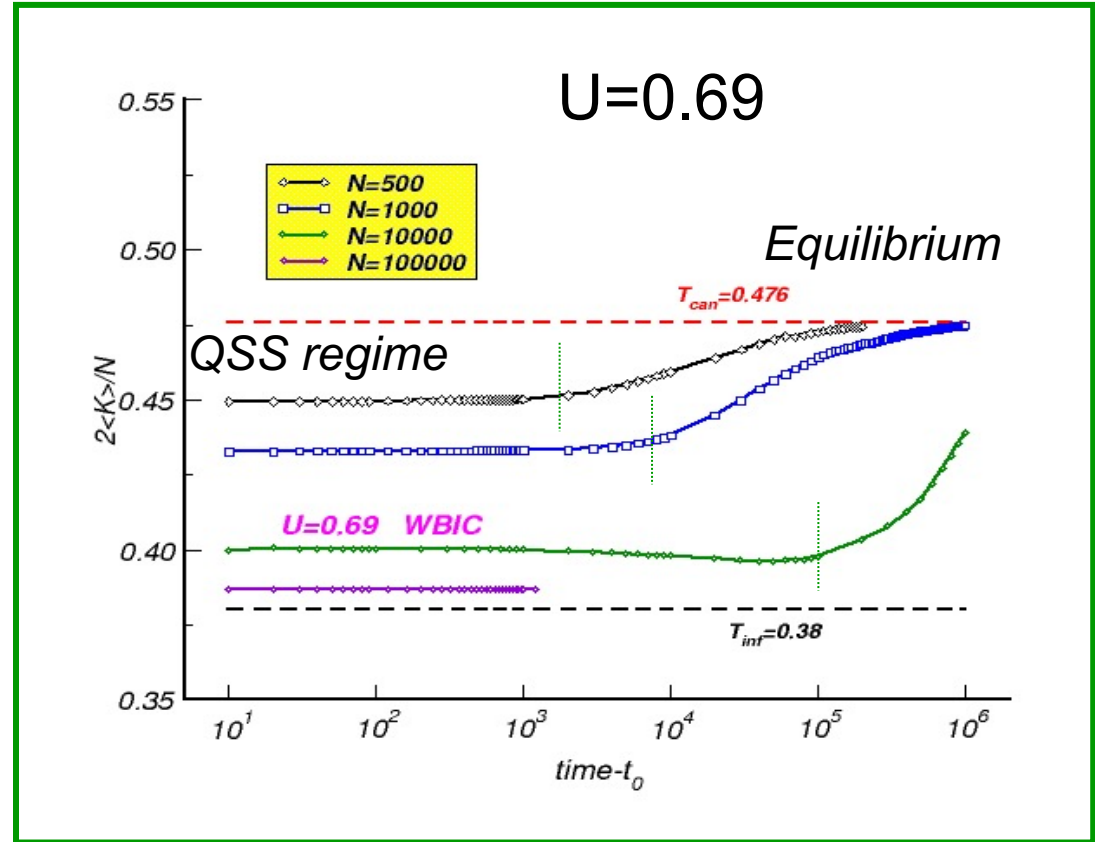


Tutti gli angoli = 0



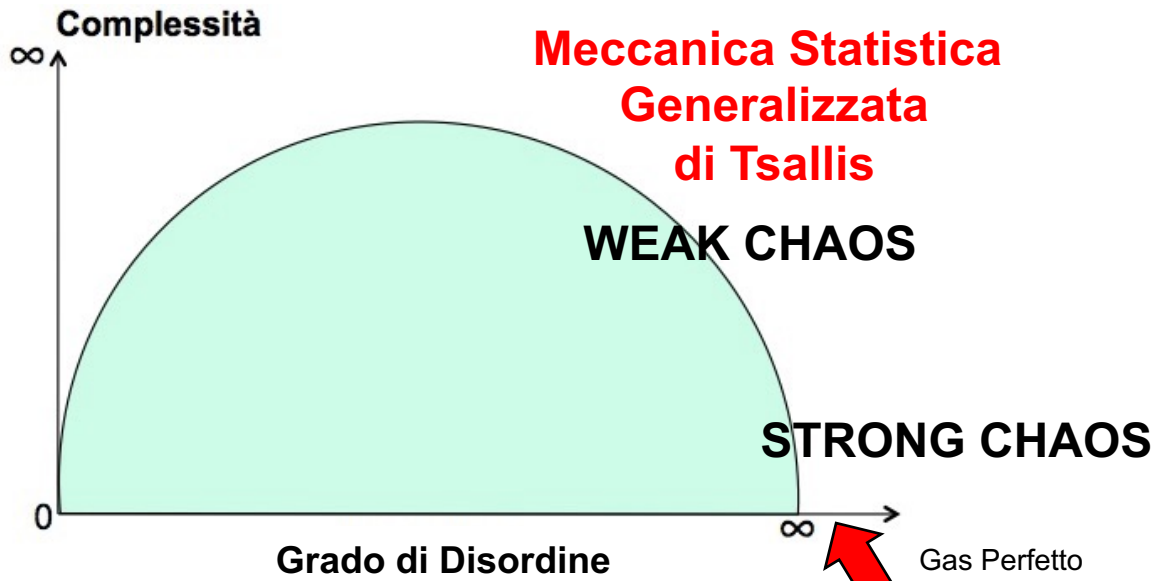
Distribuzione uniforme delle velocità

Partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio ( $M=1$ ), il sistema rimane intrappolato per un tempo molto lungo in **STATI QUASI-STAZIONARI (QSS) METASTABILI** dove la temperatura, è minore di quella prevista all'equilibrio ( $T_{eq}=0.476$ ).

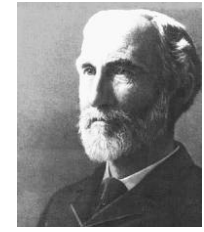


Quando  $N \rightarrow \infty$ , la temperatura dei QSS tende al valore limite  $T_{QSS} = 0.38$  e il sistema non raggiunge MAI il regime di equilibrio!

# Tutti gli indizi conducono verso verso una Meccanica Statistica generalizzata....

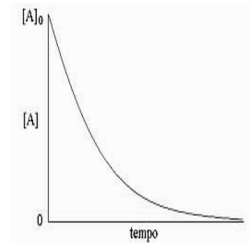
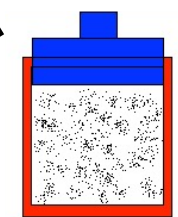


**Meccanica Statistica  
Generalizzata  
di Tsallis**

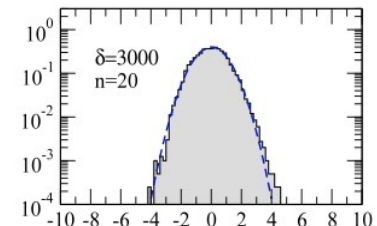


**Meccanica Statistica di  
Boltzmann-Gibbs**

Gas Perfetto



**ESPONENZIALE**



**GAUSSIANA**

# La Meccanica Statistica è q-invariante!

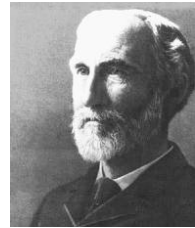
**Entropia di Tsallis**

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad \xrightarrow{p_i = \frac{1}{W}} \quad S_q = k \ln_q W \quad (S_1 = S_{BG})$$

con  $\sum_i p_i = 1$ .



L'entropia di Tsallis si riduce all'entropia di Boltzmann-Gibbs quando l'indice entropico  $q$  tende al valore **1**



La quantità  $|q - 1|$  misura dunque le correlazioni presenti nel sistema!

L'entropia di BG è sempre **additiva** ed è **estensiva per sistemi all'equilibrio** privi di correlazioni (**strong mixing**,  $q=1$ )

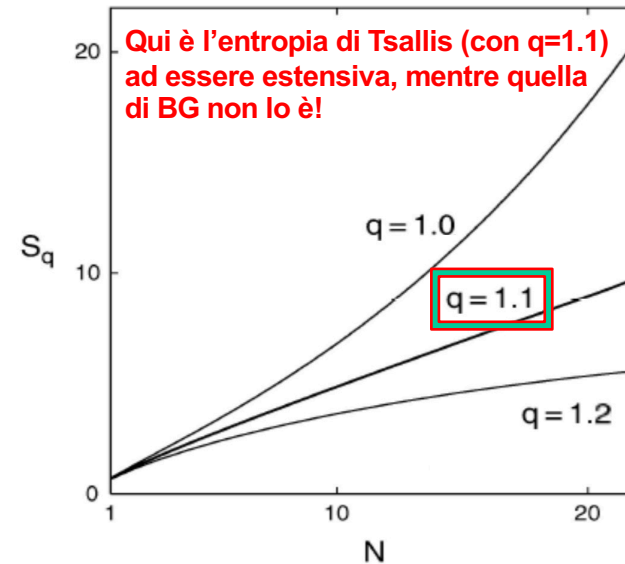
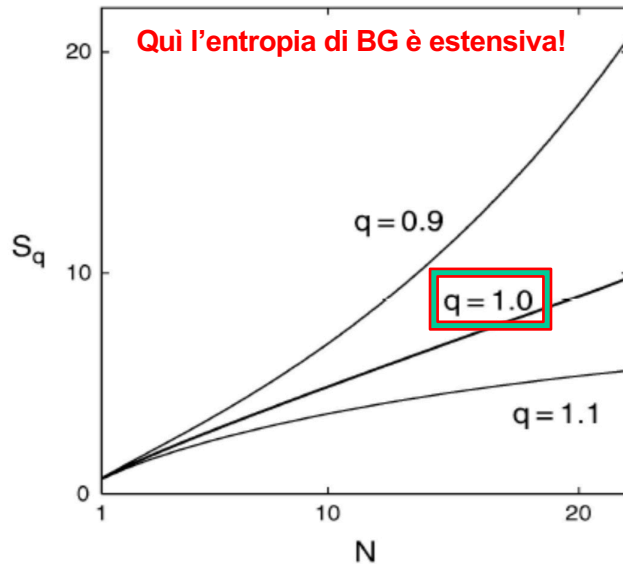
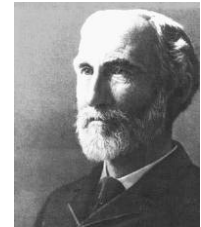
$$S(A + B) = S(A) + S(B)$$

L'entropia di Tsallis è sempre **non additiva** ed è **estensiva per sistemi fuori equilibrio** con correlazioni (**weak mixing**,  $q>1$ )

$$\frac{S_q(A + B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}$$

# E' il sistema a «scegliere» la forma entropica corretta

QUINDI E' IL SISTEMA A «DECIDERE» QUAL'E' L'ENTROPIA PIU' CORRETTA DA UTILIZZARE PER DESCRIVERLO: SARA' QUELLA CHE SODDISFA L'ESTENSIVITA', OSSIA QUELLA CHE SCALA LINEARMENTE CON N NEL LIMITE TERMODINAMICO (TEST DELL'ESTENSIVITA').



Così come la massimizzazione di  $S_{BG}$  permette di ottenere il peso di Boltzmann, la massimizzazione della  $S_q$  permette di ottenere una generalizzazione del peso di Boltzmann che si può esprimere attraverso una funzione  $q$ -esponenziale, che per  $q > 1$  è una legge di potenza:

$$e_q\left(-\frac{E}{kT}\right) = \left[1 - (1-q)\frac{E}{kT}\right]^{\frac{1}{1-q}} \rightarrow e^{-\frac{E}{kT}} \text{ per } q \rightarrow 1$$

# Nota matematica 1: come ottenere il peso di Boltzmann (esponenziale) dalla massimizzazione di $S_{BG}$

Partiamo dall'entropia di Boltzmann-Gibbs per un sistema con stati discreti  $i = 1, \dots, W$ :

$$S_{BG} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i.$$

Vogliamo trovare la distribuzione  $\{p_i\}$  che massimizza  $S_{BG}$  sotto due vincoli:

## 1. Normalizzazione

$$\sum_i p_i = 1.$$

## 2. Energia media fissata

$$\sum_i p_i E_i = U.$$

Introduciamo due moltiplicatori di Lagrange,  $\alpha$  e  $\beta$ , e definiamo

$$\Phi = -k_B \sum_i p_i \ln p_i - \alpha \left( \sum_i p_i - 1 \right) - \beta \left( \sum_i p_i E_i - U \right).$$

Imponiamo che la variazione rispetto a ciascun  $p_i$  sia nulla:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = -k_B (\ln p_i + 1) - \alpha - \beta E_i = 0.$$

Da cui

$$\ln p_i = -\frac{\alpha}{k_B} - 1 - \frac{\beta}{k_B} E_i.$$

Esponenziando:

$$p_i = A e^{-\frac{\beta}{k_B} E_i},$$

dove

$$A = e^{-1-\alpha/k_B}.$$



Definendo la funzione di partizione

$$Z = \sum_i e^{-\frac{\beta}{k_B} E_i},$$

si ottiene

$$A = \frac{1}{Z},$$

e quindi

$$p_i = \frac{e^{-\frac{\beta}{k_B} E_i}}{Z}.$$

A questo punto, per ottenere la forma standard del peso di Boltzmann, bisogna definire

$$\beta' = \frac{\beta}{k_B}.$$

Allora

$$p_i = \frac{e^{-\beta' E_i}}{Z},$$

**esponenziale**

e dalla termodinamica si identifica

$$\beta' = \frac{1}{k_B T}.$$

Questa è la convenzione oggi universalmente usata in meccanica statistica.

# Nota matematica 2: come ottenere il peso di Tsallis (legge di potenza) dalla massimizzazione di $S_q$

## Caso Tsallis

Partiamo invece da

$$S_q = -k_B \sum_i p_i \ln_q p_i.$$

Massimizziamo

$$\Phi = S_q - \alpha \left( \sum_i p_i - 1 \right) - \beta \left( \sum_i p_i E_i - U \right). \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = 0.$$

Ora serve la derivata di  $p \ln_q p$ .

Usando

$$\ln_q p = \frac{p^{1-q} - 1}{1 - q},$$

si trova

$$\frac{d}{dp} [p \ln_q p] = \frac{(2 - q)p^{1-q} - 1}{1 - q}.$$

Pertanto la condizione di stazionarietà diventa

$$-k_B \frac{(2 - q)p_i^{1-q} - 1}{1 - q} - \alpha - \beta E_i = 0.$$

Riordinando,

$$p_i^{1-q} = A - \beta E_i,$$

dove  $A$  e  $B$  assorbono tutte le costanti.

Elevando alla potenza  $1/(1 - q)$ ,

$$p_i = (A - \beta E_i)^{\frac{1}{1-q}}.$$

Fattorizzando  $A$ ,

$$p_i = A^{\frac{1}{1-q}} \left[ 1 - \frac{\beta}{A} E_i \right]^{\frac{1}{1-q}}.$$

Definendo

$$(1 - q)\beta_q = \frac{\beta}{A},$$

si ottiene immediatamente

$$p_i = \frac{1}{Z_q} [1 - (1 - q)\beta_q E_i]^{\frac{1}{1-q}}.$$

Ma questa non è altro che

$$p_i = \frac{e_q(-\beta_q E_i)}{Z_q},$$

**legge di  
potenza**

dove

**q-esponenziale**

$$e_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}$$

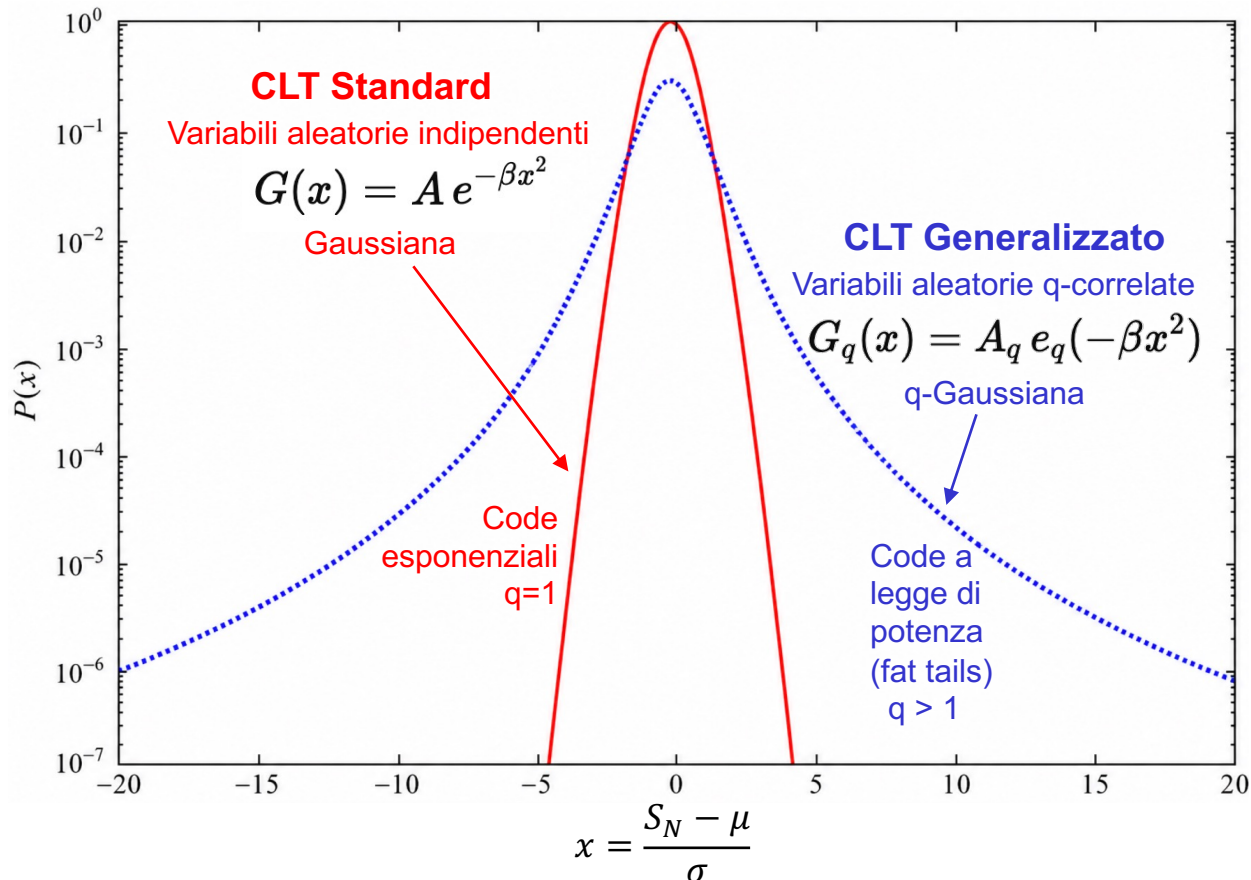
è la funzione inversa del  $q$ -logaritmo.



# Teorema Centrale del Limite (CLT): Standard e Generalizzato

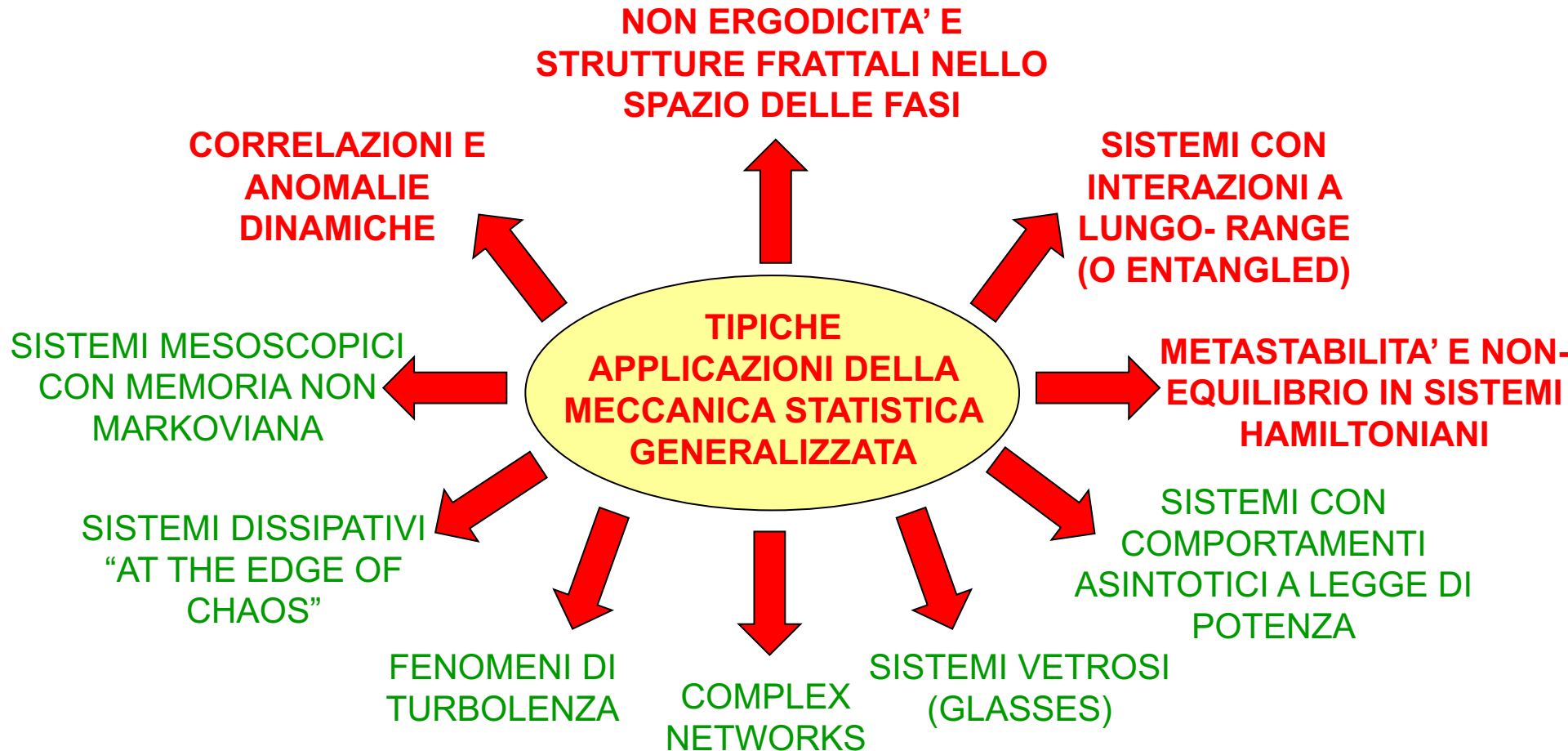
Supponiamo di avere una somma di  $N$  variabili aleatorie identicamente distribuite

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i \text{ con media } \mu \text{ e deviazione standard } \sigma$$





# La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi

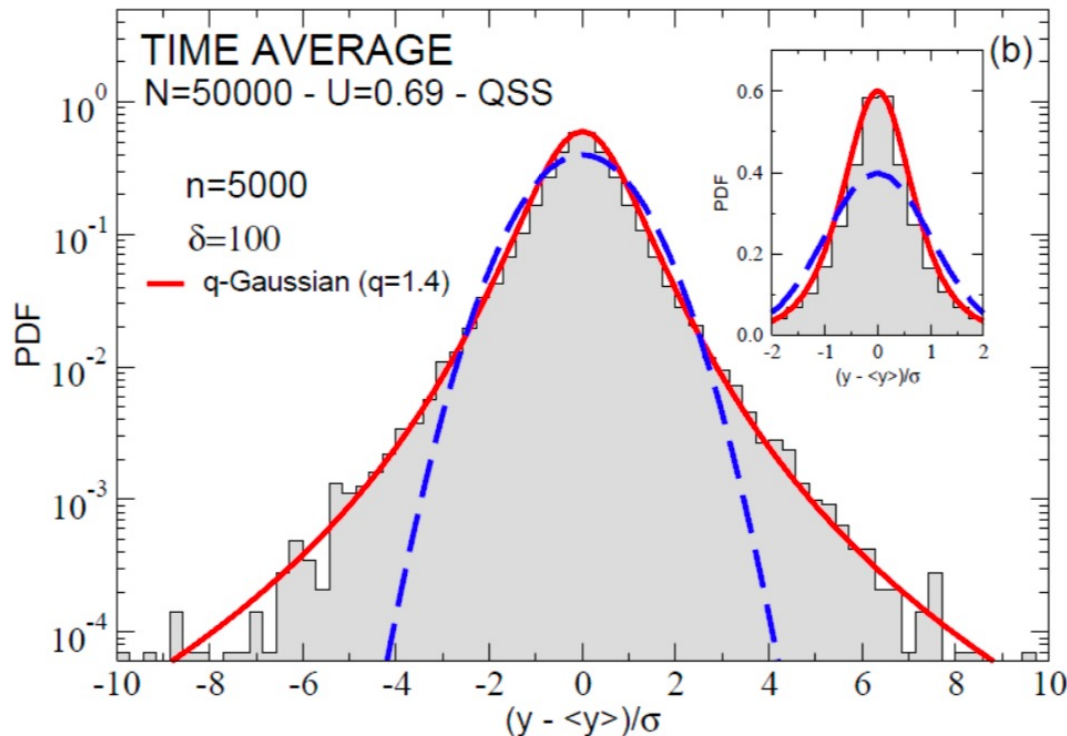


# Violazione del Teorema Centrale del Limite nel modello HMF

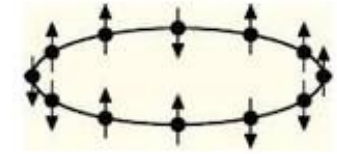
Abbiamo visto che, se nel **modello HMF** costruiamo delle variabili  $y$  definite come somma delle velocità:

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (p_j(i) - \langle p_j \rangle) \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, N$$

si osservano delle **violazioni del CLT negli stati QSS**, dove si osservano delle distribuzioni  $P(y)$  q-Gaussiane, con code a legge di potenza:



# Distribuzione delle velocità nel Modello $\alpha$ -XY (d=1)



$$H_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2\tilde{N}} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)}{r_{ij}^\alpha}$$

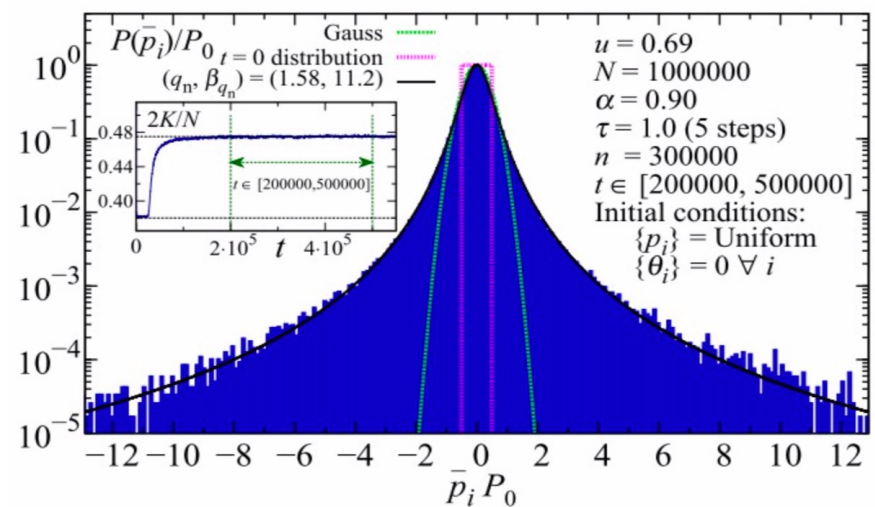
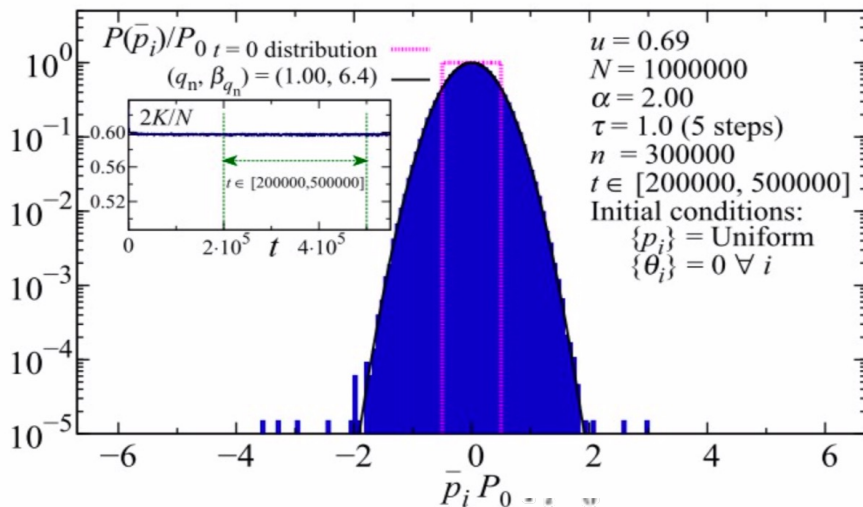
$\alpha$  fissa il range dell'interazione ( $\alpha = 0 \rightarrow$  HMF)

