

Dal Caos ai Sistemi Complessi:

frattali, sincronizzazione, criticità auto-organizzata, reti complesse e meccanica statistica generalizzata

Andrea Rapisarda

*Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università di Catania*

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

Complexity Science Hub Vienna



COMPLEXITY
SCIENCE
HUB
VIENNA

Cosa studia la Fisica

- ♦ La Fisica si occupa dello studio delle leggi che regolano i fenomeni naturali e le interazioni dei costituenti della materia.
- ♦ Generalmente l'approccio di un fisico è quello di rendere il problema il più semplice possibile, cercando di individuare le caratteristiche fondamentali del fenomeno in studio e trascurando il resto.
- ♦ Ad esempio: lo studio del moto di un grave o di un pendolo, trascurando l'attrito
- ♦ Questo metodo *riduzionista* ha portato a degli enormi successi, ma si basa sull'idea, non sempre valida, che basta scomporre un oggetto o un fenomeno in quelle che sono le sue parti fondamentali per spiegarne il suo comportamento complessivo

- ♦ Non è sempre realistico descrivere con semplici figure geometriche (coni,cerchi,cubi,triangoli, ecc.) gli oggetti che vogliamo studiare
- ♦ Le **singole componenti** di un sistema fisico non interagiscono sempre debolmente, ma sono **spesso fortemente accoppiate con termini non lineari**. Ad esempio a differenza della semplice forza elastica

$$F = -kx$$

che contiene solo un termine lineare, è spesso più realistico considerare dei termini quadratici o di ordine superiore

- ♦ Il tutto non è sempre la semplice somma delle singole parti.
- ♦ I fenomeni naturali sono in generale più complessi di quanto a prima vista possa spesso sembrare....basta guardarsi intorno.

Determinismo e predicibilità

- Le leggi della meccanica sono deterministiche....
...ovvero date le condizioni iniziali ad un tempo t e conoscendo la forma funzionale della legge che regola il fenomeno, posso conoscere l'evoluzione passata e futura del fenomeno.
- ♦ Come mai allora molti fenomeni naturali sembrano essere del tutto casuali?

DETERMINISMO



PREDICIBILITA'

- ♦ Nonostante la radicata convinzione di molti...

Non sempre è necessario un modello complicato per spiegare un comportamento complicato:

Leggi semplici con termini **non lineari** possono avere comportamenti molto complicati...

....e **piccole differenze iniziali** possono causare **grandi ed imprevedibili effetti** nell'evoluzione futura.