$\alpha > d$ : l'interazione è a corto raggio

Se  $d=1$ , per  $\alpha > 1$ , ossia quando l'interazione è a corto raggio, la distribuzione delle velocità all'equilibrio è quella **gaussiana** di Boltzmann-Gibbs:

$0 < \alpha < d$ : l'interazione è a lungo raggio

Per  $\alpha < 1$ , ossia quando l'interazione è a lungo raggio, il sistema resta lontano dall'equilibrio e la distribuzione delle velocità è **q-gaussiana**:



# Distribuzione delle velocità nel Modello $\alpha$ -XY ( $d=1$ )

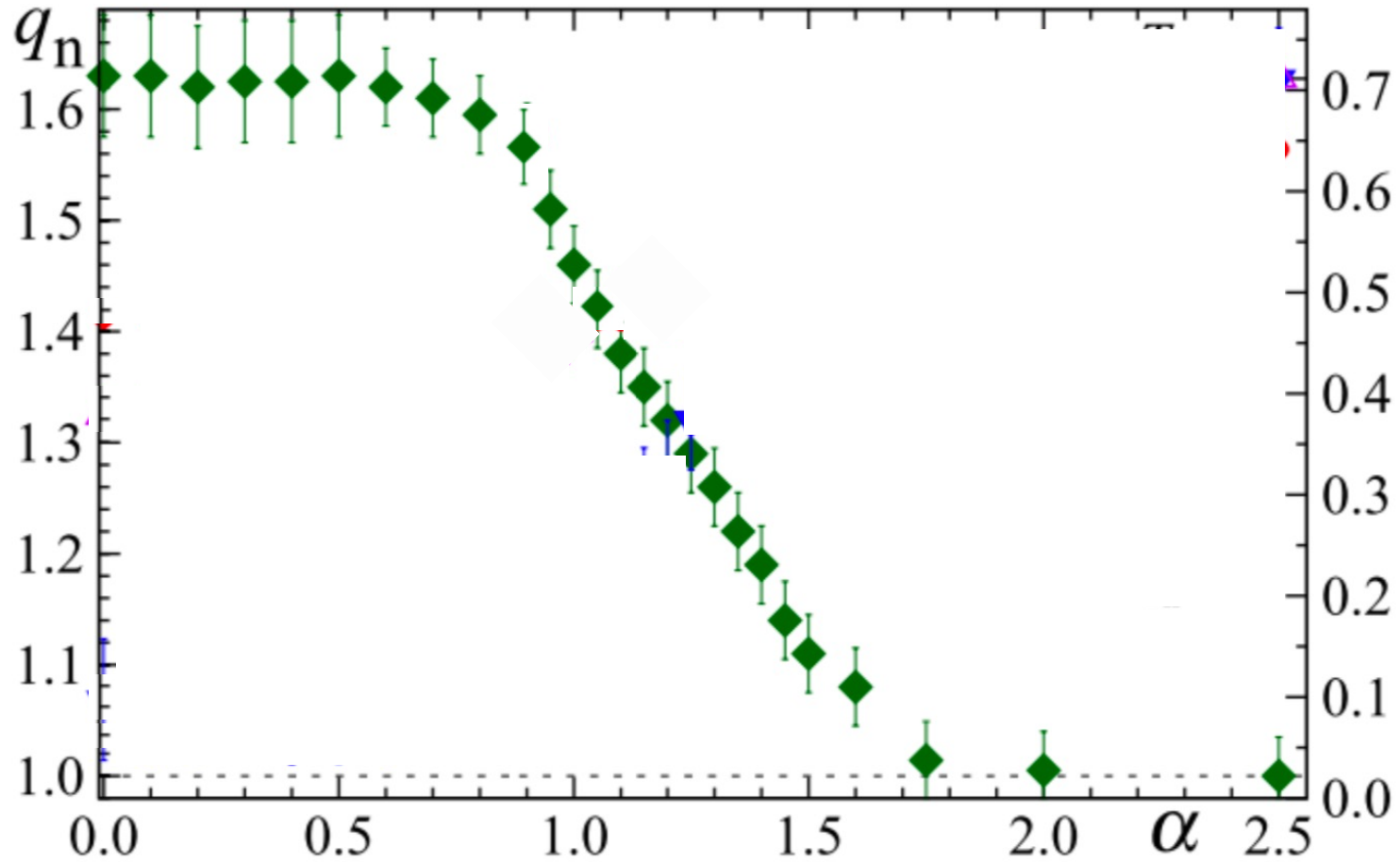
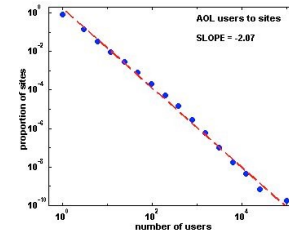


Figura 3.1.3: indice entropico  $q$  al variare del range di interazione  $\alpha$ .

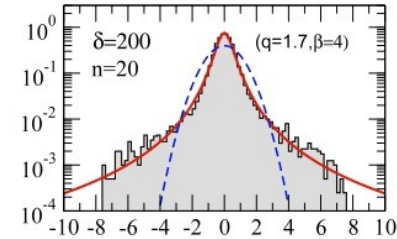
# q-Statistica di Tsallis all'Edge of Chaos



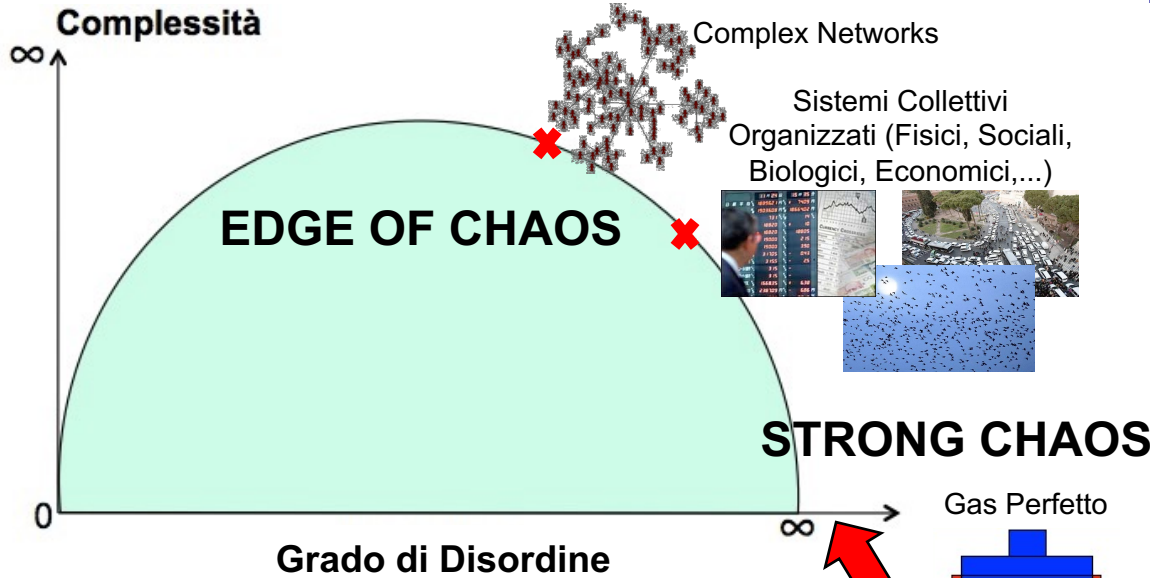
## Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis



LEGGE DI POTENZA

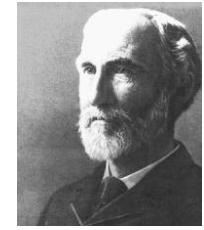


q-GAUSSIANA



Complex Networks

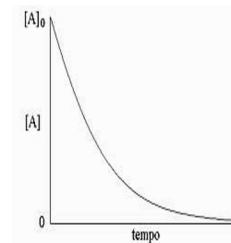
Sistemi Collettivi Organizzati (Fisici, Sociali, Biologici, Economici,...)



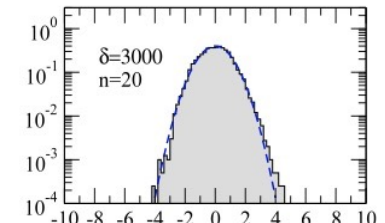
## Meccanica Statistica di Boltzmann-Gibbs

Gas Perfetto

Universo come gas perfetto di Galassie



ESPONENZIALE

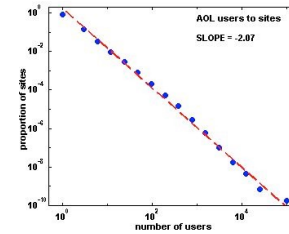


GAUSSIANA

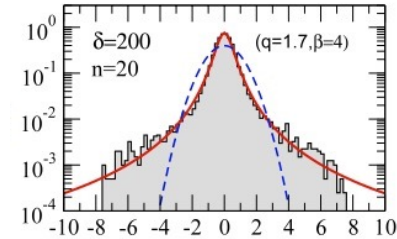
# q-Statistica di Tsallis all'Edge of Chaos



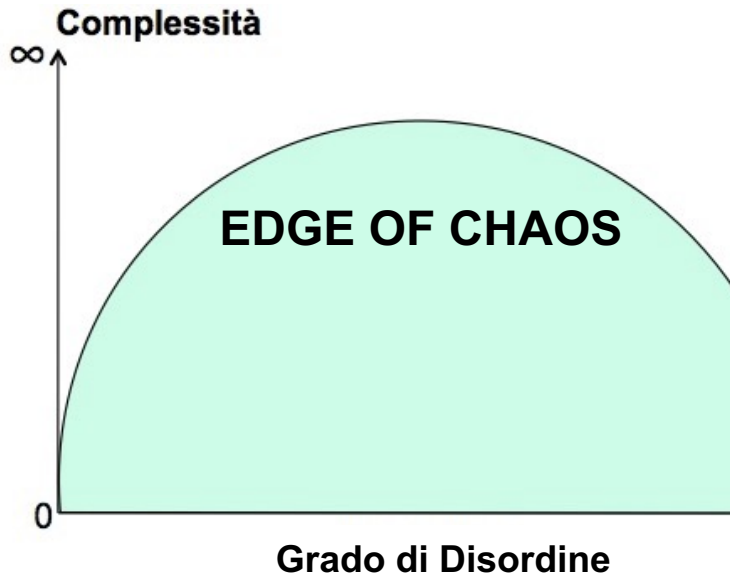
## Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis



LEGGE DI POTENZA



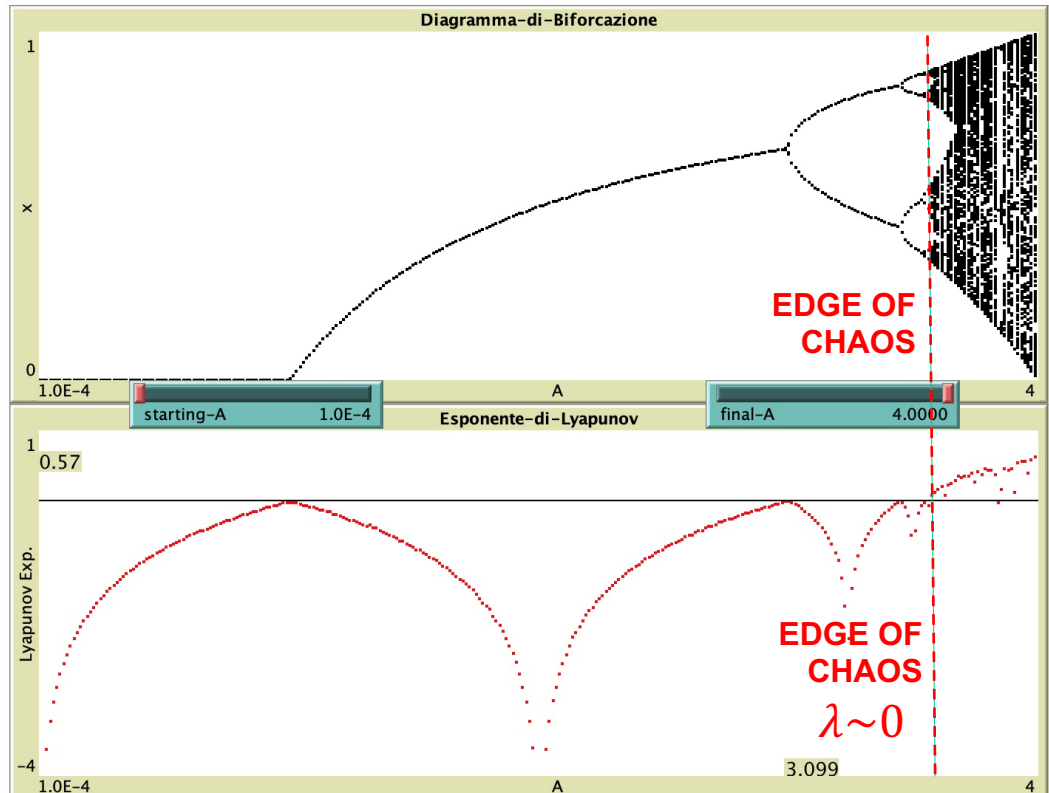
q-GAUSSIANA



PLOT BIFURCATION + LYAPUNOV

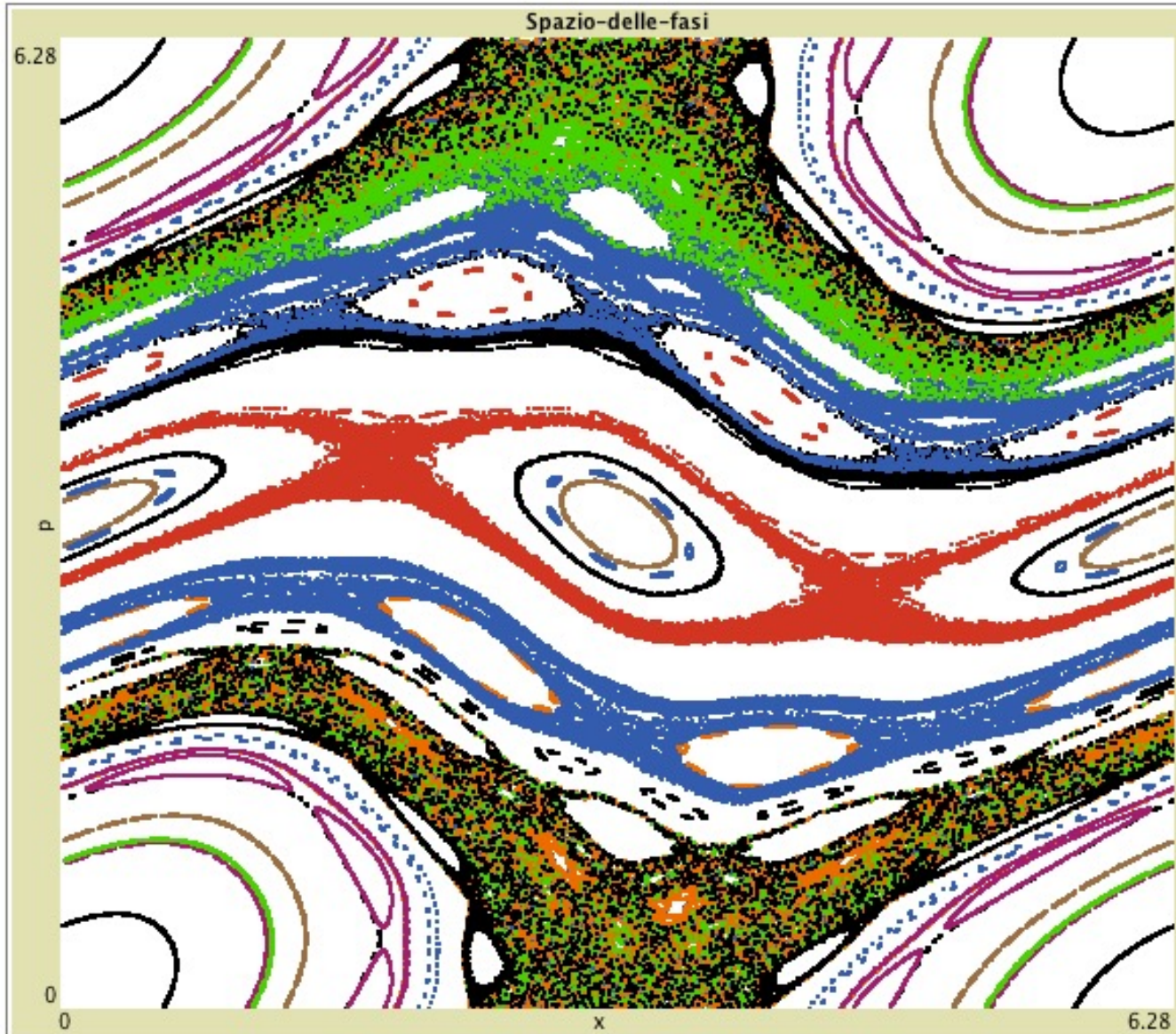
MAPPA LOGISTICA:  
 $x(n+1) = A x(n) [1 - x(n)]$

$1 < A < 3$  punto-fisso  
 $3 < A < 3.56994$  period-doubling  
 $3.56994 < A < 4$  caos



# q-Statistica di Tsallis e Mappe Conservative

MAPPA STANDARD



SETUP

GO

SETUP-NEW-IC

K

0.93

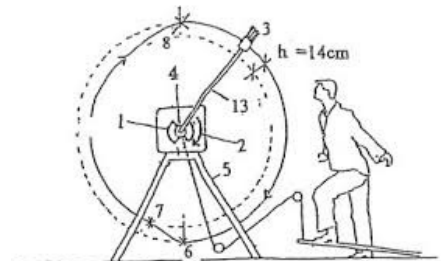
iteration

27877

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

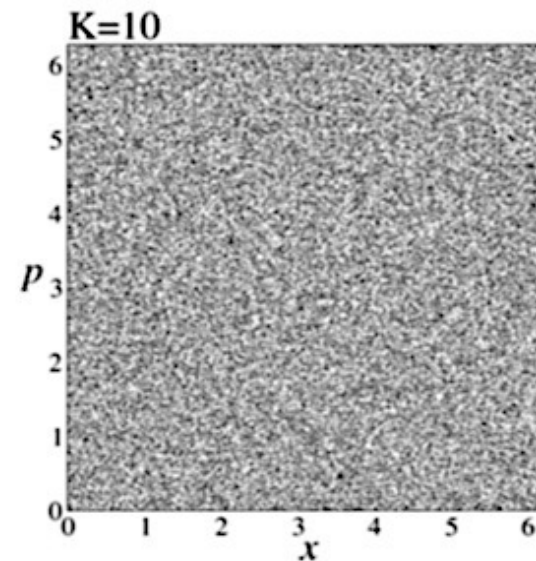
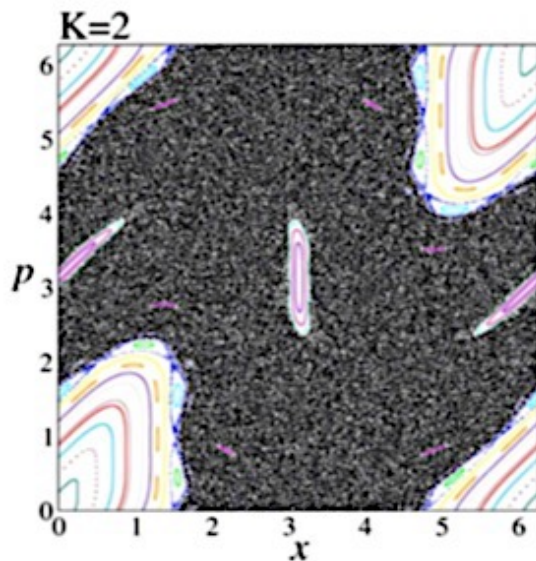
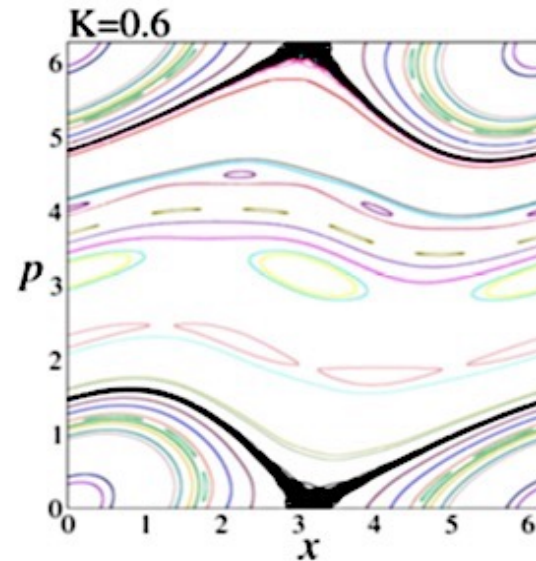
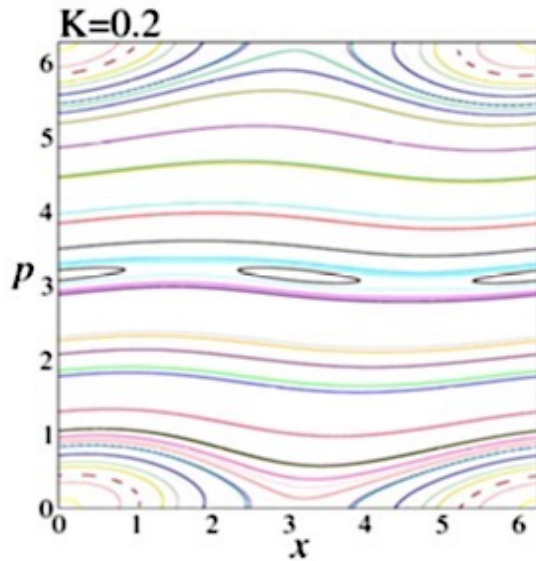
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where  $p$  and  $x$  are taken as modulo  $2\pi$ .



Kicked Rotator

# Edge of Chaos nella Mappa Standard

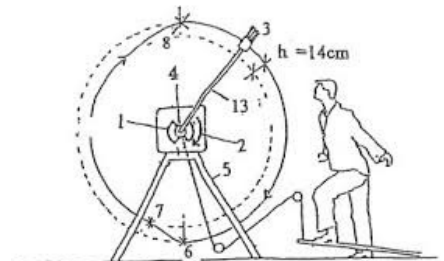


Tirnakli and Borges  
Nature / Scientific Reports 6, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

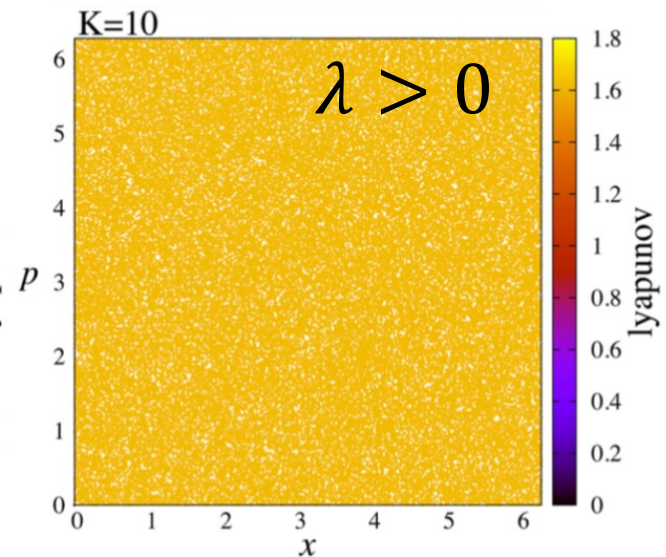
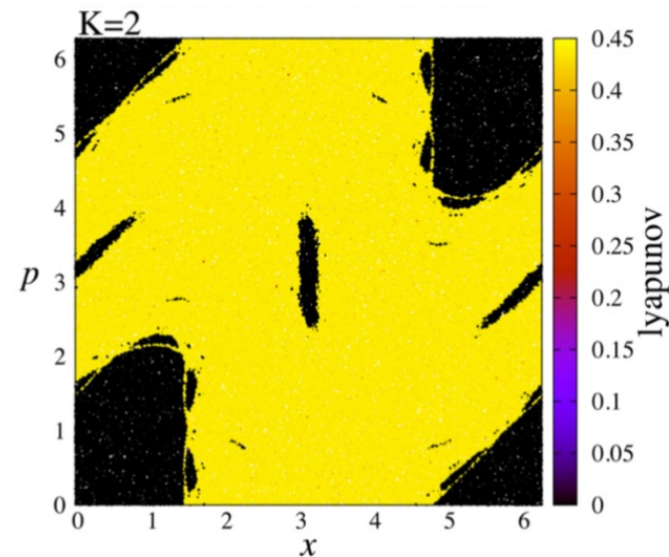
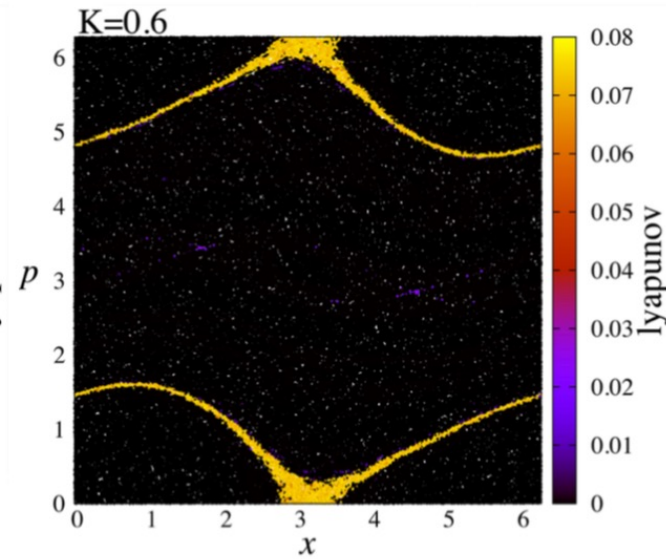
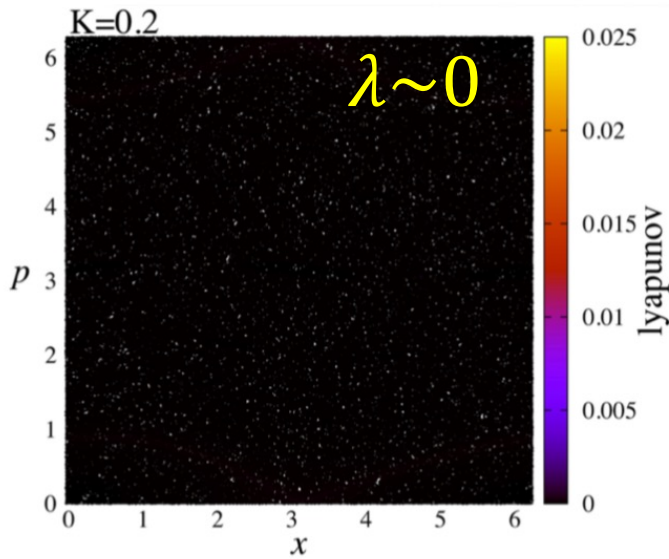
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where  $p$  and  $x$  are taken as modulo  $2\pi$ .



**Kicked Rotator**

# Edge of Chaos nella Mappa Standard

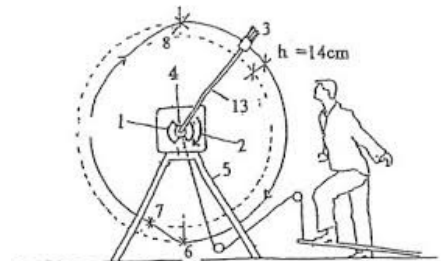


Tirnakli and Borges  
Nature / Scientific Reports **6**, 23644 (2016)

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$

$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1}$$

where  $p$  and  $x$  are taken as modulo  $2\pi$ .

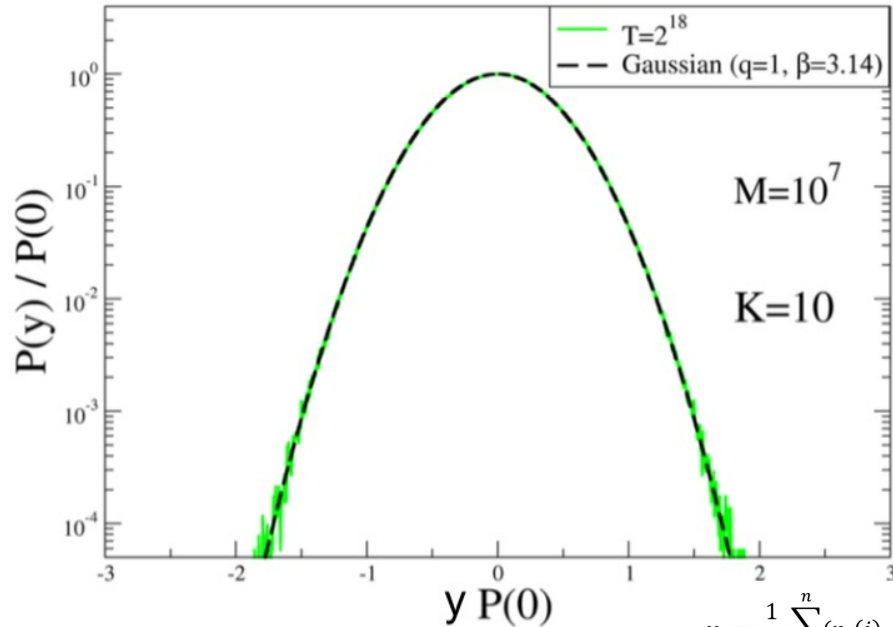


**Kicked Rotator**

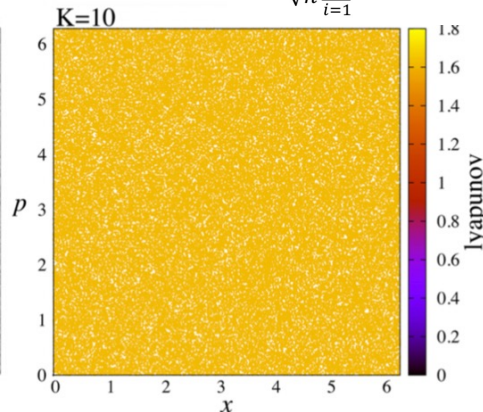
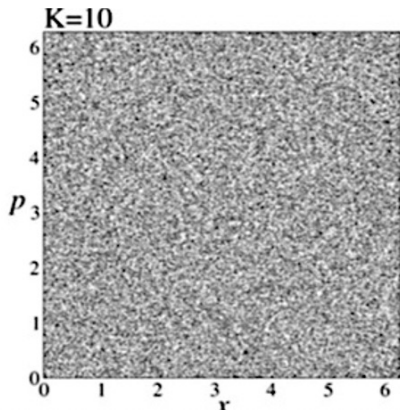
# Violazione del CLT nella Mappa Standard



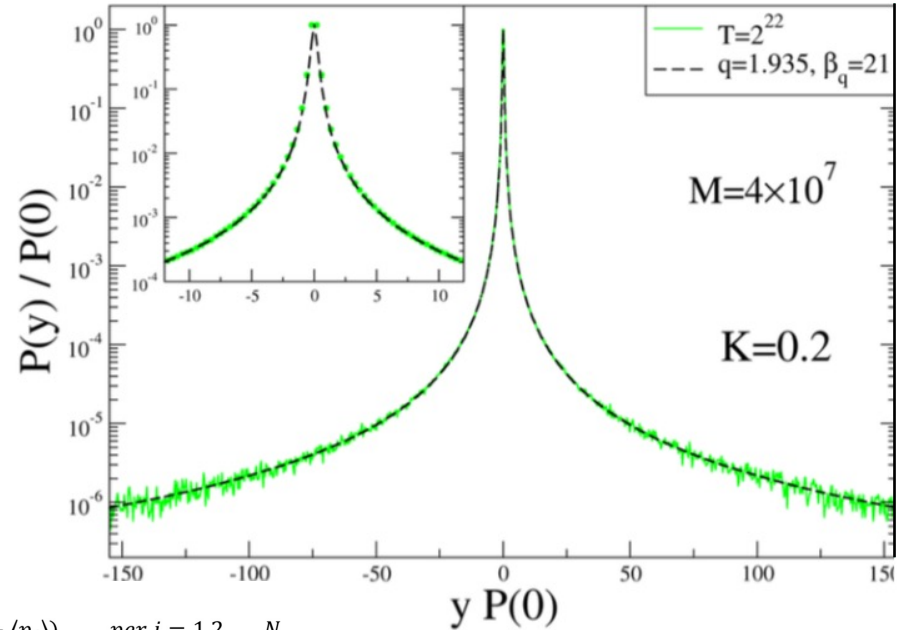
## STRONG CHAOS



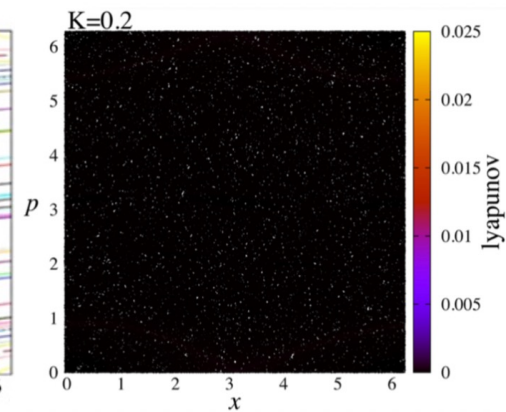
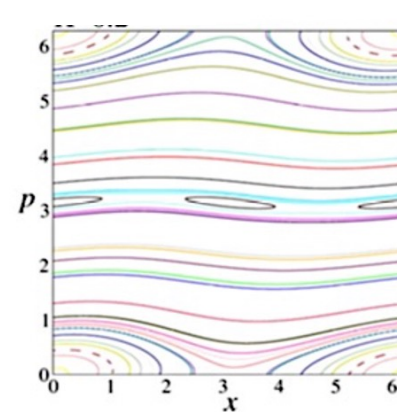
$$y_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (p_j(i) - \langle p_j \rangle)$$



## EDGE OF CHAOS



per  $j = 1, 2, \dots, N$





# La Meccanica Statistica di Tsallis e i Sistemi complessi



# Sincronizzazione: il ruolo delle correlazioni a lungo raggio



# Sincronizzazione: il ruolo delle correlazioni a lungo raggio

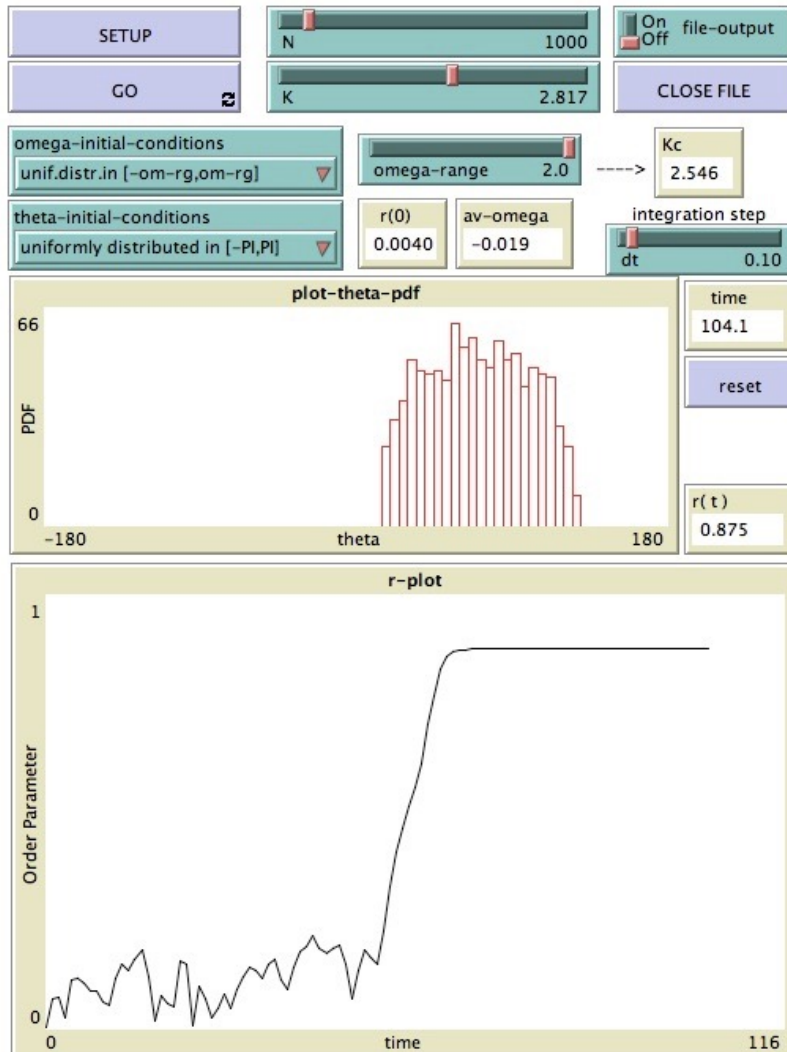
## **Sistema di 5 oscillatori accoppiati**



# Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.

## Sistema di N oscillatori accoppiati



# Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.

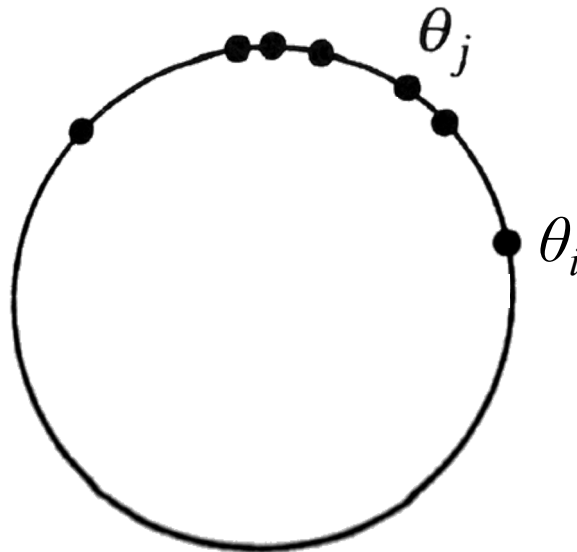


Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di  $N$  oscillatori (o rotatori) accoppiati*, ognuno caratterizzato da una **fase**  $\theta_i(t)$  al tempo  $t$  e da una **frequenza** propria  $\omega_i$ , indipendente dal tempo.

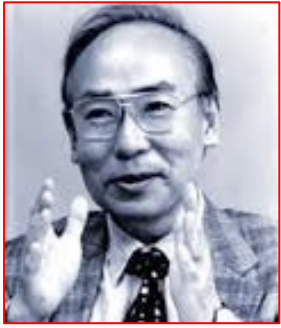
$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

dove  $K \geq 0$  è la **costante di accoppiamento** e il fattore  $1/N$  assicura un corretto comportamento al limite di  $N \rightarrow \infty$ . Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field*, cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un **flusso dissipativo a  $N$  dimensioni**.



# Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.



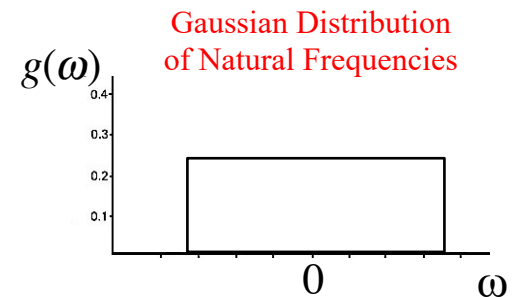
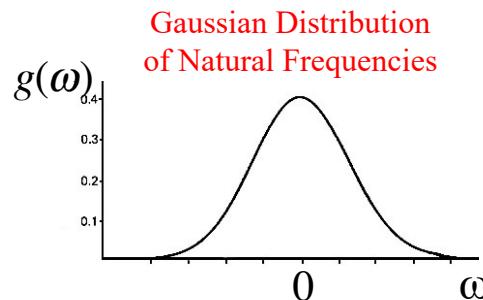
Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di  $N$  oscillatori (o rotatori) accoppiati*, ognuno caratterizzato da una **fase**  $\theta_i(t)$  al tempo  $t$  e da una **frequenza** propria  $\omega_i$ , indipendente dal tempo.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

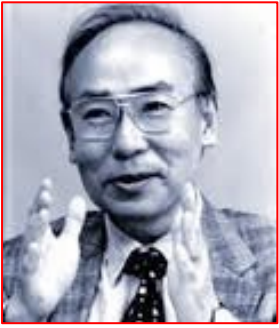
dove  $K \geq 0$  è la **costante di accoppiamento** e il fattore  $1/N$  assicura un corretto comportamento al limite di  $N \rightarrow \infty$ . Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field*, cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un **flusso dissipativo a  $N$  dimensioni**.

Nel limite di  $N \rightarrow \infty$  la **distribuzione delle frequenze naturali**  $\omega_i$  può essere descritta da una certa funzione di probabilità  $g(\omega)$ , tipicamente Gaussiana o uniforme, che per semplicità si assume simmetrica rispetto alla sua frequenza media  $\Omega$  (che per la simmetria rotazionale del sistema si può considerare nulla, cioè  $\Omega=0$ ).



# Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.



Yoshiki Kuramoto

Il **modello di Kuramoto** descrive la dinamica di un *sistema di  $N$  oscillatori (o rotatori) accoppiati*, ognuno caratterizzato da una **fase**  $\theta_i(t)$  al tempo  $t$  e da una **frequenza** propria  $\omega_i$ , indipendente dal tempo.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

dove  $K \geq 0$  è la **costante di accoppiamento** e il fattore  $1/N$  assicura un corretto comportamento al limite di  $N \rightarrow \infty$ . Si noti che ogni oscillatore interagisce allo stesso modo con tutti gli altri, quindi si tratta anche in questo caso di un modello *mean field*, cioè con interazioni a lungo raggio come nel modello HMF, ma stavolta invece che con un flusso Hamiltoniano abbiamo a che fare con un **flusso dissipativo a  $N$  dimensioni**.

Nel limite di  $N \rightarrow \infty$  la **distribuzione delle frequenze naturali**  $\omega_i$  può essere descritta da una certa funzione di probabilità  $g(\omega)$ , tipicamente Gaussiana o uniforme, che per semplicità si assume simmetrica rispetto alla sua frequenza media  $\Omega$  (che per la simmetria rotazionale del sistema si può considerare nulla, cioè  $\Omega=0$ ).

Secondo l'equazione (1), mentre ogni oscillatore tende a muoversi **indipendentemente** con la propria frequenza naturale  $\omega_i$ , il termine di accoppiamento tende a **sincronizzarlo** con tutti gli altri. Se, quindi, per bassi valori del parametro  $K$  il sistema rimane incoerente e desincronizzato, per alti valori di  $K$  esso tenderà verso la sincronizzazione collettiva. Come vedremo più avanti, il passaggio dallo stato incoerente a quello sincronizzato può essere visto a tutti gli effetti come una **transizione di fase** spontanea al crescere del valore del parametro di accoppiamento oltre una certa **soglia critica**.

# Comprendere la sincronia: il Modello di Kuramoto

Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.

E' necessario, prima di procedere oltre, fare una breve precisazione, utile a chiarire la dinamica di sincronizzazione degli oscillatori. Il fatto che il sistema sia **dissipativo** induce a pensare che ad un certo punto la dinamica si arresti. In effetti, questo sarebbe vero se non ci fossero i termini  $\omega_i$  ad agire come **forzanti esterne**. Infatti, la dinamica degli oscillatori si organizza sempre in modo tale che la media delle loro velocità, a qualsiasi istante di tempo, sia sempre costante e uguale a  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\sin \theta_j \cos \theta_i - \cos \theta_j \sin \theta_i) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N^2} \left[ \sum_{i,j=1}^N \sin \theta_j \cos \theta_i - \sum_{i,j=1}^N \cos \theta_j \sin \theta_i \right],\end{aligned}$$

ed invertendo gli indici (muti) nell'ultima sommatoria, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{K}{N^2} \left[ \sum_{i,j=1}^N \sin \theta_j \cos \theta_i - \sum_{i,j=1}^N \cos \theta_i \sin \theta_j \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i = \Omega = \text{costante}.\end{aligned}$$

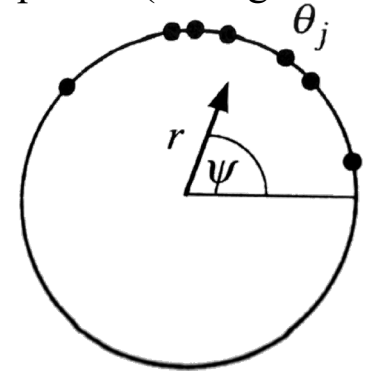
Dunque gli oscillatori si fermeranno solo nel caso in cui la distribuzione  $g(\omega)$  sia tale che  $\Omega = 0$ . In realtà, **per  $N$  finito**, nonostante  $g(\omega)$  sia simmetrica,  $\Omega$  non è mai esattamente nulla e **gli oscillatori continueranno a ruotare, tanto più lentamente quanto più è grande  $N$** .

# Il parametro d'ordine del Modello di Kuramoto

Per poter caratterizzare lo stato macroscopico del sistema e dare una misura della sua sincronizzazione è conveniente introdurre il seguente **parametro d'ordine** complesso (analogo della magnetizzazione  $M$  nel modello HMF):

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (2)$$

Essendo uno stato qualunque del sistema  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$  rappresentato come un set ordinato di  $N$  punti  $e^{i\theta_i}$  su un cerchio unitario, di conseguenza  $r e^{i\psi}$  rappresenta il centroide delle fasi degli oscillatori. **Il raggio  $r$  misura la coerenza in fase e  $\psi$  è la fase media.**



Nel caso in cui gli oscillatori si muovano come un unico gruppo, le loro fasi assumono in media lo stesso valore  $\psi$  ed  $r \simeq 1$ , cioè il sistema è simile ad un **oscillatore gigante**. Se invece gli oscillatori sono disposti in maniera casuale sul cerchio unitario, allora le loro fasi sono **uniformemente distribuite** e le oscillazioni individuali si sommano in maniera incoerente, dunque  $r \simeq 0$ . Perciò il valore di  **$r$  è una misura macroscopica della sincronizzazione del sistema.**

Tuttavia, è opportuno distinguere tra **sincronizzazione in frequenza**, che si raggiunge quando la forza esercitata dal termine di accoppiamento sovrasta quella dovuta alle frequenze naturali e ogni oscillatore ruota alla stessa frequenza, pur mantenendo inalterata la fase, e **sincronizzazione totale**, in cui le frequenze degli oscillatori sono uguali ad  $\Omega$  ( $\theta_i = \Omega, \forall i$ ) e la loro differenza di fase resta confinata in un piccolo intervallo di valori. Noi studieremo quest'ultima, anche se è bene precisare che **non si può mai avere una sincronizzazione perfetta in fase** ( $r = 1$ ) perchè in questo caso si avrebbe  $\theta_i = \theta_j \forall i, j$  e, dalla (1) seguirebbe che  $\theta_i = \omega_i$ , cioè ogni oscillatore sincronizzato dovrebbe ruotare con la propria frequenza naturale, in contraddizione con l'ipotesi di sincronizzazione totale!

# Equazioni in campo medio per il Modello di Kuramoto

Una volta introdotto il parametro d'ordine, è possibile scrivere la (1) in una forma più conveniente. Infatti, moltiplicando ambo i membri della (2) per  $e^{-i\theta_i}$ , si ha:

$$r e^{i\psi} e^{-i\theta_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} e^{-i\theta_i} \Rightarrow r e^{i(\psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}.$$

Poiché in generale  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , uguagliando tra loro le parti immaginarie:

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i).$$

e le (1) diventano quindi un **set di equazioni disaccoppiate**:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

In questa forma è evidente il **carattere di campo medio** (*mean field*) del modello. Infatti, pur essendo le (3) disaccoppiate, la dipendenza di ogni oscillatore da tutti gli altri è implicita, in quanto sia  $r$  che  $\psi$  sono quantità medie che dipendono dal comportamento collettivo del sistema. Ogni oscillatore è accoppiato alla fase media  $\psi(t)$  con un parametro di accoppiamento dato da  $Kr$ : per un certo valore di  $K$ , più aumenta la coerenza del sistema nel tempo, più cresce  $r$  e, di conseguenza, crescerà anche l'accoppiamento effettivo  $Kr$ , che tende a raggruppare tutti gli oscillatori in un unico blocco.

Dalle equazioni (3) appare anche chiaramente che il **comportamento complesso** del modello di Kuramoto emerge dalla competizione tra il termine di accoppiamento efficace parametrizzato da  $Kr$ , che tende a «ordinare» (sincronizzare) gli oscillatori, e le loro frequenze naturali  $\omega_i$ , che tendono a «disordinarli» facendoli oscillare ciascuno per conto proprio.

# Modelli HMF e Kuramoto come casi limite di un sistema di pendoli accoppiati

Da un punto di vista teorico, è possibile mostrare una **analogia formale tra il modello HMF, conservativo, e il modello di Kuramoto, dissipativo**. L'idea è che le equazioni del moto di entrambi i modelli possono essere viste come casi particolari delle equazioni generali in campo medio che regolano l'evoluzione dinamica di un **set di  $N$  pendoli forzati e smorzati** con massa e lunghezza unitaria (e  $g=1$ ):

$$\ddot{\theta}_i + B\dot{\theta}_i + C r \sin(\theta_i - \phi) = \Gamma, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

dove  $B$  rappresenta il coefficiente di smorzamento,  $\Gamma$  è una forzante esterna e  $C$  è il termine di accoppiamento, mentre  $r$  e  $\phi$  sono, rispettivamente, il modulo e la fase del parametro d'ordine complesso che misura la sincronizzazione dei pendoli.

Nel **caso conservativo**, cioè per  $B=0$ , in assenza di forzanti esterne ( $\Gamma=0$ ) e per un accoppiamento unitario ( $C=1$ ) le (4) diventano formalmente equivalenti alle equazioni del moto in campo medio del modello HMF (coincidendo il parametro d'ordine  $r$  con la magnetizzazione  $M$  dei rotatori planari):

$$\ddot{\theta}_i = M \sin(\phi - \theta_i) \quad i = 1, \dots, N,$$

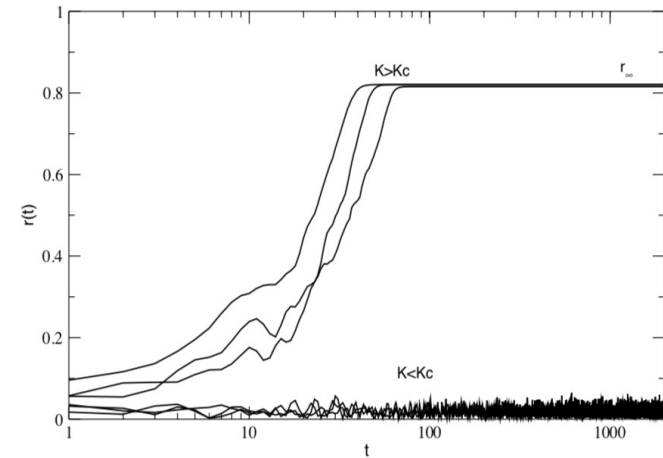
D'altra parte, per  $B \gg 1$  (**caso dissipativo sovra-smorzato**), nelle equazioni (4) i termini  $\ddot{\theta}_i$  diventano trascurabili ed esse risultano analoghe alle equazioni del moto in campo medio del modello di Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\phi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

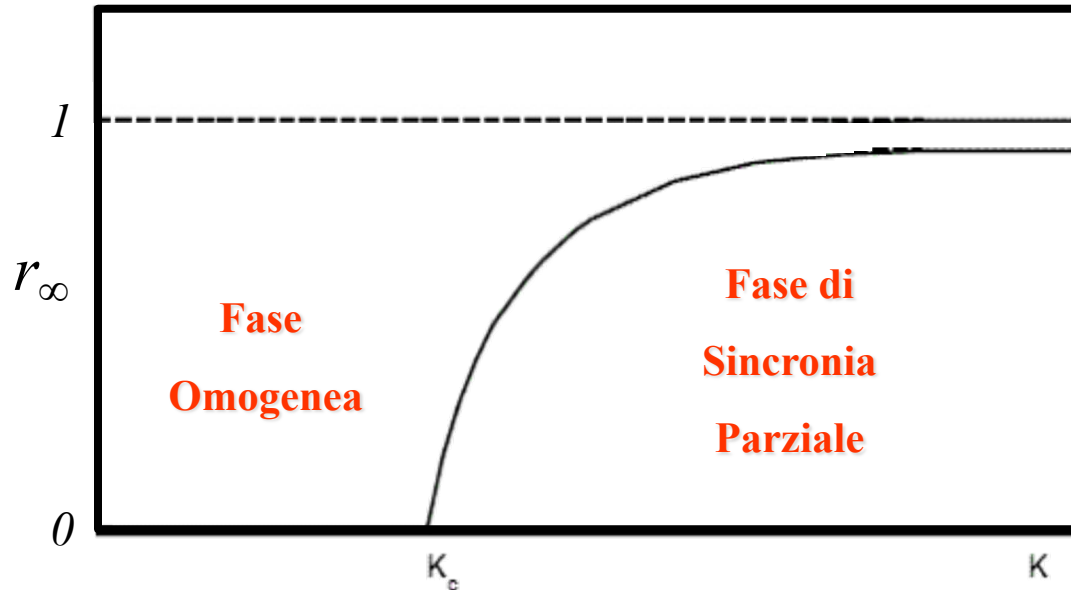
avendo identificato le frequenze naturali  $\omega_i$  con delle forzanti esterne  $\Gamma_i/B$  e il coefficiente di accoppiamento  $K = C/B$ .

# Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

Assumendo una certa **distribuzione delle frequenze naturali**  $g(\omega)$  e distribuendo a  $t = 0$  gli oscillatori uniformemente sul cerchio unitario, le simulazioni mostrano che anche il modello di Kuramoto, come quello HMF, mostra una transizione di fase in corrispondenza di un certo **valore critico**  $K_C$ : al di sotto di questo valore il disordine prevale e gli oscillatori continuano a muoversi rimanendo uniformemente distribuiti sul cerchio unitario, quindi  $r \rightarrow 0$ ; per  $K > K_C$ , lo stato incoerente diventa instabile e  $r$  tende ad aumentare saturando in corrispondenza di un certo  $r_\infty < 1$  (**sincronizzazione parziale**), il cui valore dipende solo da  $K$  e non dalla particolare realizzazione delle condizioni iniziali.



Evoluzione del parametro d'ordine  $r$  in funzione del tempo per due diversi valori di  $K$ , sotto e sopra la soglia critica.



Valore asintotico del parametro d'ordine  $r_\infty$  in funzione di  $K$

# Analisi teorica di Kuramoto

Il merito di **Yoshiki Kuramoto** fu quello di riuscire a ricavare **analiticamente**, con una procedura basata su considerazioni di simmetria per la soluzione stazionaria  $r_\infty$ , il valore critico  $K_C$  nel limite di un numero infinito di oscillatori. In condizioni stazionarie  $r(t)$  è costante e il vettore  $\vec{r}$  ruota uniformemente alla frequenza  $\Omega$ . Mettendosi nel sistema di riferimento che ruota con frequenza  $\Omega$ , e spostando eventualmente l'origine in maniera opportuna, si può considerare  $\psi = 0$ . In questo caso, le equazioni del moto (3) diventano:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Alla base dell'analisi di Kuramoto c'è una **condizione di autoconsistenza**: essendo  $r$  costante, ogni oscillatore è indipendente da tutti gli altri, e sarà quindi possibile risolvere l'equazione del moto comune a tutti gli oscillatori, la cui soluzione implicherà valori di  $r$  e di  $\psi$  che dovranno essere consistenti con i valori originariamente assunti.

La (5) ha **due tipi di soluzioni**, a seconda che la frequenza naturale dell' $i$ -esimo oscillatore sia maggiore o minore del parametro di accoppiamento  $Kr$ :

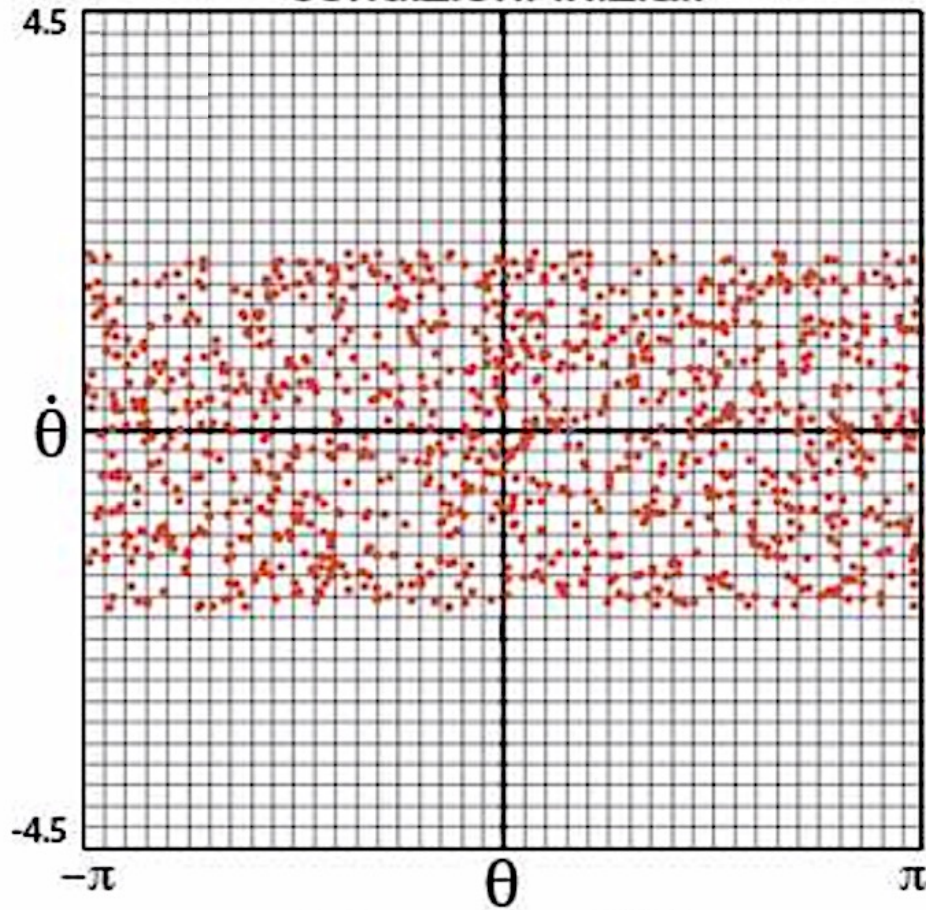
- gli oscillatori con  $|\omega_i| \leq Kr$  si avvicinano al punto fisso stabile ( $\dot{\theta}_i = 0 \forall i$ ) definito dalla condizione  $\omega_i = Kr \sin \theta_i$  con  $|\theta_i| \leq \pi$ : questi oscillatori sono parzialmente **sincronizzati** in fase e ruotano alla frequenza  $\Omega$  (nel sistema di riferimento originario);
- gli oscillatori con  $|\omega_i| > Kr$  ruotano sul cerchio unitario in maniera casuale e **incoerente**, accelerando in prossimità di certe posizioni e rallentando in prossimità di altre.

Per distinguere i due tipi di oscillatori, spesso quelli appartenenti al primo gruppo vengono chiamati “**locked-oscillators**”, quelli appartenenti al secondo “**drifting-oscillators**”.

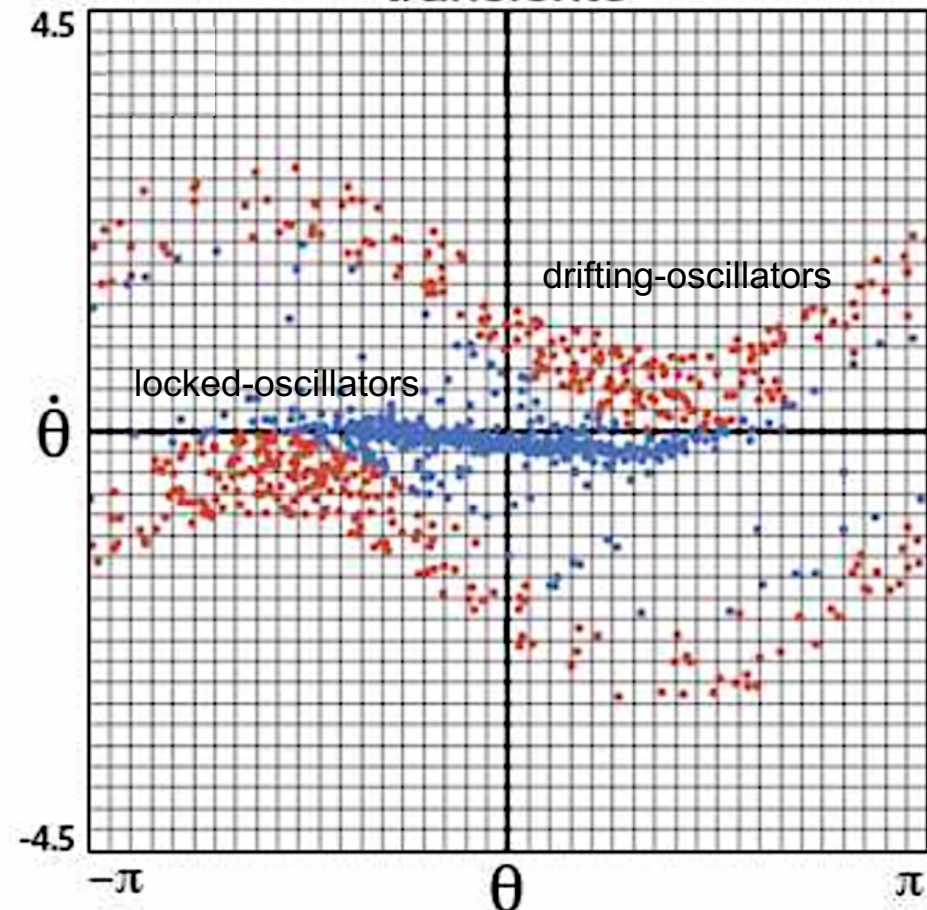
# Analisi teorica di Kuramoto

**N oscillatori = N punti in uno Spazio  $\mu$  2D**

condizioni iniziali



transiente



Per distinguere i due tipi di oscillatori, spesso quelli appartenenti al primo gruppo vengono chiamati “**locked-oscillators**”, quelli appartenenti al secondo “**drifting-oscillators**”.

# Analisi teorica di Kuramoto

Nel limite di un **numero infinito di oscillatori** si può supporre che questi siano distribuiti con una **densità di probabilità**  $\rho(\theta, \omega, t)$ . Sia  $\rho(\theta, \omega) d\theta$  la frazione di oscillatori con frequenza naturale  $\omega$  e fase compresa tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  in condizioni stazionarie. La condizione di stazionarietà implica una densità  $\rho(\theta, \omega)$  inversamente proporzionale alla velocità  $\dot{\theta}_i$ . Si ha quindi:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} \quad (6) \quad \text{dove il valore della costante } C \text{ si ricava imponendo la normalizzazione della } \rho(\theta, \omega): C = 1/2\pi \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}.$$

Sfruttando la **condizione di autoconsistenza** per il parametro d'ordine  $r$ , Kuramoto riuscì a ricavare la seguente equazione:

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

che ammette una prima **soluzione banale**  $r = 0$ , corrispondente allo stato incoerente con una densità di probabilità degli oscillatori che (come si vede sostituendo  $C$  nella (6) e poi ponendo  $r = 0$ ) rimane costante:

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}}{\omega - Kr \sin \theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2}}{\omega} = \frac{1}{2\pi}$$

e una seconda **soluzione non banale**, corrispondente allo stato parzialmente sincronizzato che si ottiene per:

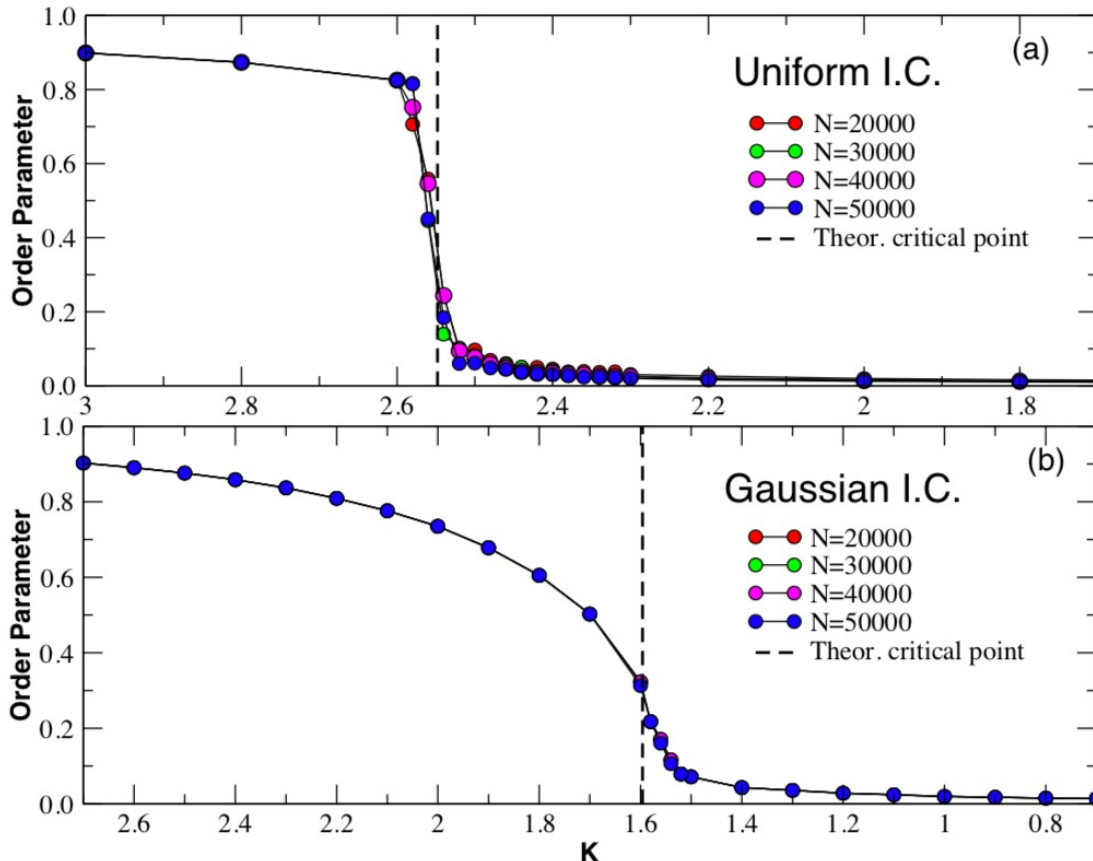
$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

e che si distacca dalla soluzione con  $r = 0$  in corrispondenza di un valore critico  $K_C$  del parametro di accoppiamento (ricavabile nel limite  $r \rightarrow 0^+$ ):

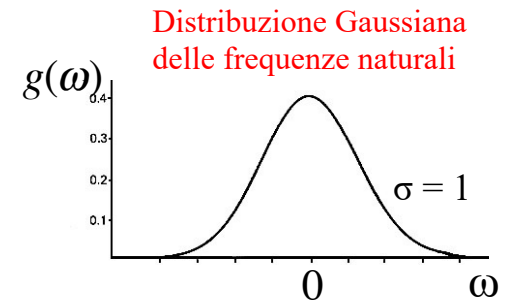
$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(0) d\theta \Rightarrow 1 = K_C g(0) \frac{\pi}{2} \Rightarrow K_C = \frac{2}{\pi g(0)}$$

# Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

Dunque  $K_C$  dipende solo dal valore che assume la **distribuzione delle frequenze**  $g(\omega)$  in corrispondenza di  $\omega=0$ . Però il carattere della transizione di fase dipende dal tipo di distribuzione scelta. Nel grafico (a), ad esempio, la  $g(\omega)$  è **uniforme** (waterbag) con  $\omega \in [-2, 2]$ , quindi (essendo la distribuzione normalizzata ad area unitaria) si avrà  $g(0)=1/4$  e  $K_C=2.547$ : in questo caso si vede che la transizione è brusca (transizione del **primo ordine**). Nel grafico (b), invece,  $g(\omega)$  è **gaussiana** (con  $\sigma = 1$ ) quindi  $g(\omega) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$ , da cui  $g(0)=1/\sqrt{2\pi}$  e  $K_C=1.596$ : stavolta la transizione è continua (del **secondo ordine**, come nel caso del modello HMF).

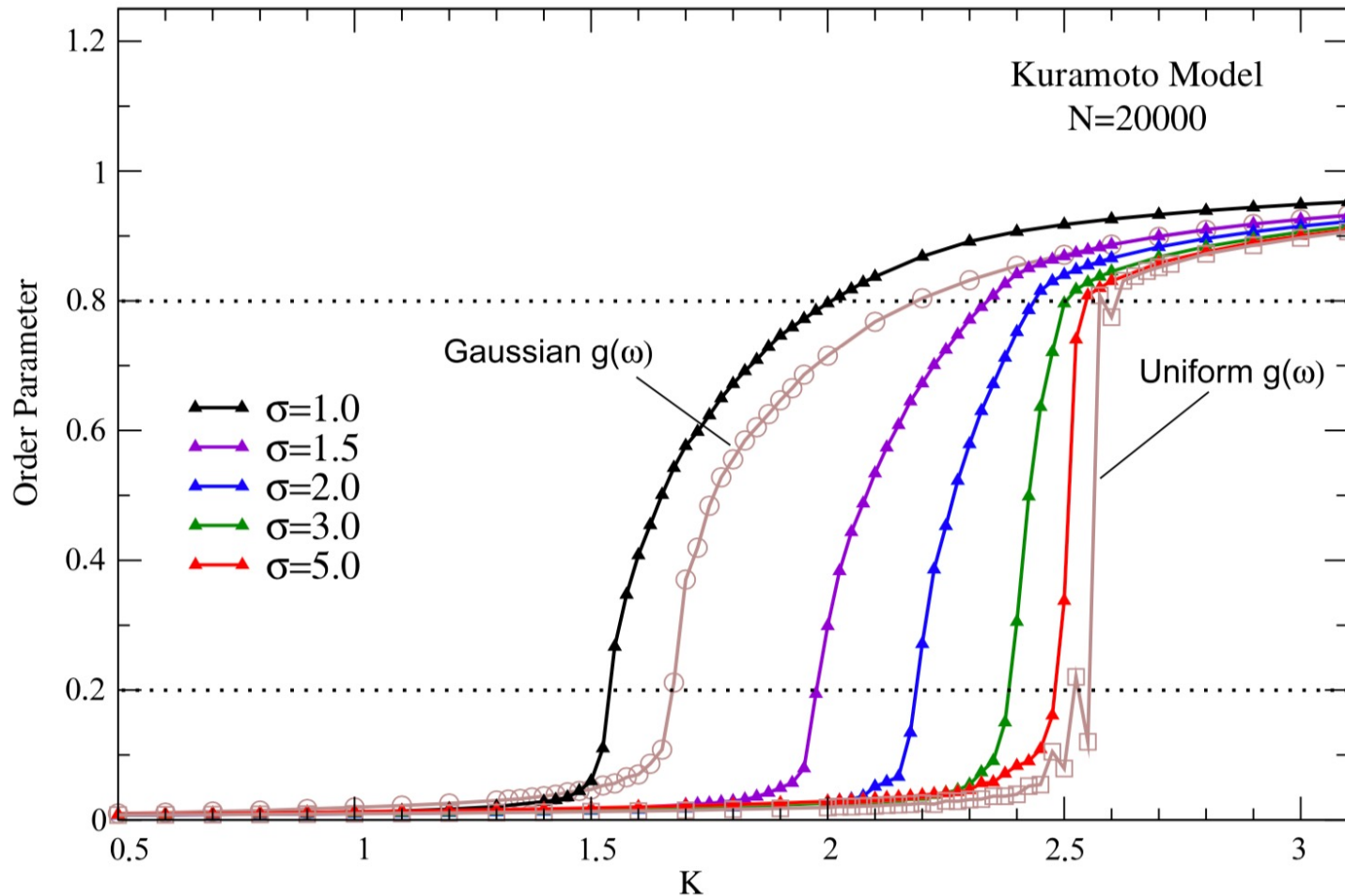


$$K_C = \frac{2}{\pi g(0)}$$



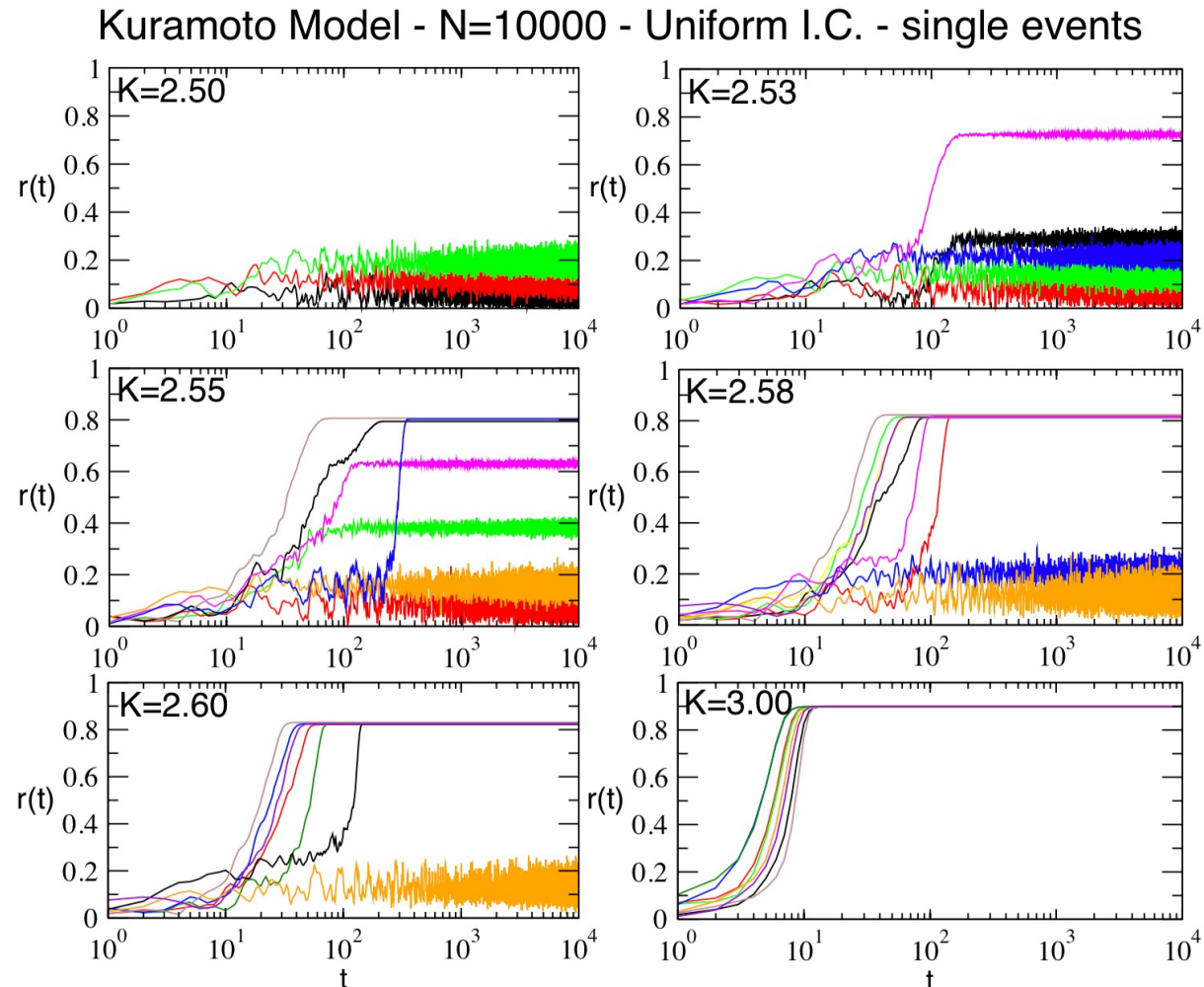
# Transizione di fase nel Modello di Kuramoto

In realtà è anche possibile passare da un tipo di transizione all'altra facendo **aumentare gradualmente la deviazione standard** della distribuzione Gaussiana delle frequenze, trasformandola infine (per  $\sigma > 5$ ) in una distribuzione uniforme:



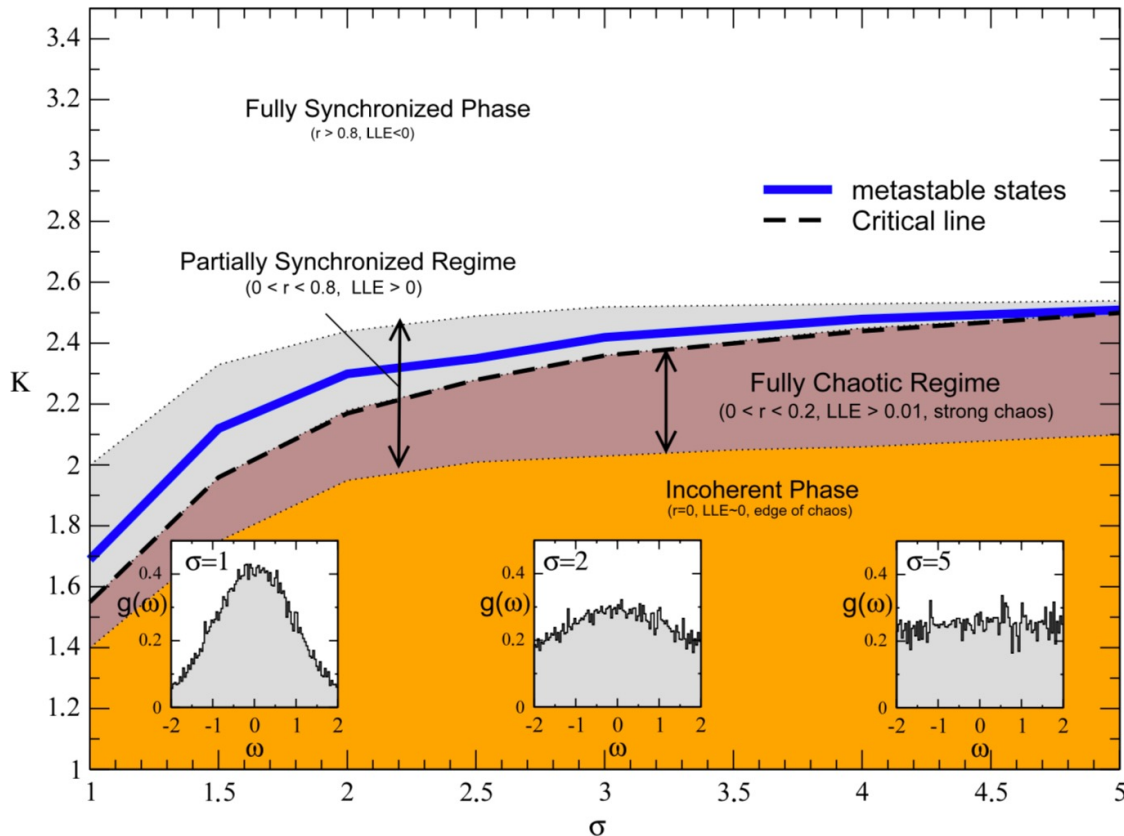
# Stati Metastabili nel Modello di Kuramoto

Ma l'analogia del modello di Kuramoto col modello HMF va oltre la presenza della transizione di fase: si è visto infatti che, quando  $K$  assume valori prossimi a quello critico ( $K_C=2.547$ ), così come accadeva nel modello HMF anche qui iniziano ad emergere **stati metastabili**, in cui il parametro d'ordine si mantiene, per un certo intervallo di tempo, ad un valore più basso del valore asintotico  $r_\infty$ :



# Diagramma di fase nel Modello di Kuramoto

Quanto abbiamo visto può essere sintetizzato in un **diagramma di fase  $K$ - $\sigma$** , dove si vede che, all'aumentare di  $\sigma$ , il valore  $K_C$  aumenta anch'esso gradualmente formando una «**linea critica**» tratteggiata: questa linea separa la fase incoerente (omogenea) da quella coerente (sincronizzata) ed è circondata da una zona di sincronia parziale all'interno della quale appare una linea (blu) che identifica i valori di  $K$  per cui si manifestano gli **stati metastabili**. A differenza però di quanto accadeva in HMF, calcolando l'esponente massimale di Lyapunov (LLE) in questi diversi regimi, si vede che è la fase incoerente a trovarsi al **marginale del caos** (Edge of Chaos, con LLE circa zero).

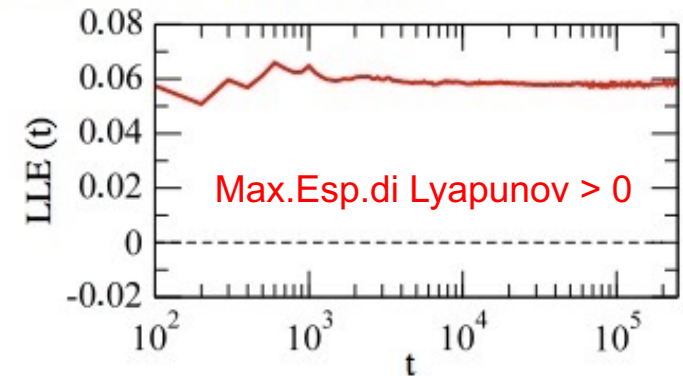
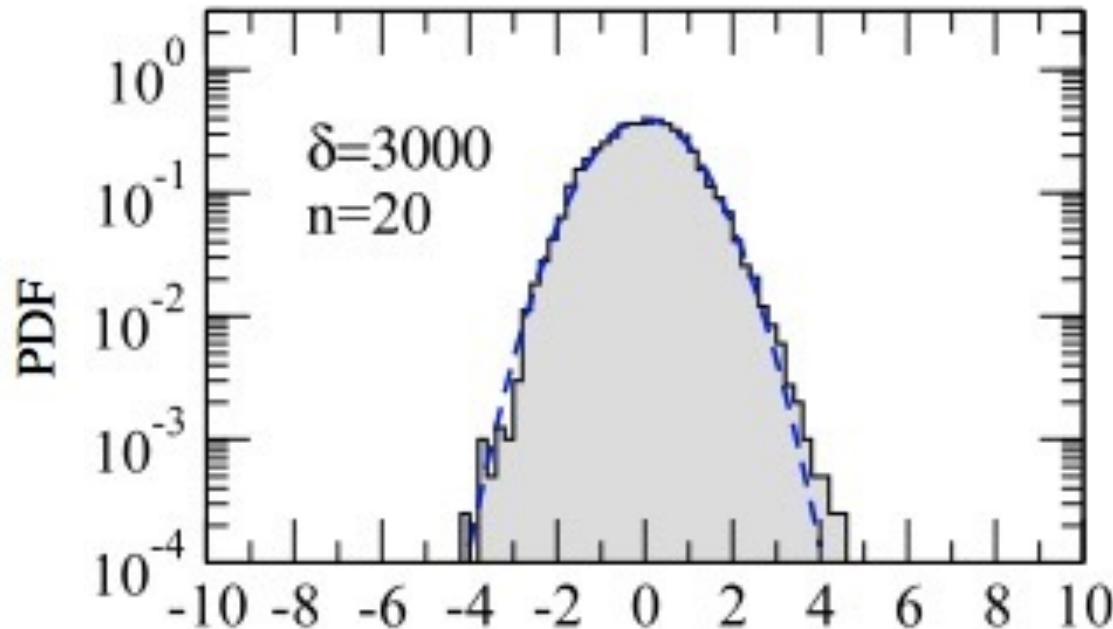


# Modello di Kuramoto e Teorema Centrale del Limite (CLT)

Sappiamo che, secondo il CLT standard, la somma (normalizzata) di un grande numero di variabili casuali **INDIPENDENTI** è approssimativamente distribuita come una variabile casuale normale standard (distribuzione Gaussiana). Se come variabili prendiamo le **fasi degli oscillatori di Kuramoto** ad istanti di tempo successivi (con passo  $\delta$ ) nel **regime caotico**, cioè nella fase parzialmente sincronizzata con  $0 < r < 0.2$ , troviamo in effetti una distribuzione **Gaussiana** (una parabola in scala Log-Lin) :

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \theta_i(k\delta)$$

**Fully Chaotic  
Regime**



**Standard  
Gaussian  
CLT attractor**

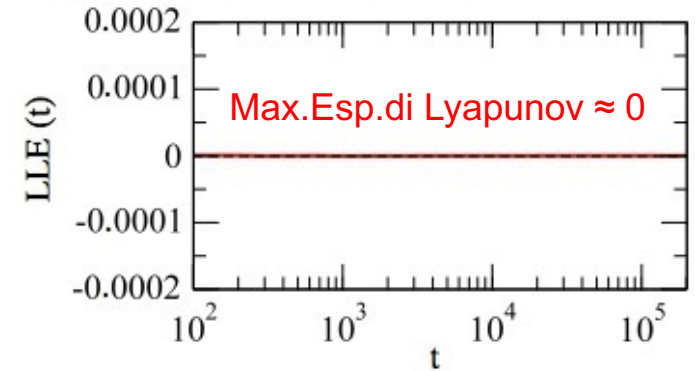
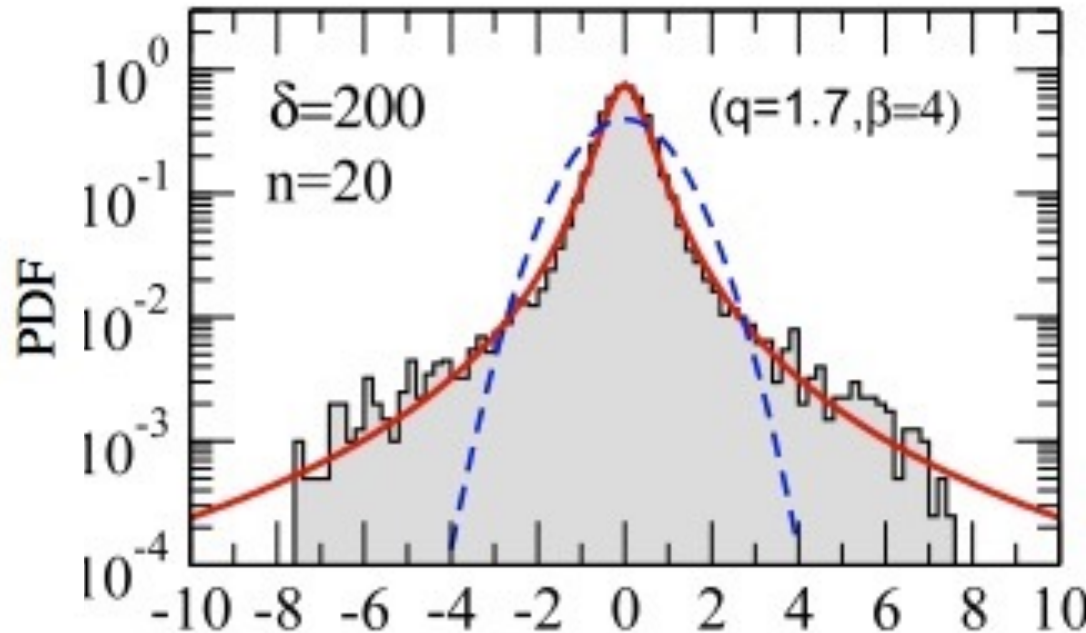
**Code esponenziali**

# Violazione del Teorema Centrale del Limite all'Edge of Chaos

Prendendo invece le stesse variabili dinamiche al **marginale del caos**, cioè nella fase incoerente con  $r \sim 0$  dove il LLE rimane anch'esso nullo, la distribuzione non segue più le previsioni del CLT ma viene ben fittata dalla curva **q-Gaussiana** introdotta nella Meccanica Statistica Generalizzata di Tsallis, con le sue tipiche code a legge di potenza: anche nel modello di Kuramoto, quindi, la presenza di **correlazioni a lungo raggio** tra gli oscillatori produce la violazione dei teoremi statistici standard!

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \theta_i(k\delta)$$

## “Edge of Chaos” Regime



**Generalized  
q-Gaussian  
attractor**

**Code a legge di potenza!**

# Sincronizzazione di Mappe Accoppiate

La sincronizzazione di numerose unità elementari accoppiate è stata largamente studiata negli ultimi decenni fornendo importanti intuizioni sui meccanismi che generano **comportamenti collettivi emergenti** in molti sistemi complessi fisici, biologici o sociali. In questo contesto le **mappe accoppiate** sono state spesso utilizzate in svariati modelli teorici...

- Y. Kuramoto, “*Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*” (Springer, New York, 1984)
- A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, “*Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*”, (Cambridge 2001)
- S.H. Strogatz, “*Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*”, (Hyperion Books, 2004)
- K. Kaneko , “*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*” (World Scientific, Singapore, 1990)

## MODELLO CML di KANEKO: UNA CATENA LINEARE (Lattice 1D) di MAPPE LOGISTICHE ACCOPPIATE LOCALMENTE

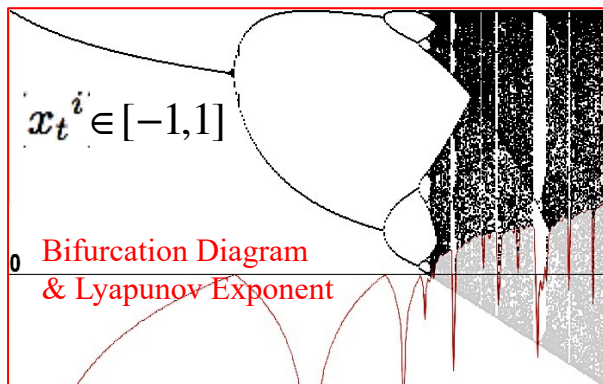
Single Logistic (Quadratic) Map

$$f(x_t^i) = 1 - \mu (x_t^i)^2, \text{ with } \mu \in [0, 2]$$

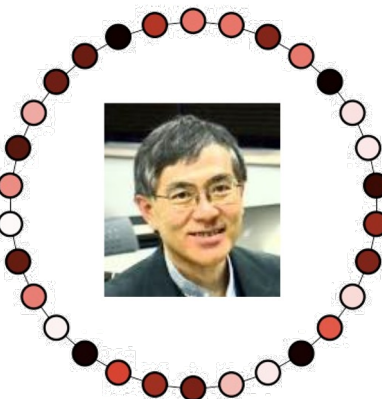


N Coupled Logistic Maps with periodic boundary conditions

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})]$$



map  $i+1$   
map  $i$   
map  $i-1$



Intensità (strength) dell'accoppiamento

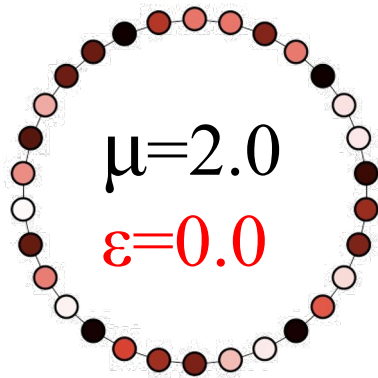
$$\epsilon \in [0, 1]$$

Differenti colori indicano diverse condizioni iniziali per le mappe

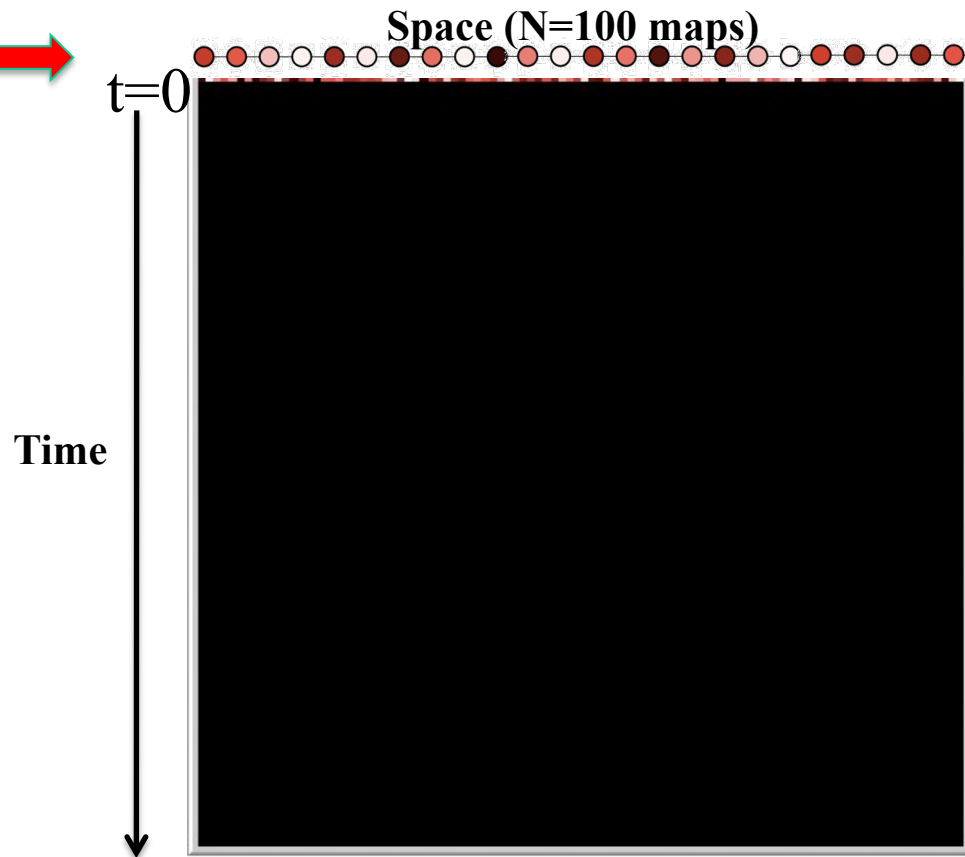
# Caos spazio-temporale e patterns di sincronizzazione nel Modello CML (Coupled Map Lattice)

K. Kaneko, “*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*” (World Scientific, Singapore, 1990)

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})]$$



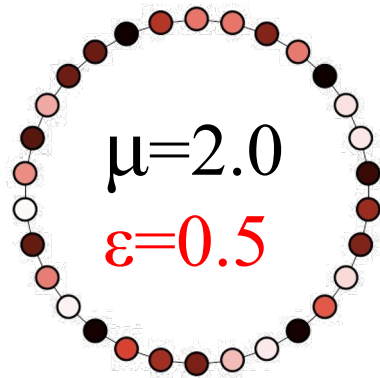
Questo modello è stato particolarmente studiato in regime di “strong chaos”, dove le mappe accoppiate mostrano svariati patterns di sincronizzazione e caos spazio-temporale (fully developed turbulence) in funzione del parametro di accoppiamento  $\epsilon$ .



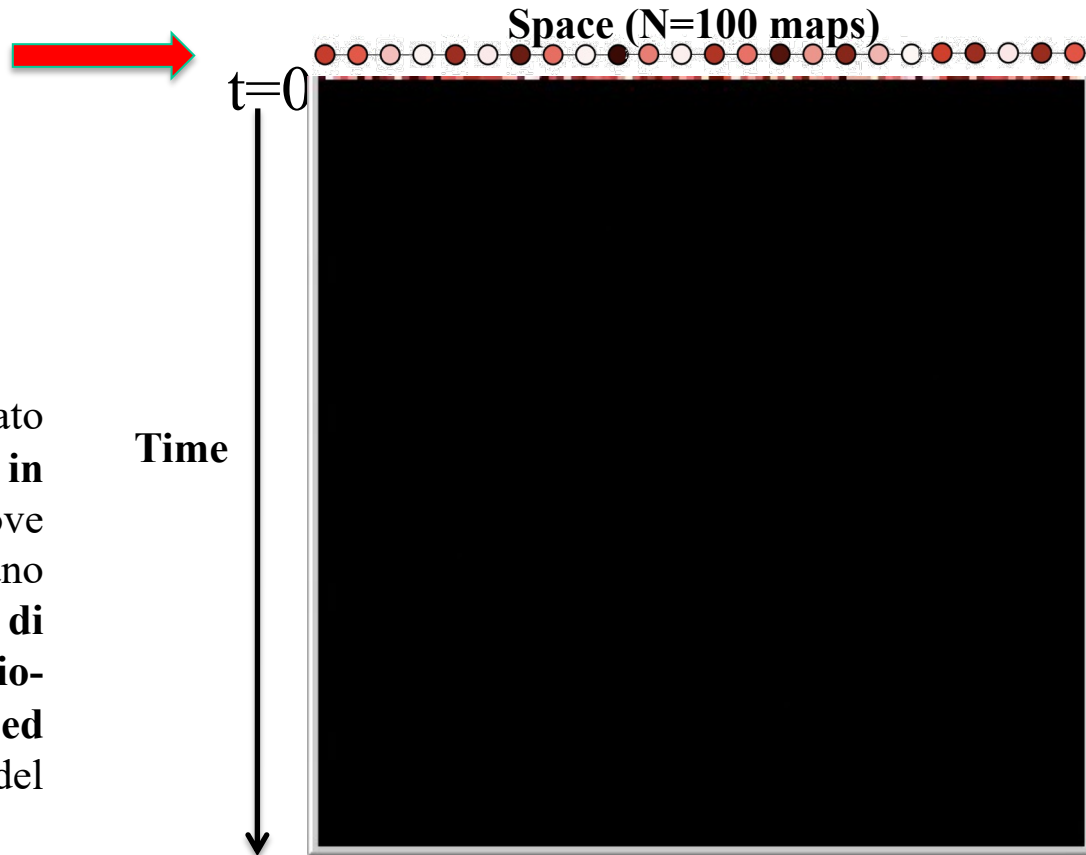
# Caos spazio-temporale e patterns di sincronizzazione nel Modello CML (Coupled Map Lattice)

K. Kaneko, “*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*” (World Scientific, Singapore, 1990)

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})]$$



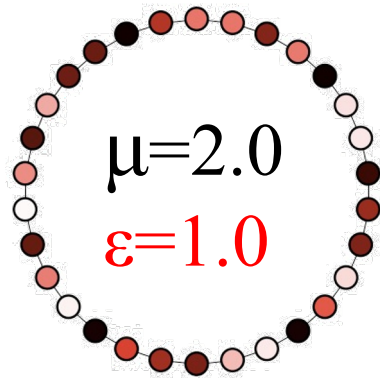
Questo modello è stato particolarmente studiato in regime di “strong chaos”, dove le mappe accoppiate mostrano svariati patterns di sincronizzazione e caos spazio-temporale (fully developed turbulence) in funzione del parametro di accoppiamento  $\epsilon$ .



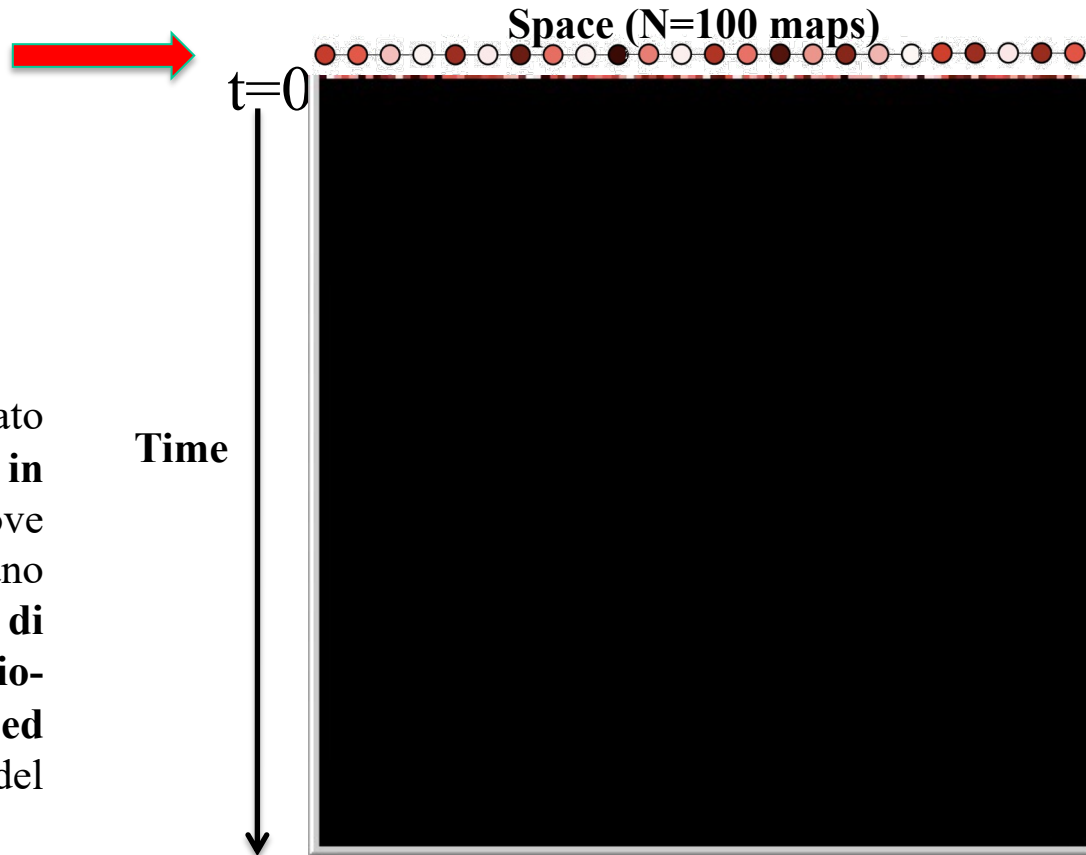
# Caos spazio-temporale e patterns di sincronizzazione nel Modello CML (Coupled Map Lattice)

K. Kaneko, “*Simulating Physics with Coupled Map Lattices*” (World Scientific, Singapore, 1990)

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})]$$



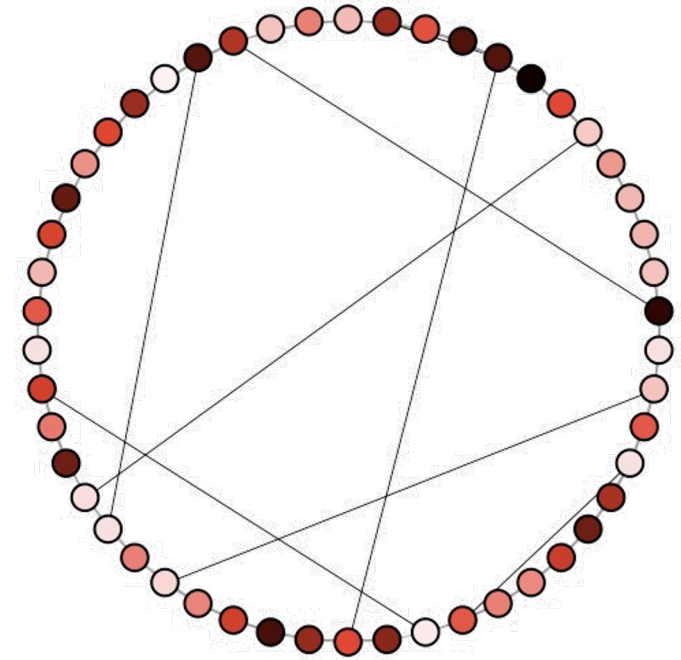
Questo modello è stato particolarmente studiato in regime di “strong chaos”, dove le mappe accoppiate mostrano svariati patterns di sincronizzazione e caos spazio-temporale (fully developed turbulence) in funzione del parametro di accoppiamento  $\epsilon$ .



# Intermittenza “on-off” in Reti Small-World di mappe caotiche

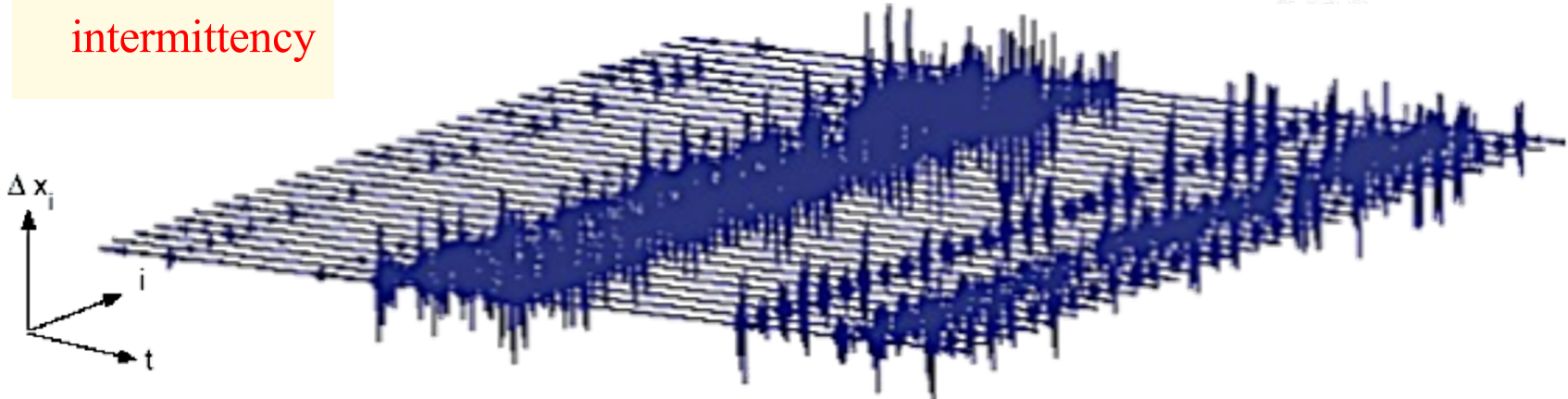
C. Li and J. Fang, IEEE 0-7803-8834-8/05 (2005) 288 - 291 Vol. 1

Si è scoperto che trasformando la catena lineare in una rete **Small-World** si influenza il comportamento delle mappe logistiche accoppiate in regime di **strong chaos** in quanto si introducono **correlazioni a lungo raggio** tra le mappe. Ad esempio, per un certo valore dell'accoppiamento  $\varepsilon$ , quando la **probabilità di rewiring  $p$**  è **inferiore** a un certo valore critico ( $p < 0.29$ ), lo stato caotico sincrono non è più stabile e appare il fenomeno della cosiddetta **intermittenza “on-off”**.



$$\mu=1.9$$
$$\varepsilon=0.6$$

$p = 0.27$   
on-off  
intermittency



# Noise induced correlations in a lattice of logistic maps at the edge of chaos

A.Pluchino, A.Rapisarda, C.Tsallis, Phys. Rev. E 87, 022910 (2013)

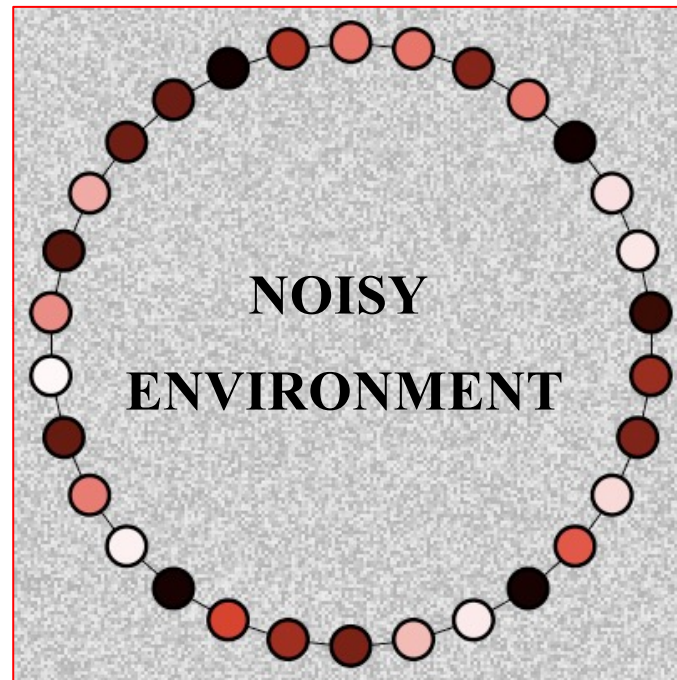
E' stato dimostrato che è possibile produrre **correlazioni a lungo raggio e intermittenza** in una catena di mappe logistiche anche lasciandole accoppiate localmente ma **immergendole in un ambiente "rumoroso"**:

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})] + \sigma(t)$$

$f(x_t^i)$  taken in module 1 with sign

**Il rumore additivo è una variabile casuale estratta con probabilità uniforme nell'intervallo:**

$$\sigma(t) \in [0, \sigma_{max}]$$



# Noise induced correlations in a lattice of logistic maps at the edge of chaos

A.Pluchino, A.Rapisarda, C.Tsallis, Phys. Rev. E 87, 022910 (2013)

E' stato dimostrato che è possibile produrre **correlazioni a lungo raggio e intermittenza** in una catena di mappe logistiche anche lasciandole accoppiate localmente ma **immergendole in un ambiente "rumoroso"**:

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})] + \sigma(t)$$

$f(x_t^i)$  taken in module 1 with sign

**Il rumore additivo è una variabile casuale estratta con probabilità uniforme nell'intervallo:**

$$\sigma(t) \in [0, \sigma_{max}]$$

**...equivale ancora una volta a mettere i metronomi sull'asse comune, creando così un legame tra gli oscillatori!**

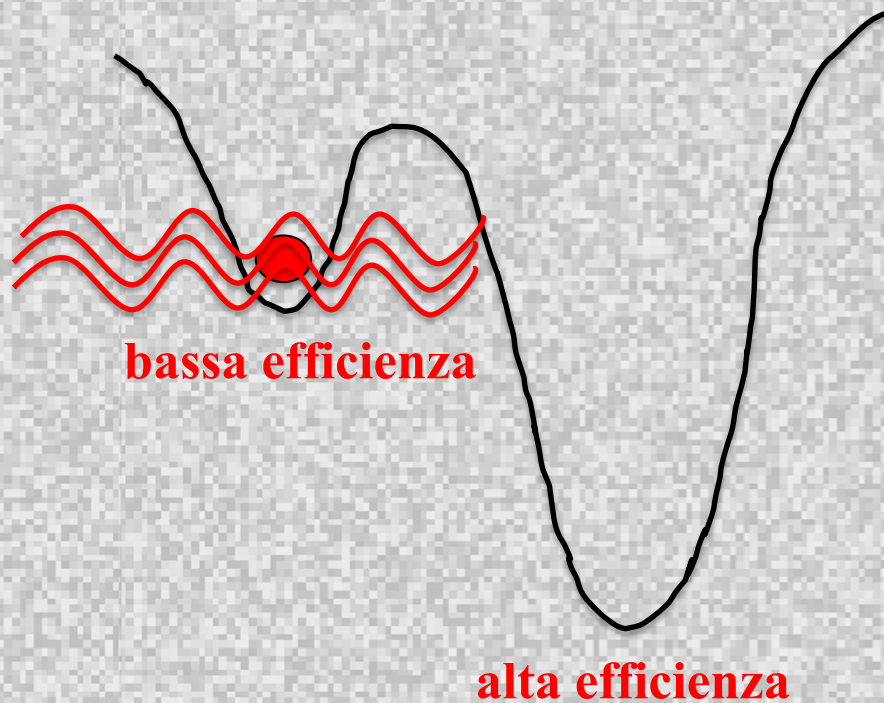


# Il Ruolo Benefico del Caso (Rumore) nei Sistemi Complessi



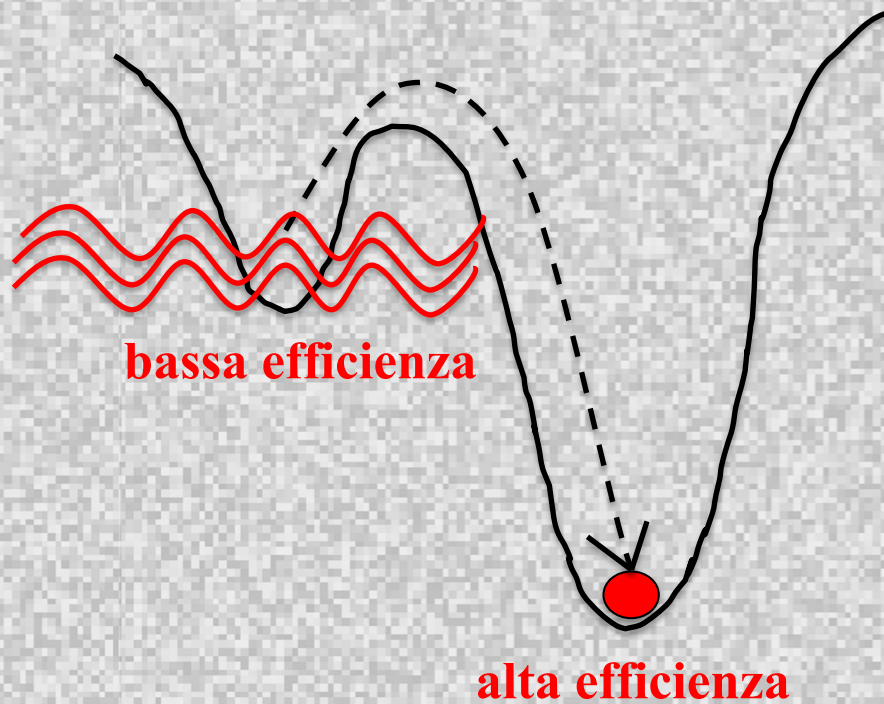
# Il Ruolo Benefico del Caso (Rumore) nei Sistemi Complessi

**CON RUMORE**

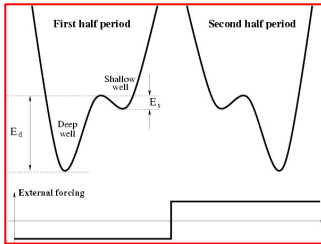


# Il Ruolo Benefico del Caso (Rumore) nei Sistemi Complessi

**CON RUMORE**



# Il ruolo del rumore in fisica e in biologia

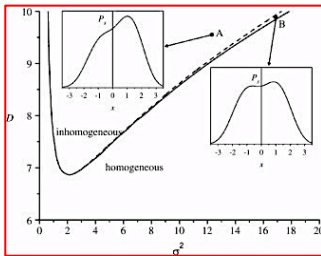


## STOCHASTIC RESONANCE

Un sistema immerso in un **ambiente rumoroso** acquista una migliore sensibilità nei confronti di piccole perturbazioni esterne dipendenti dal tempo.

- R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Tellus* 34, 10 (1982)

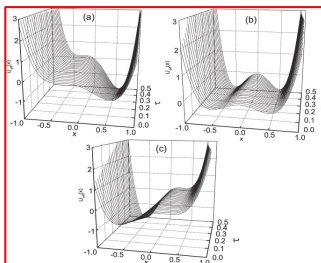
- L. Gammaitoni, P. H'anggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* 70, 1 (1998)



## NOISE INDUCED NON-EQUILIBRIUM PHASE TRANSITIONS

Il **rumore** genera uno stato ordinato a simmetria spezzata attraverso una genuina transizione di fase del secondo ordine, laddove nessuna transizione si osserva in assenza di rumore.

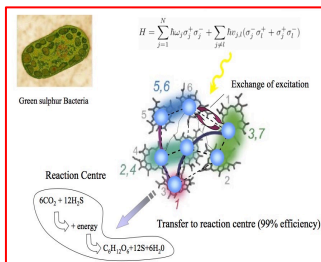
- C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo and R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* 73, 3395 (1994)



## NOISE ENHANCED STABILITY

Il **rumore** può stabilizzare uno stato metastabile fluttuante o sottoposto a una forzante periodica in modo che il sistema permanga in tale stato più a lungo che in assenza di rumore.

- R.N. Mantegna and B. Spagnolo, *Phys. Rev. Lett.* 76, 563 (1996)



## NOISE ASSISTED TRANSPORT IN BIOLOGICAL NETWORKS

Il **rumore** altera i percorsi di trasferimento energetico in reti biologiche complesse, sopprime percorsi inefficaci e facilitando quelli diretti verso i centri di reazione.

- M.B. Plenio and S.F. Huelga, *New J. Phys.* 10, 113019 (2008)

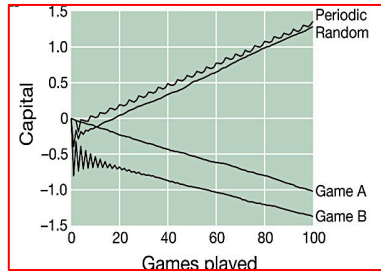
- F. Caruso, S.F. Huelga and M.B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* 105, 190501 (2010)

# Il ruolo delle strategie casuali nei sistemi sociali ed economici

## MINORITY GAMES AND PARRONDO PARADOX

In **Teoria dei Giochi** due strategie perdenti, se giocate alternativamente o in maniera casuale, possono risultare vincenti.

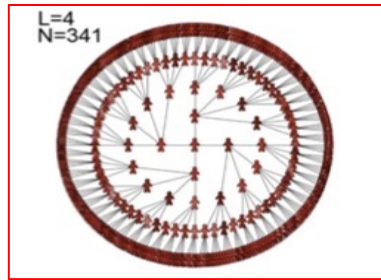
- G.P. Harmer and D. Abbott, *Nature* 402, 864 (1999)
- J.B. Satinover and D. Sornette, *Eur. Phys. J. B* 60, 369 (2007)



## RANDOM STRATEGIES IN HIERARCHICAL ORGANIZATIONS

Strategie di **promozione casuale** possono aumentare l'efficienza di una organizzazione gerarchica aggirando gli effetti nefasti del Principio di Peter.

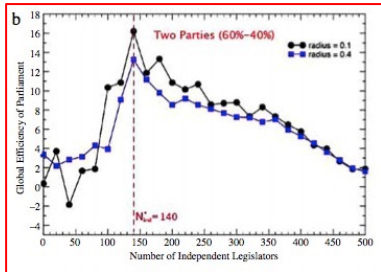
- A.Pluchino, A.Rapisarda and C.Garofalo, *Physica A*, 389, 467 (2010).
- A.Pluchino, A.Rapisarda and C.Garofalo, *Physica A*, 390 3496 (2011)
- [http://www.pluchino.it/ignobel\\_new.html](http://www.pluchino.it/ignobel_new.html)



## RANDOM STRATEGIES FOR SELECTING LEGISLATORS

L'efficienza di un Parlamento può essere incrementata attraverso l'introduzione di una componente di **legislatori sorteggiati** e quindi indipendenti dai partiti.

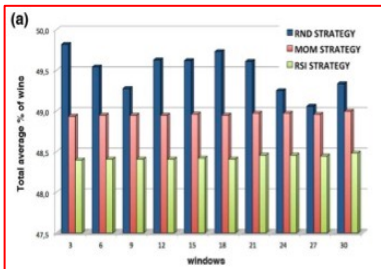
- A.Pluchino, C.Garofalo, A.Rapisarda, S.Spagano, M.Caserta, *Physica A* 390, 3944 (2011).
- M.Caserta, A.Pluchino, A.Rapisarda, S.Spagano, *Physica A* 565, 125430 (2021).
- <http://www.pluchino.it/parliament-ita.html>



## RANDOM STRATEGIES IN FINANCIAL TRADING

Strategie di **investimenti casuali** sembrano performare altrettanto bene, ma con rischi più contenuti, delle strategie di investimento standard, che sfruttano algoritmi basati sulla storia passata degli indici di mercato.

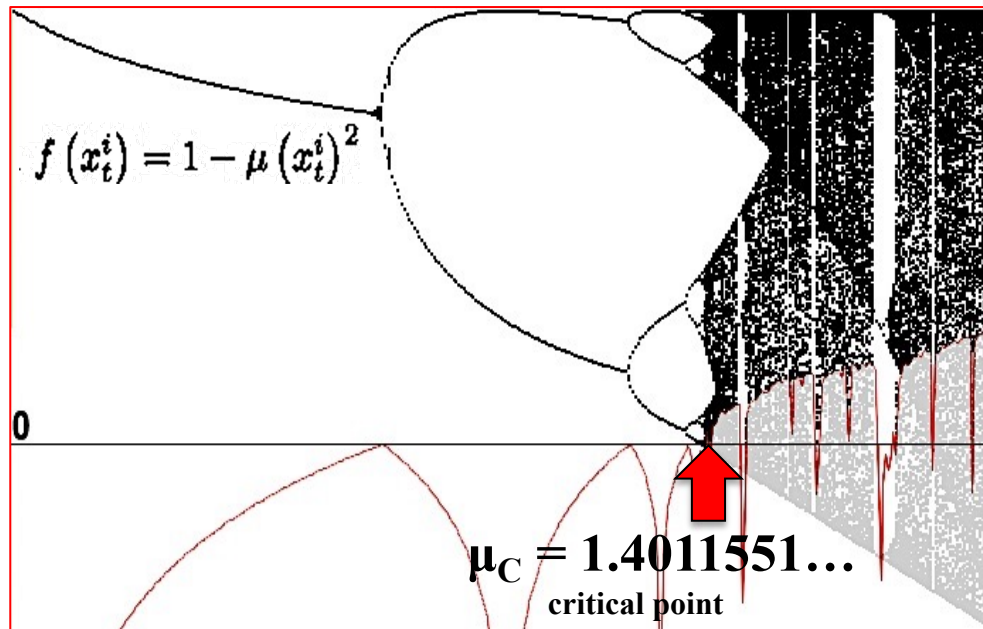
- A.E.Biondo, A.Pluchino, A.Rapisarda, *Journal of Statistical Physics* (2013) 151:607-622
- A.E.Biondo, A.Pluchino, A.Rapisarda, D.Helbing (2013) *Plos One* (2013) 8(7): e68344
- A.E.Biondo, A.Pluchino, A.Rapisarda, D.Helbing (2013) arXiv:1309.3639
- [http://www.pluchino.it/financial-markets\\_ita.html](http://www.pluchino.it/financial-markets_ita.html)



# Noise induced correlations in a lattice of logistic maps at the edge of chaos

A.Pluchino, A.Rapisarda, C.Tsallis, Phys. Rev. E 87, 022910 (2013)

Nella catena di mappe logistiche accoppiate in presenza di rumore le singole mappe non sono state regolate però nel regime di strong chaos, come si è visto negli altri modelli, ma sono state poste al punto critico, **al margine del caos**, il che le rende particolarmente sensibili alle correlazioni:



I sistemi biologici complessi operano spesso **al margine del caos e in ambienti “rumorosi”**. Dunque studiare gli effetti di un piccolo rumore in questi “toy models” di sistemi elementari accoppiati può essere utile per capire il modo in cui molte unità interagenti si comportano nei sistemi reali, come per esempio nelle cellule dei sistemi viventi.

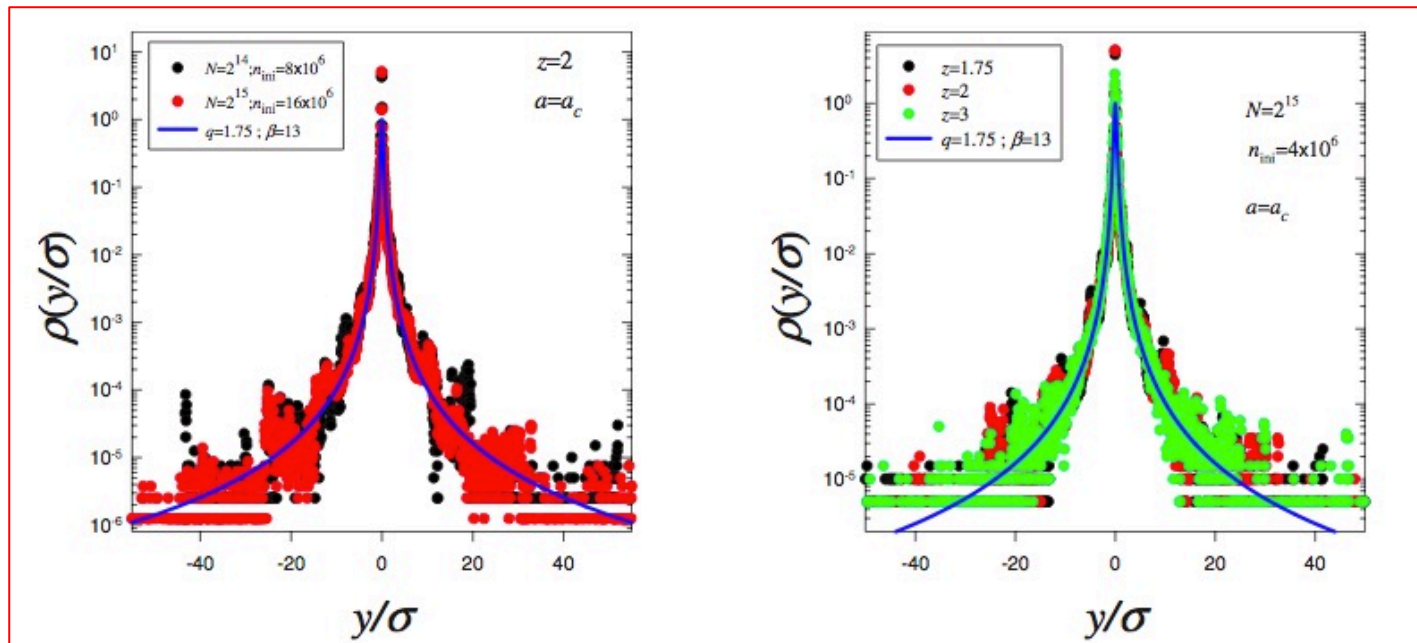
See e.g.: - D. Stokic, R. Hanel, S. Thurner, Phys. Rev. E. 77, 061917 (2008)

- R. Hanel, M. Pořhacker, M. Scholling, S.Thurner, Plos One bf 7, e36679 (2012)

# Correlazioni in una singola mappa logistica at the edge of chaos

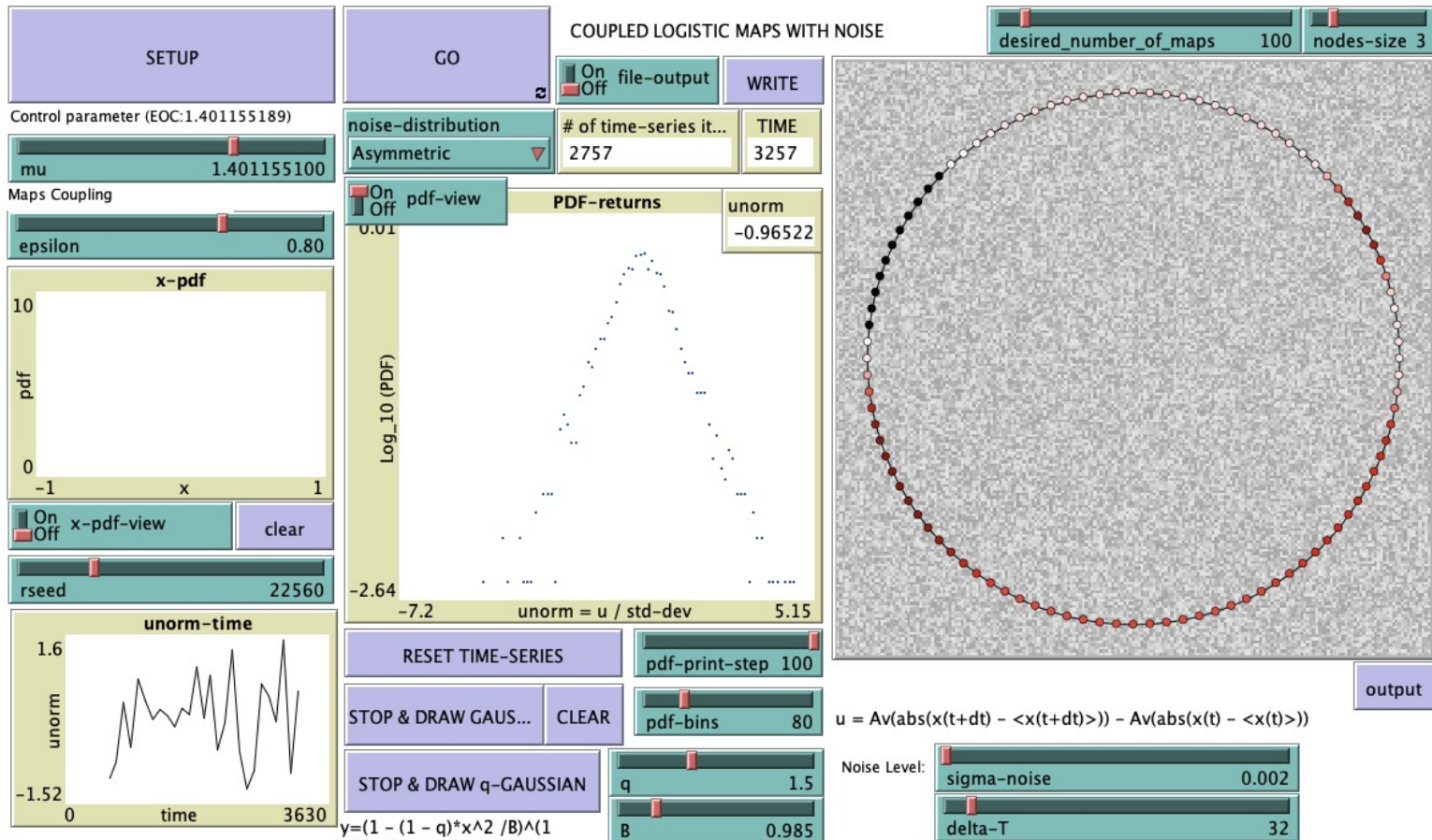
Il comportamento di una **singola mappa logistica at the edge of chaos** è stato largamente investigato in relazione al **Teorema Centrale del Limite (CLT)**. Al **punto critico** dell'accumulazione dei raddoppiamenti di periodo ( $\mu=\mu_c$ ), il CLT standard non risulta più valido, a causa di **forti correlazioni temporali** tra le iterate. In questo caso, la densità di probabilità converge ad una  **$q$ -Gaussiana**, in accordo con la **generalizzazione del CLT** nel contesto della **meccanica statistica non estensiva di Tsallis**.

- U.Tirnakli, C.Beck and C.Tsallis, Phys. Rev. E, 75 (2007) 040106 (R)
- U.Tirnakli, C.Tsallis and C.Beck, Phys. Rev. E, 79 (2009) 056209 (R)
- S. Umarov, C. Tsallis, S. Steinberg, Milan J. math.76,307 (2008)



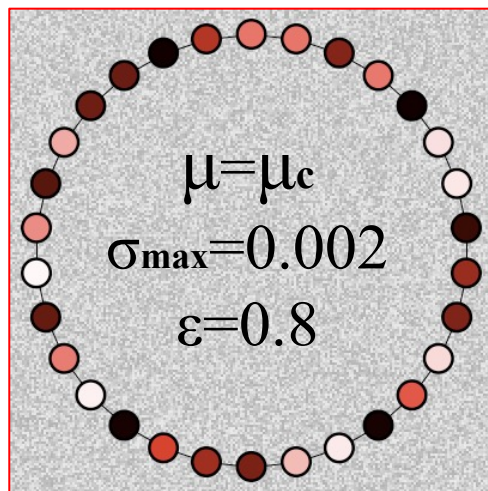
# Correlazioni indotte dal rumore in una catena di mappe logistiche at the edge of chaos

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})] + \sigma(t)$$

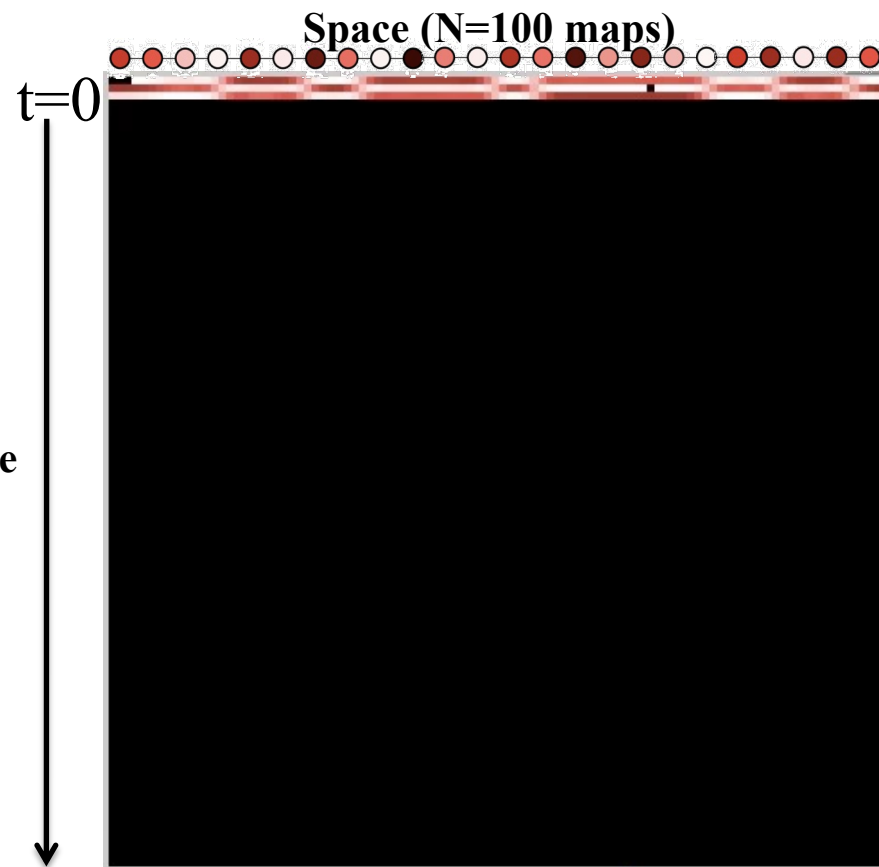


# Correlazioni indotte dal rumore in una catena di mappe logistiche at the edge of chaos

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_t^{i-1}) + f(x_t^{i+1})] + \sigma(t)$$



L'aggiunta di un **piccolo livello di rumore** induce evidenti **correlazioni spatiotemporali** nella catena di mappe logistiche at the edge of chaos, in presenza of **forte accoppiamento**.



# Correlazioni indotte dal rumore in una catena di mappe logistiche at the edge of chaos

Per studiare queste **correlazioni** sottraiamo la componente sincronizzata e teniamo la **parte desincronizzata** di ciascuna mappa considerando, ad ogni iterazione, la differenza tra il valore istantaneo di ogni singola mappa e il valore medio di tutte le mappe a quell'istante. Poi prendiamo la media del valore assoluto di queste differenze per quantificare la **distanza dal regime sincronizzato al tempo t** dell'intero sistema con un'unica variabile:

$$d_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_t^i - \langle x_t^i \rangle|$$

Quando tutte le mappe sono intrappolate in un qualche **pattern sincronizzato** allora questa quantità rimane vicina allo zero, altrimenti si osservano delle **oscillazioni**.

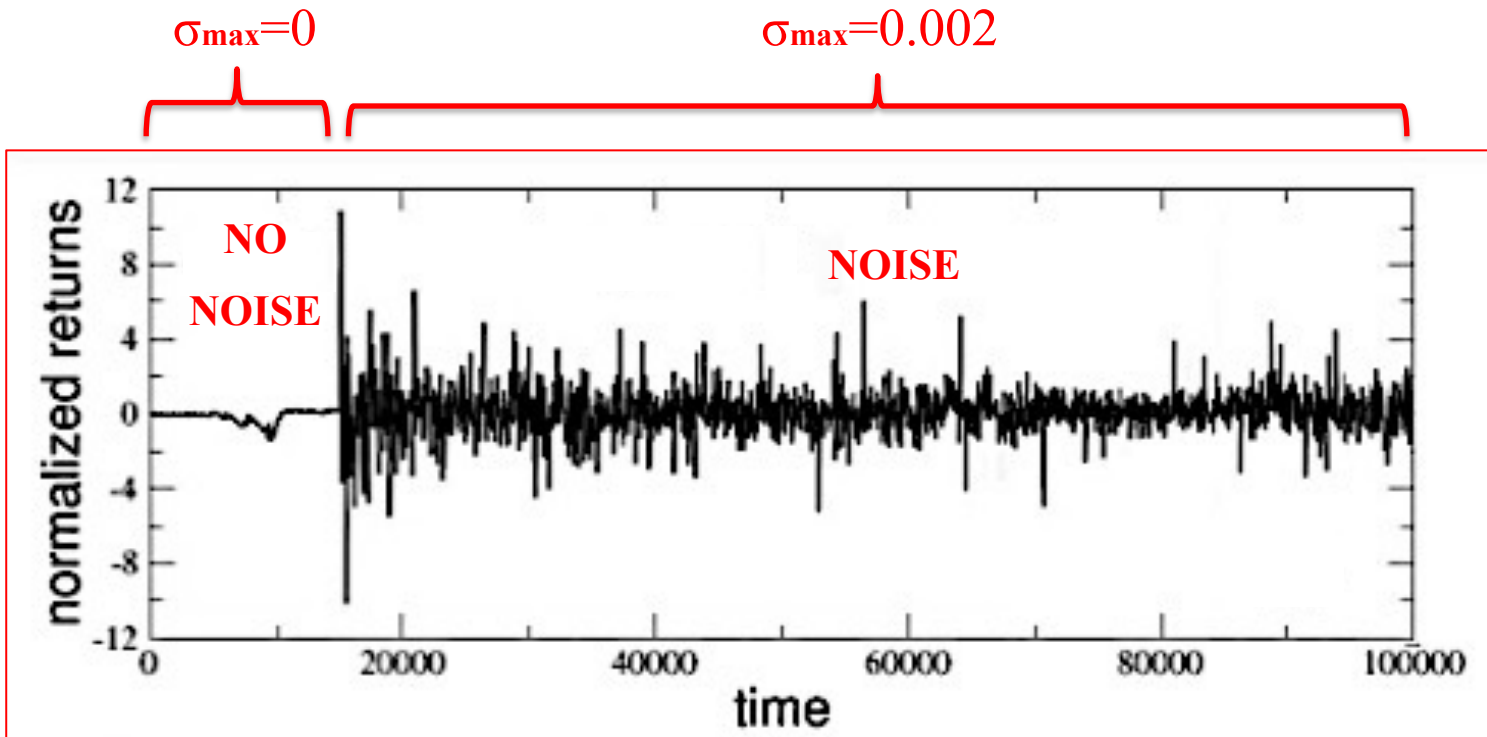
Come si fa abitualmente nello studio della turbolenza nei sistemi fisici o nei mercati finanziari, analizziamo queste oscillazioni considerando i cosiddetti “**ritorni**” a due tempi  $\Delta d_t$ , con un passo di  **$\tau$  iterazioni**, definiti come:

$$\Delta d_t = d_{t+\tau} - d_t$$

- S.Rizzo, A.Rapisarda, “*Application of superstatistics to atmospheric turbulence*” in Complexity, Metastability and Nonextensivity, World Scientific, Singapore (2005) 39
- J. Ludescher, C. Tsallis and A. Bunde, Europhys. Letters 95, 68002 (2011)

# Evoluzione temporale dei ritorni in presenza di “weak noise”

Effetti del rumore sull’evoluzione temporale dei ritorni (normalizzati alla standard deviation della sequenza complessiva) per il caso  $N = 100$ ,  $\mu = \mu_c = 1.4011551\dots$ ,  $\varepsilon = 0.8$  and  $\tau = 32$ . Durante le prime 15.000 iterazioni a **zero noise** ( $\sigma_{\max} = 0$ ) le mappe restano sincronizzate a causa del forte accoppiamento. A  $t = 15000$  il **noise viene attivato**, con  $\sigma_{\max} = 0.002$  (**weak noise**): appare un chiaro **comportamento intermittente**.



# Evoluzione temporale dei ritorni in presenza di “strong noise”

Il comportamento intermittente **scompare** se ripetiamo la stessa simulazione ma stavolta con  $\sigma_{\max} = 0.2$ , cioè in presenza di **strong noise**. In questo caso si osservano solo fluttuazioni Gaussiane.



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

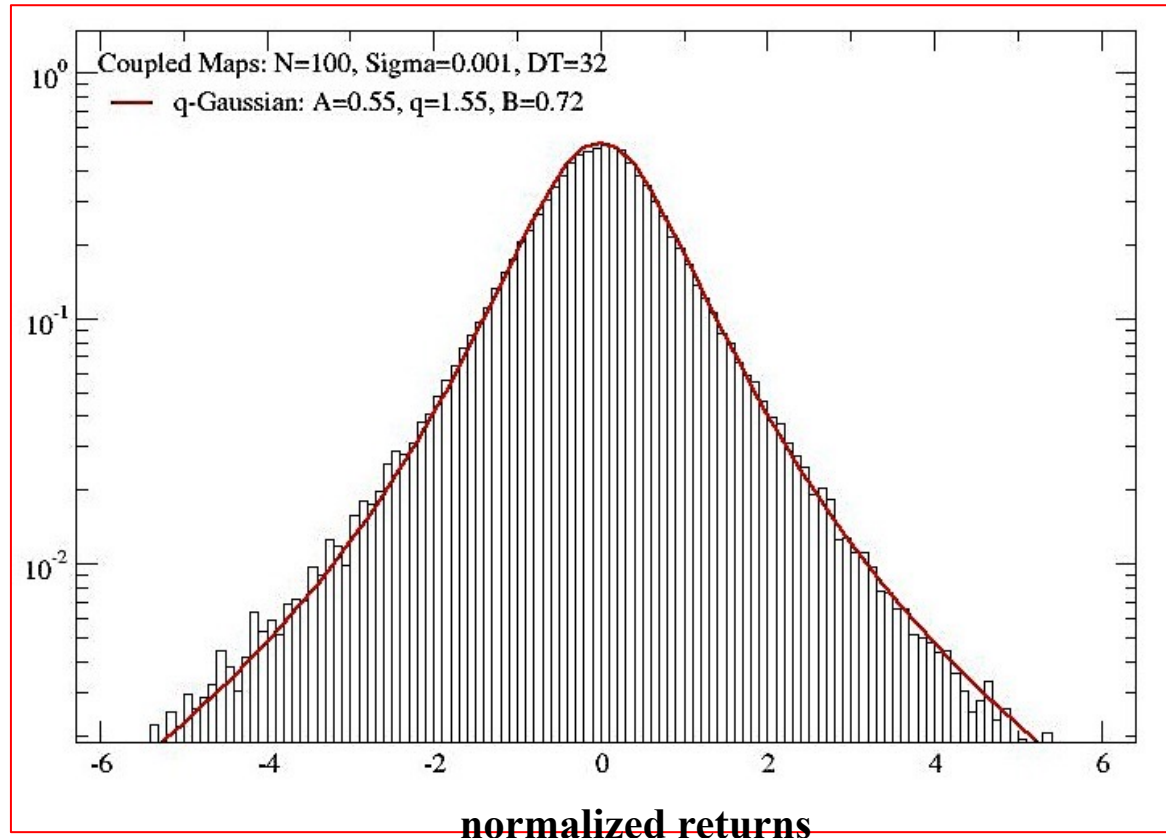
$$\sigma_{\max}=0.001$$

$$q=1.55$$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico *q*:

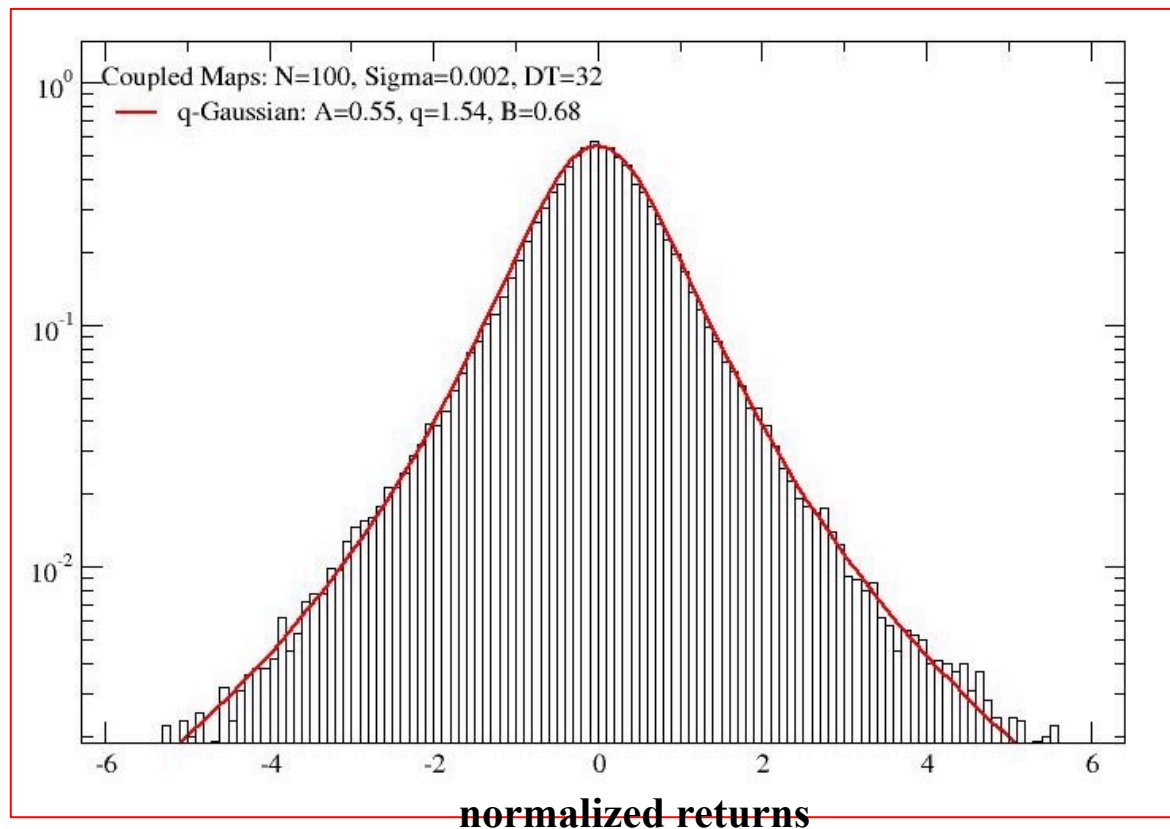
$$\sigma_{\max}=0.002$$

$$q=1.54$$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

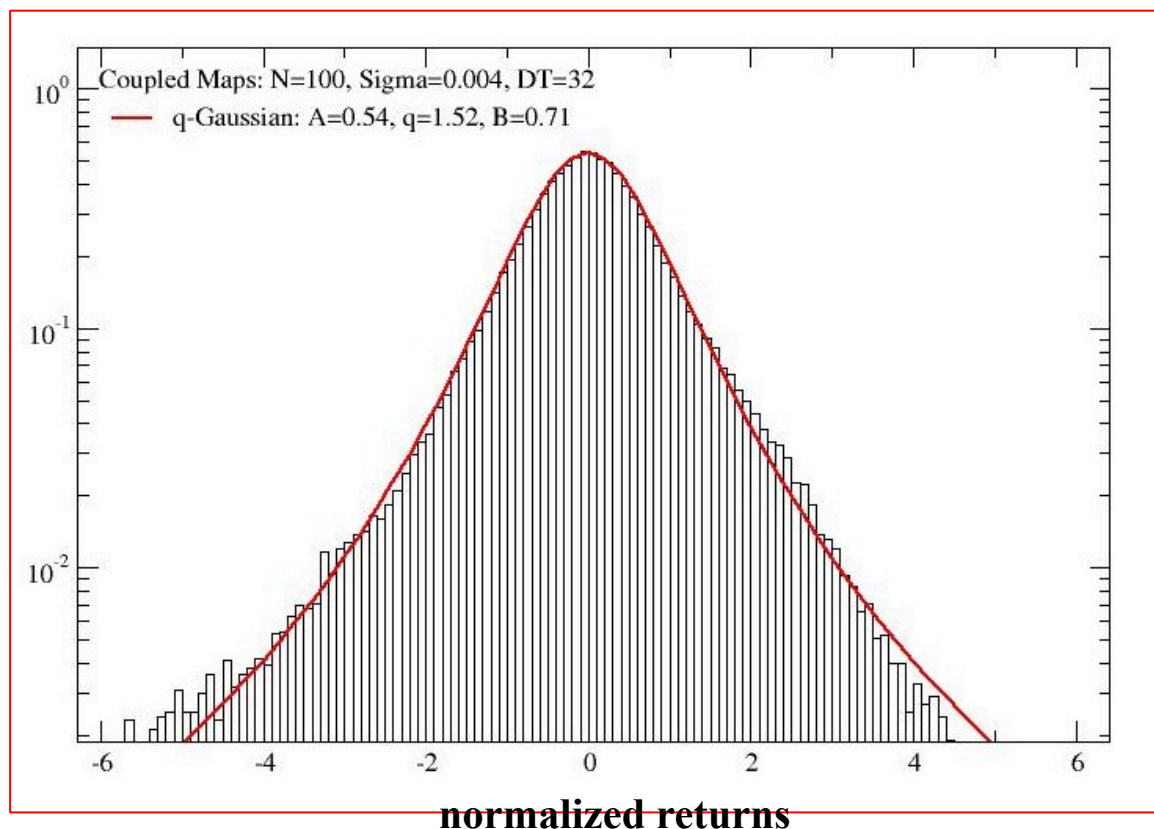
$$\sigma_{\max}=0.004$$

$$q=1.52$$

**q-Gaussian:**

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

**$q=1 \rightarrow$  Gaussian**



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve  **$q$ -Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico  $q$ :

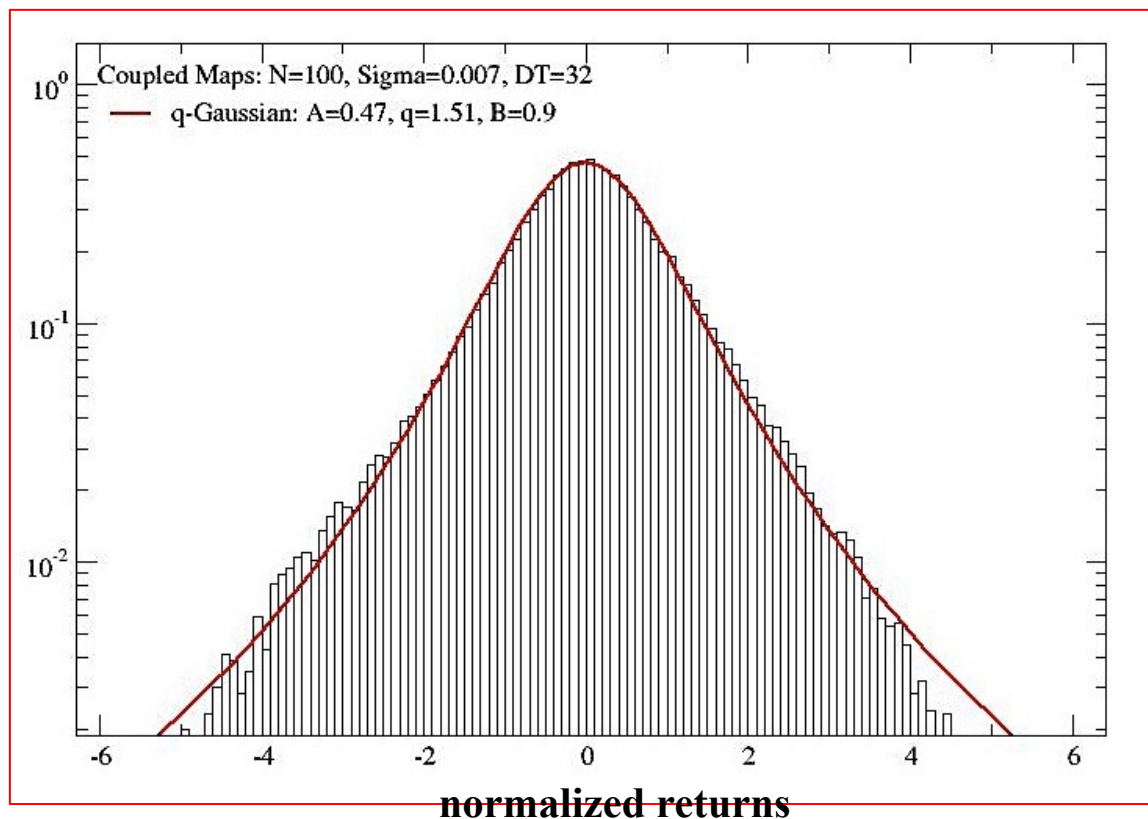
$$\sigma_{\max}=0.007$$

$$q=1.51$$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

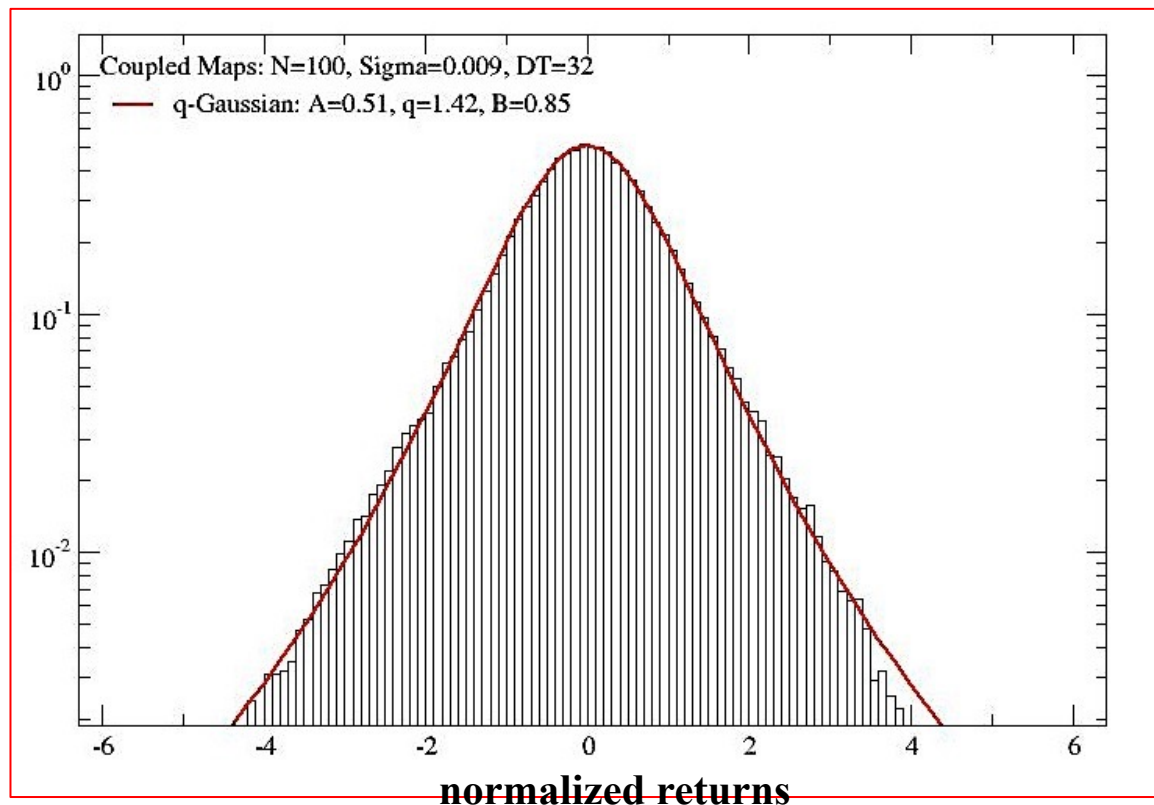
$$\sigma_{\max} = 0.009$$

$$q = 1.42$$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

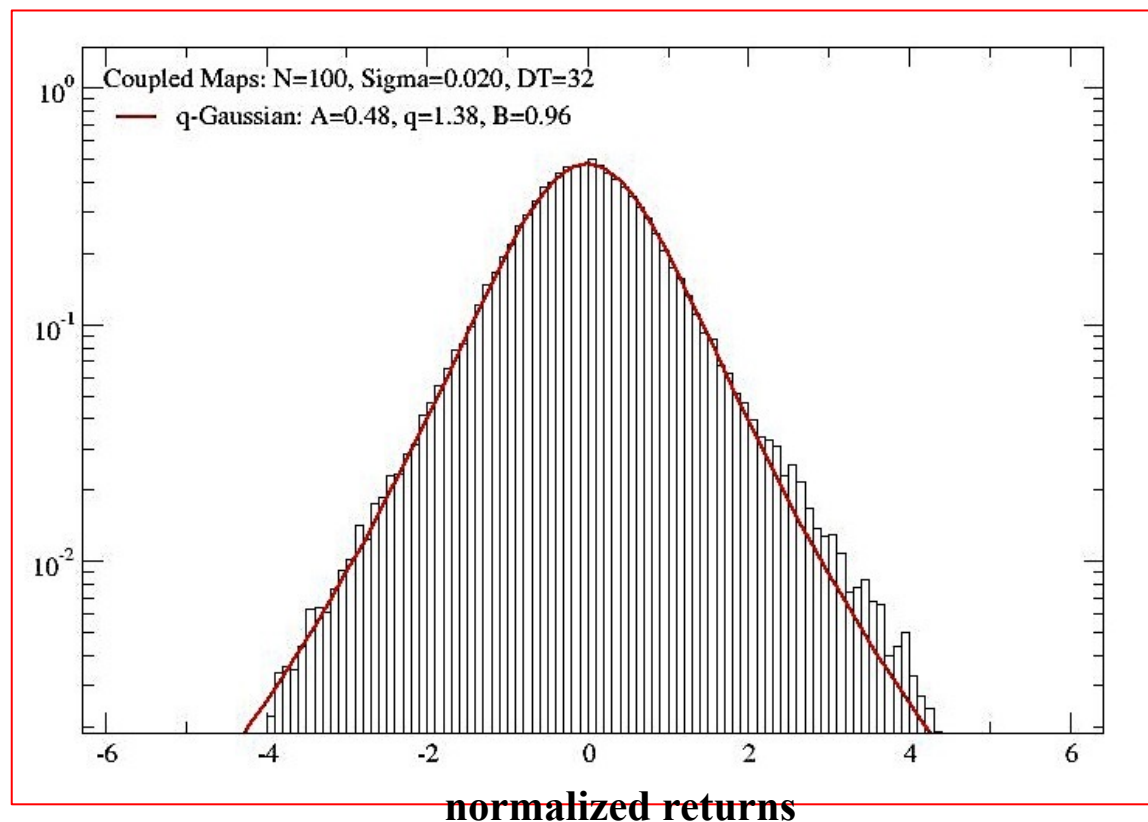
$$\sigma_{\max}=0.02$$

$$q=1.38$$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve  **$q$ -Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico  $q$ :

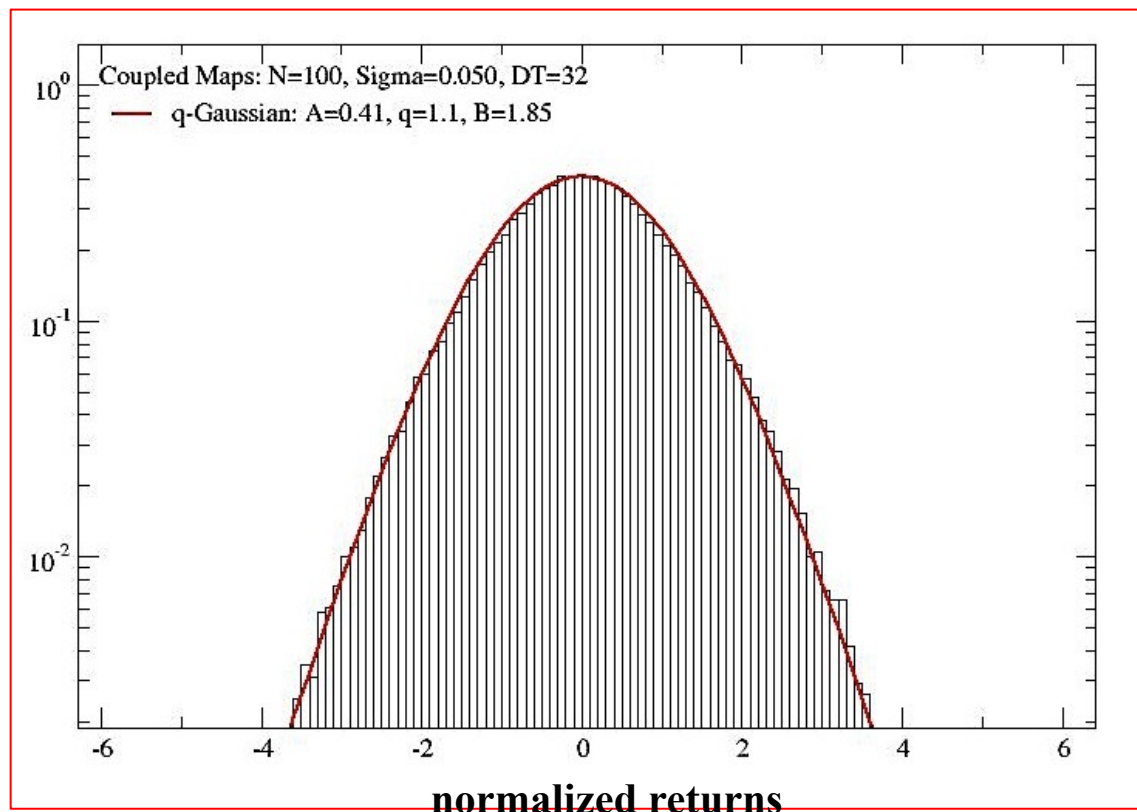
$$\sigma_{\max}=0.05$$

$$q=1.10$$

**q-Gaussian:**

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

**$q=1 \rightarrow$  Gaussian**



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

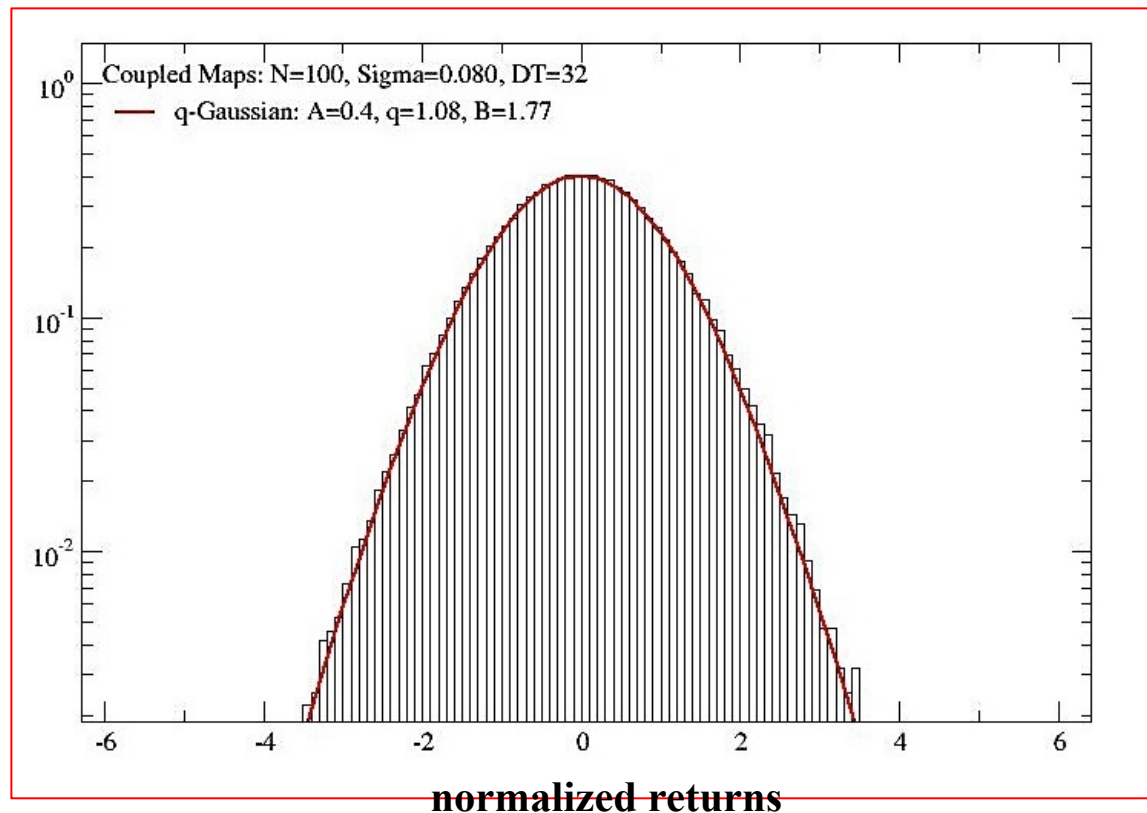
$$\sigma_{\max}=0.08$$

$$q=1.08$$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

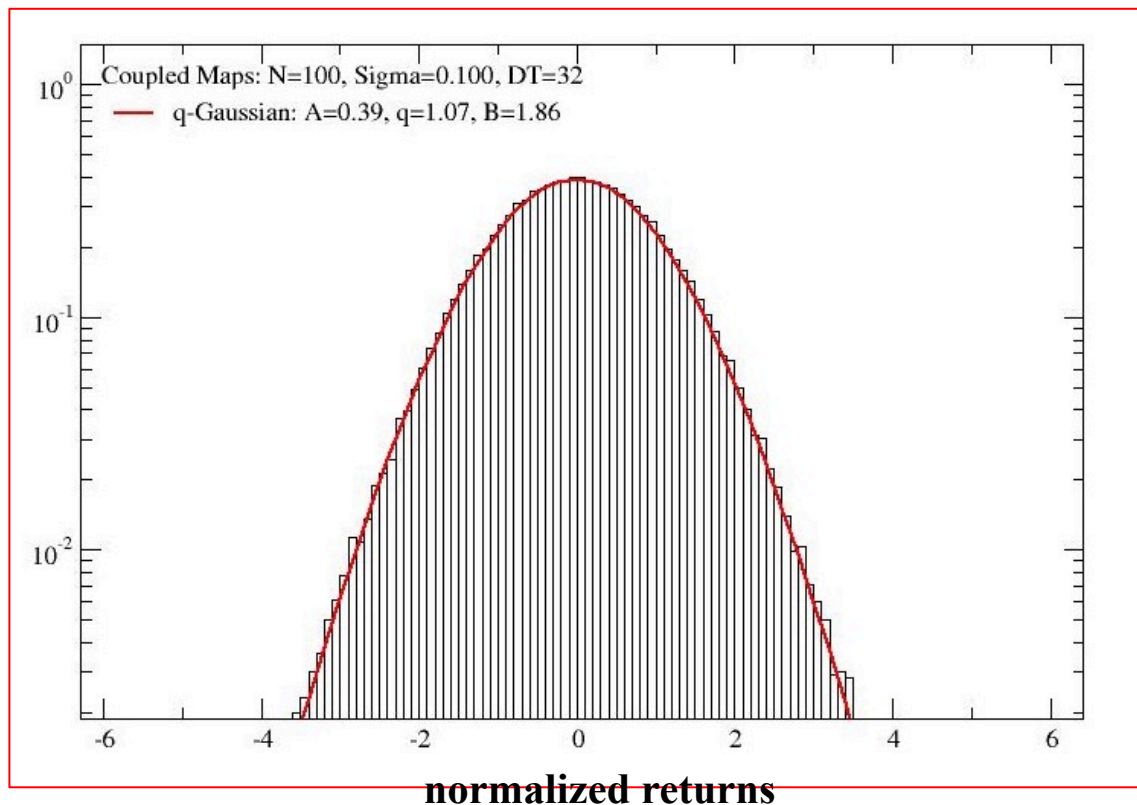
$$\sigma_{\max}=0.10$$

$$q=1.07$$

q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

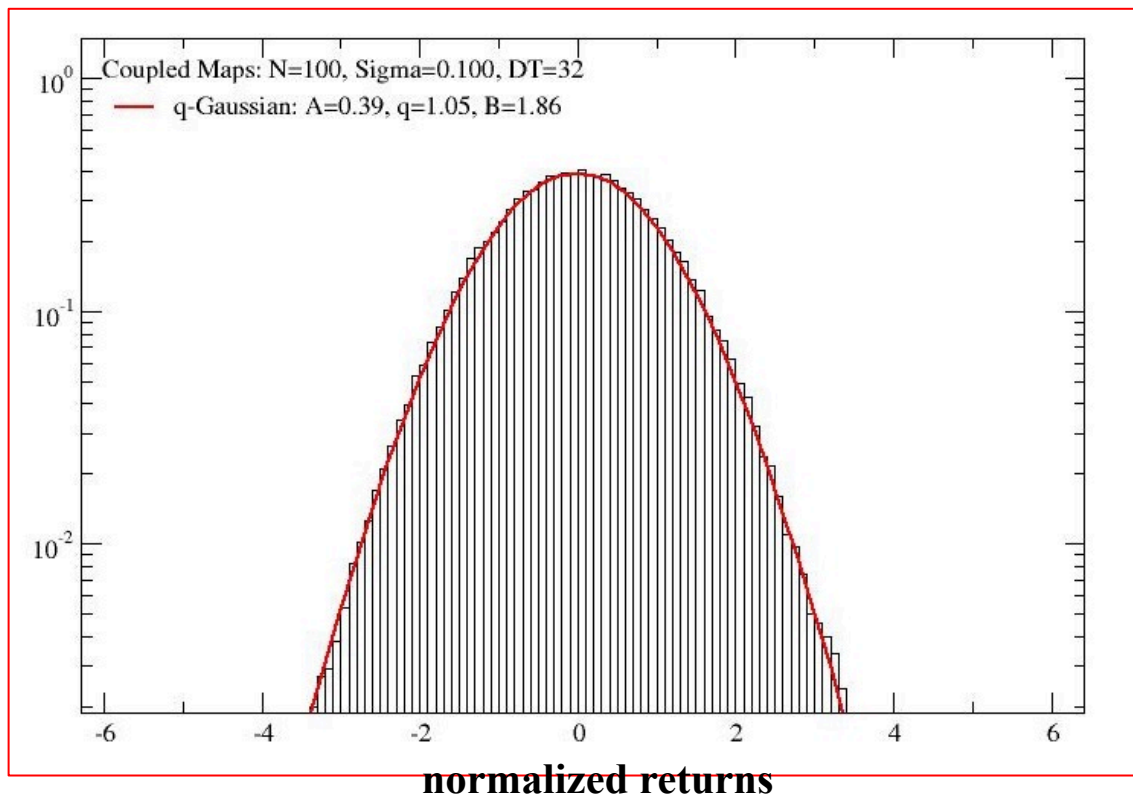
$$\sigma_{\max}=0.14$$

$$q=1.05$$

**q-Gaussian:**

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{\frac{1}{1-q}}$$

**$q=1 \rightarrow$  Gaussian**



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf)** dei ritorni normalizzati per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

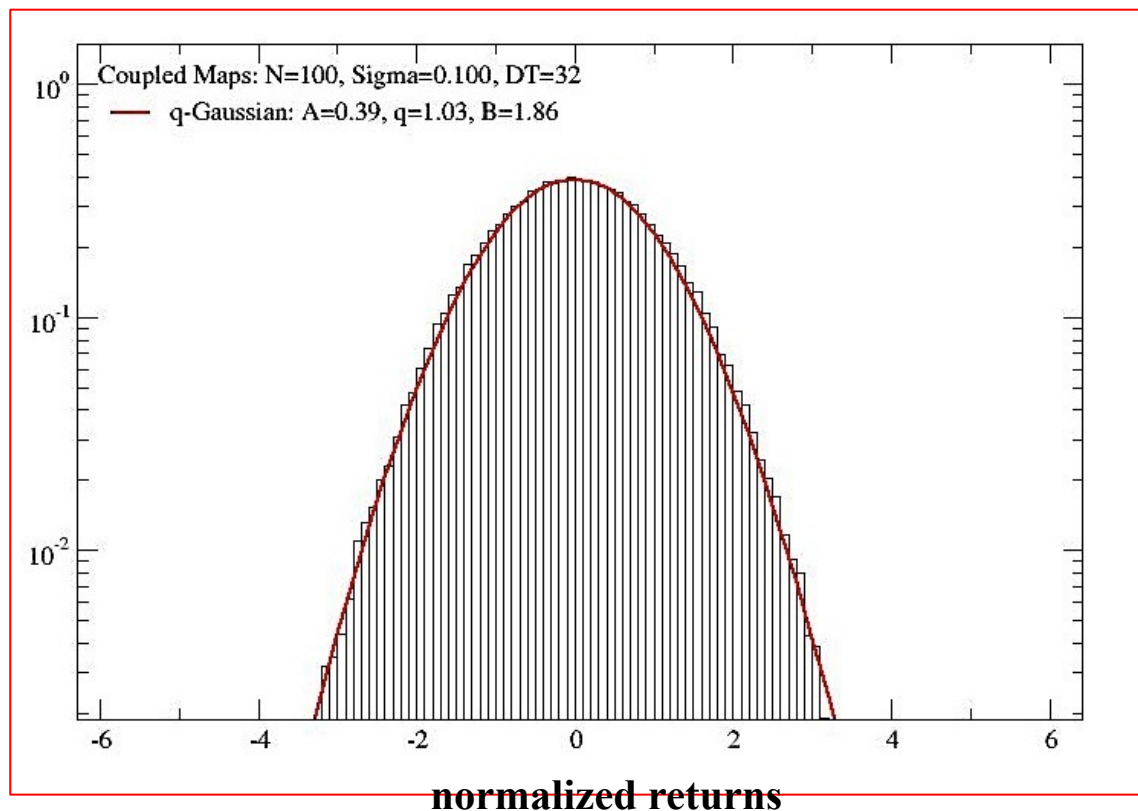
$$\sigma_{\max}=0.17$$

$$q=1.03$$

**q-Gaussian:**

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{\frac{1}{1-q}}$$

**$q=1 \rightarrow$  Gaussian**



# PDF dei ritorni normalizzati per valori crescenti del rumore

Per apprezzare meglio la transizione dal comportamento intermittente a quello Gaussian, plottiamo la **distribuzione di probabilità (Pdf) dei ritorni normalizzati** per diversi **valori crescenti del rumore**. Code larghe nelle Pdfs sono chiaramente visibili solo quando  $\sigma_{\max} < 0.05$  e possono essere ben riprodotte da curve ***q*-Gaussiane** con valori decrescenti dell'indice entropico ***q***:

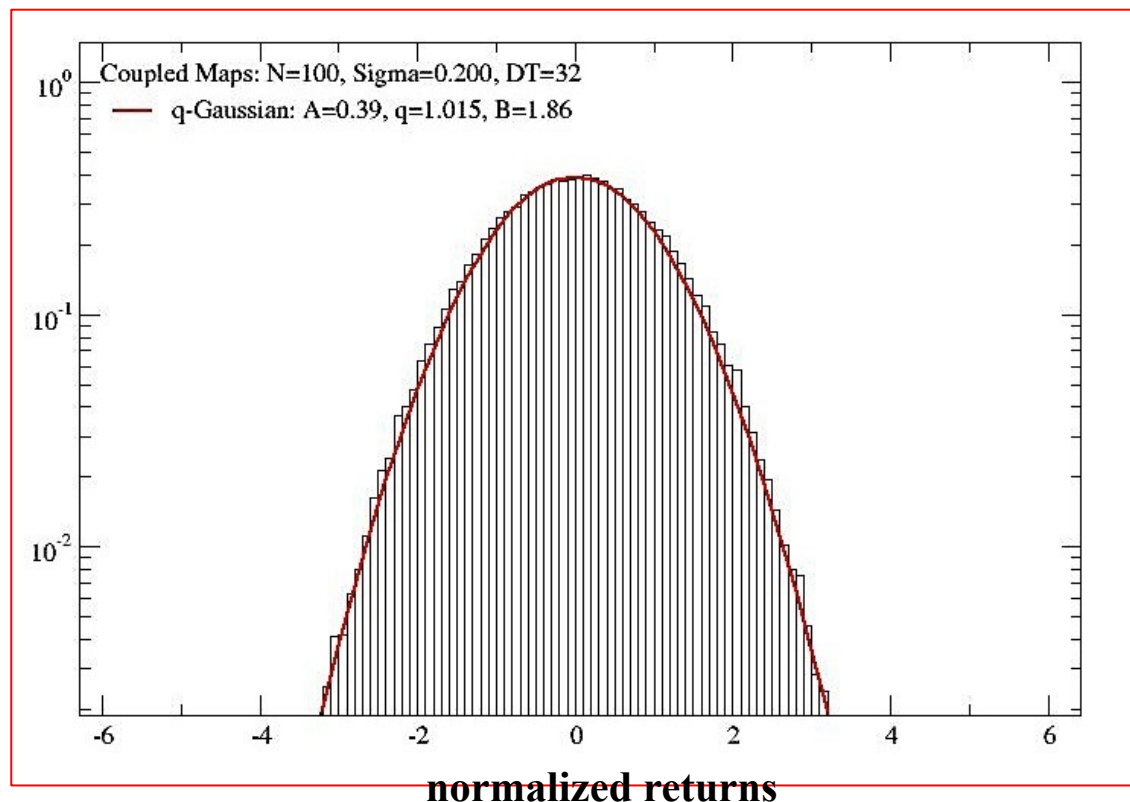
$$\sigma_{\max}=0.20$$

$$q=1.015$$

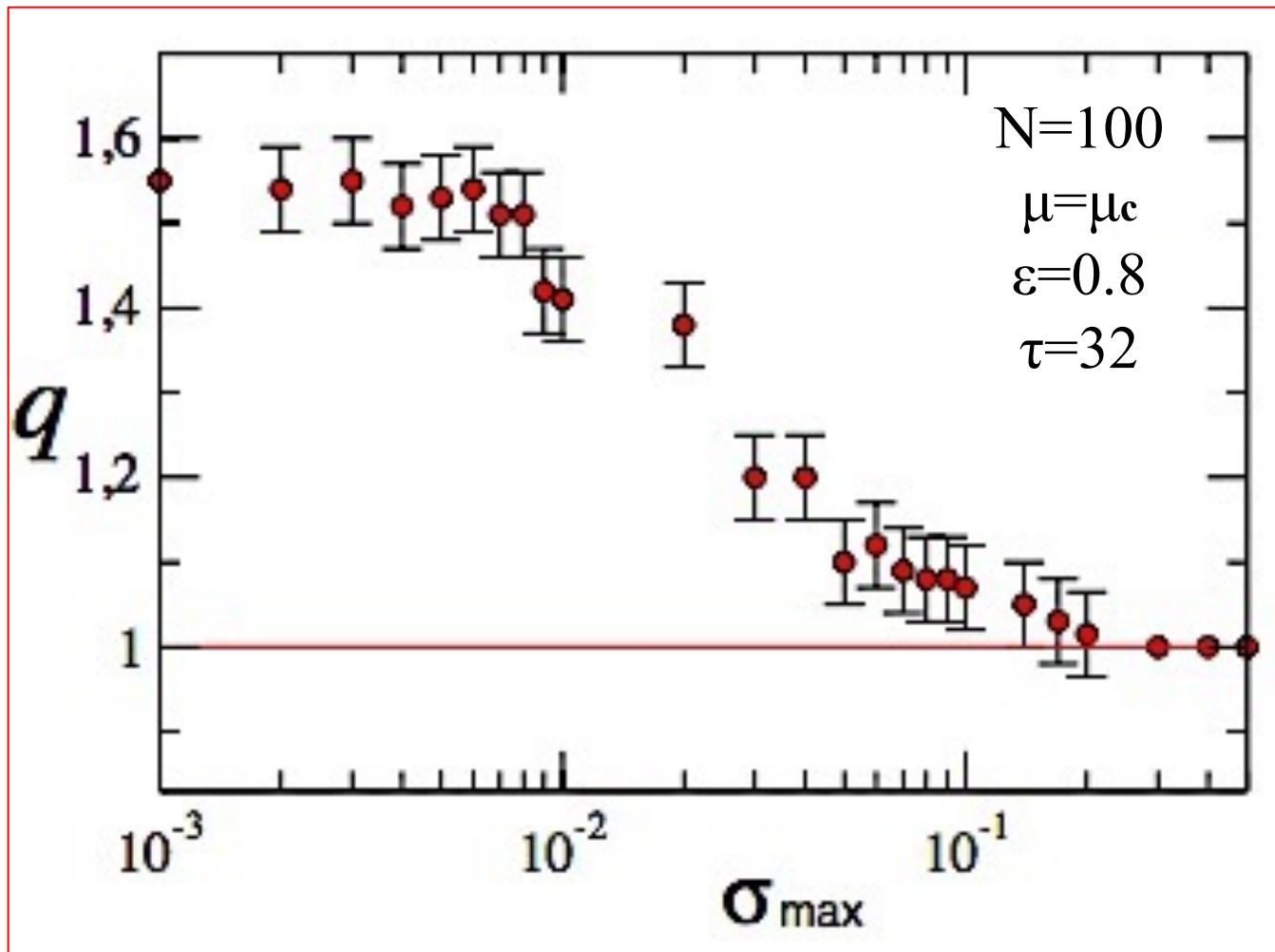
q-Gaussian:

$$G_q(x) = A [1 - (1 - q) \beta x^2]^{1/(1-q)}$$

$q=1 \rightarrow$  Gaussian



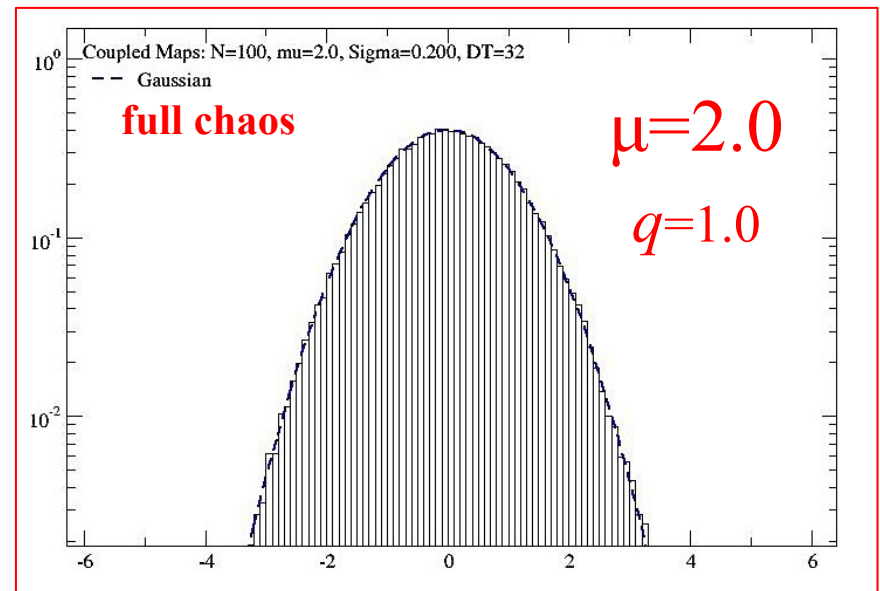
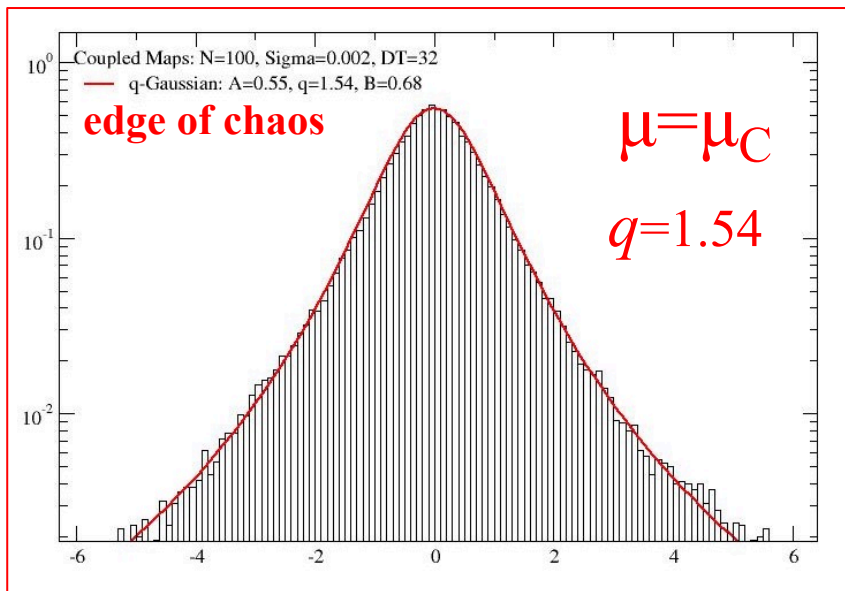
# Diagramma $q$ versus $\sigma_{\max}$



# Pdf dei ritorni normalizzati nel regime di “strong chaos”

La condizione di **edge of chaos** è strettamente necessaria per far emergere l’intermittenza e le forti correlazioni in presenza di bassi livelli di rumore. Infatti, se consideriamo le mappe nel regime di **strong chaos**, cioè con  $\mu = 2$  invece di  $\mu = \mu_c$ , e lasciando invariati tutti gli altri parametri, otteniamo una **Pdf Gaussiana** dei ritorni.

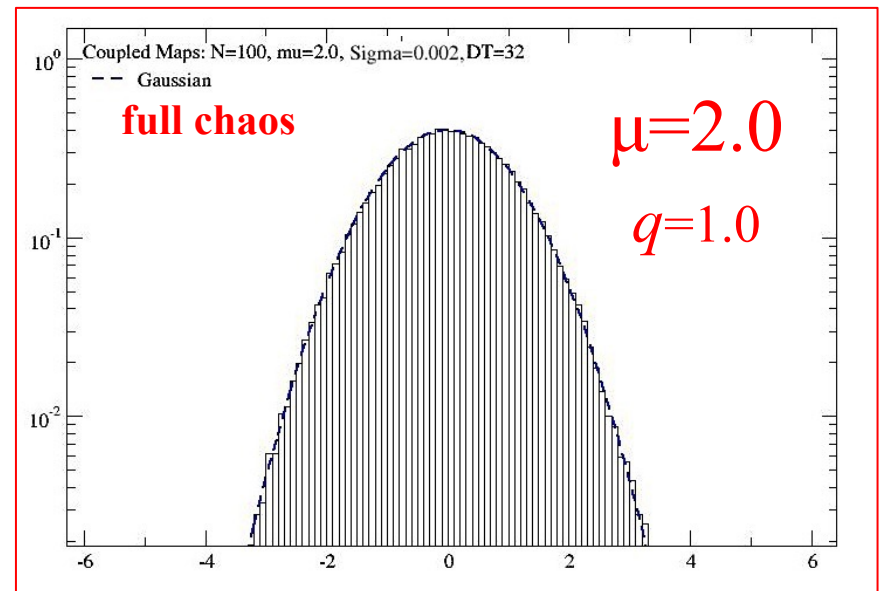
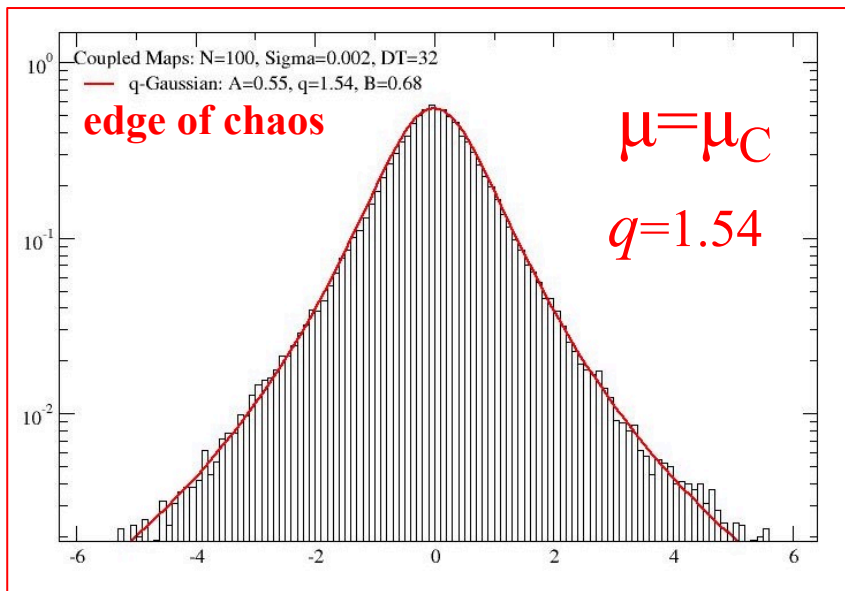
$$N=100, \sigma_{\max}=0.002, \varepsilon=0.8, \tau=32$$



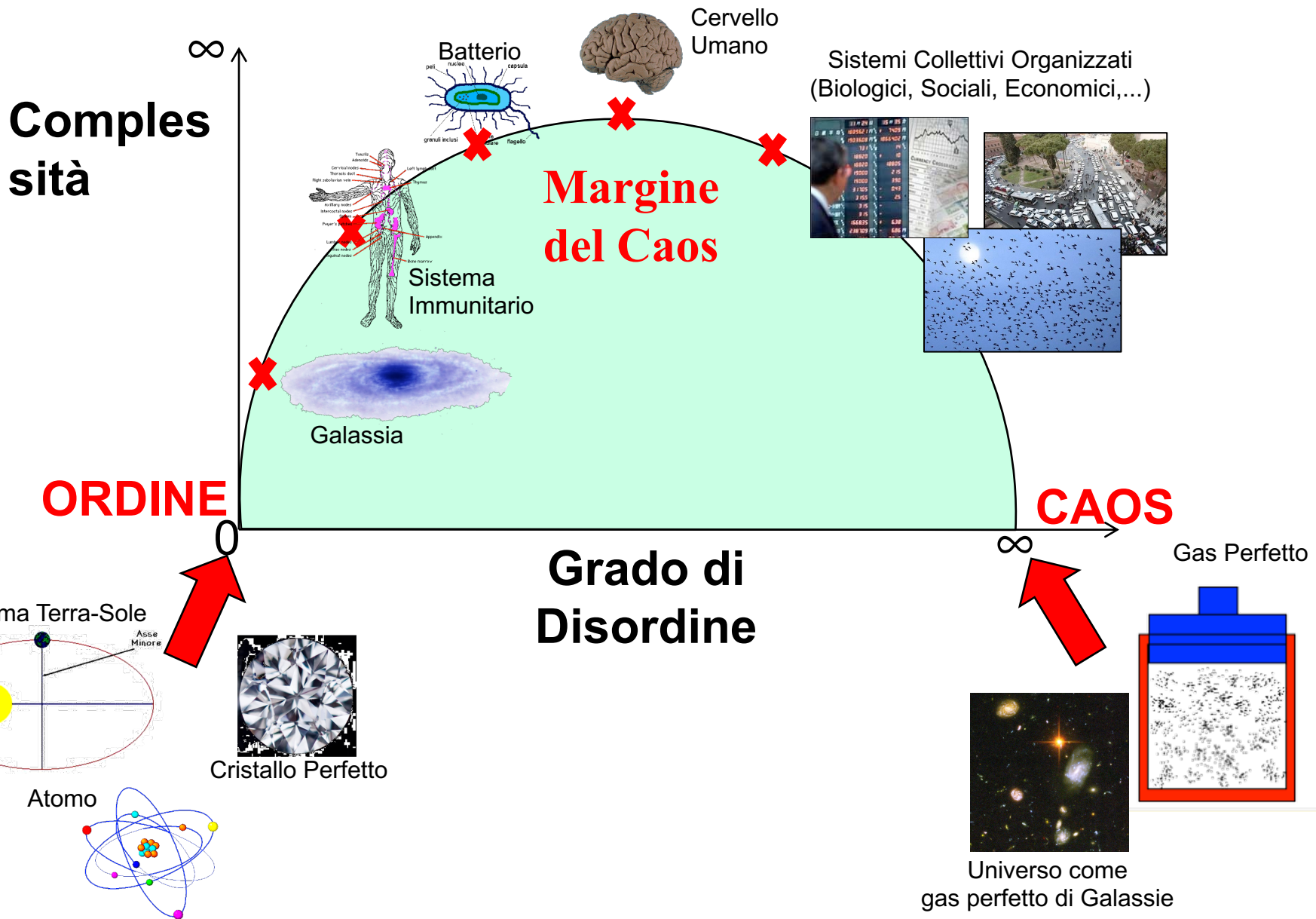
# Pdf dei ritorni normalizzati nel regime di “strong chaos”

La condizione di **edge of chaos** è strettamente necessaria per far emergere l’intermittenza e le forti correlazioni in presenza di bassi livelli di rumore. Infatti, se consideriamo le mappe nel regime di **strong chaos**, cioè con  $\mu = 2$  invece di  $\mu = \mu_c$ , e lasciando invariati tutti gli altri parametri, otteniamo una **Pdf Gaussiana** dei ritorni.

$$N=100, \sigma_{\max}=0.002, \varepsilon=0.8, \tau=32$$



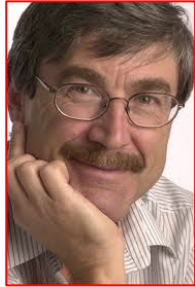
# Complessità "at the edge of chaos"



NE RIPARLEREMO NEL SEMINARIO CONCLUSIVO...

# L'enigma “Riccioli d'Oro”

**Perché viviamo in un universo favorevole alla vita?**



**Paul Davies**

*“Io prendo sul serio la vita, la mente e la finalità, e ammetto che l’universo quanto meno sembra progettato con un elevato livello di ingegnosit . Non posso accettare questi aspetti come uno scrigno di meraviglie che ci sono soltanto per caso, che esistono senza una ragione”*