Lancio dei dadi

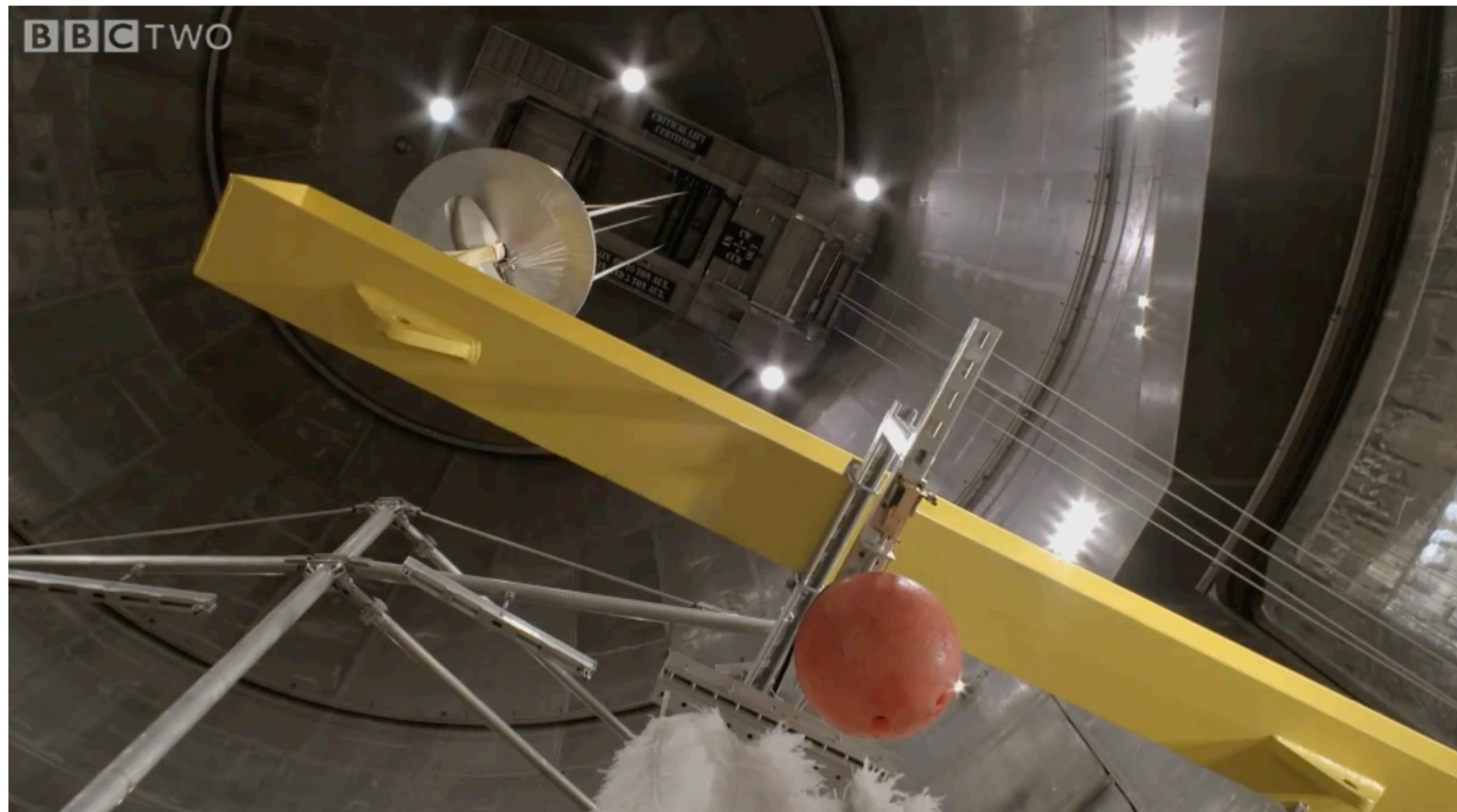


La pallina della roulette



Dal caos ai sistemi complessi
A. Rapisarda

La caduta di una piuma (in presenza di attrito)



Determinismo e predicibilità

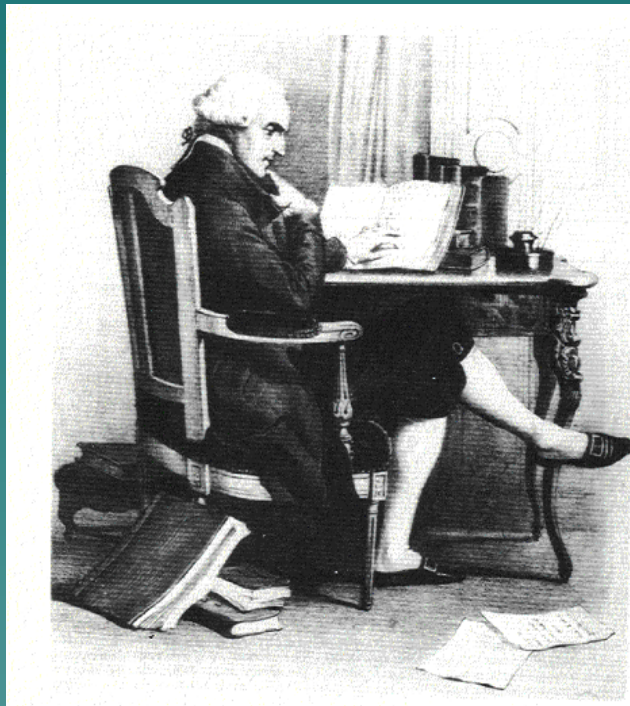
Perchè

- ♦ il lancio dei dadi
- ♦ il moto della pallina nella roulette
- ♦ il moto di una piuma che cade
- ♦ il tempo che farà fra due settimane
- ♦ Il gocciolamento di un rubinetto
- ♦ i terremoti

sembrano essere dominati dal caso e sfidano la nostra possibilità di previsione, nonostante siano tutti fenomeni descrivibili con leggi deterministiche?

Determinismo e predicibilità

Punto di vista di Laplace



Pierre Simon de Laplace
(1749-1827)

Essai philosophique sur les probabilités

“Un’intelligenza che, per un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottomettere questi dati all’analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell’universo e quelli dell’atomo più leggero: nulla le risulterebbe incerto, l’avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all’astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza.”

Determinismo e predicibilità

Punto di vista di Poincaré



Henri Poincaré
(1854-1912)

Science et méthode di Henri Poincaré

Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancar di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non sempre è così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.

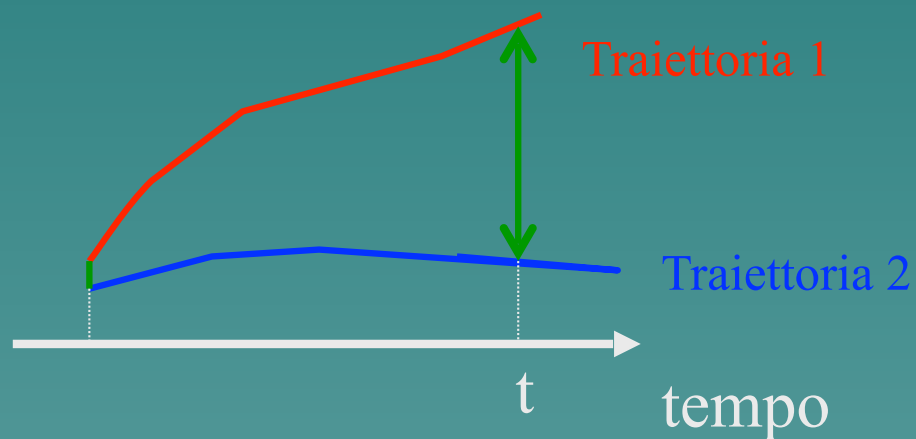
Come dobbiamo rappresentare un recipiente pieno di gas? Innumerevoli molecole animate da grandi velocità solcano questo recipiente in tutte le direzioni; a ciascun istante, urtano le pareti o si scontrano tra loro; e questi urti hanno luogo nelle condizioni più diverse. Ciò che in questo caso ci colpisce non è la piccolezza delle cause, ma soprattutto la loro complessità. Eppure, il primo elemento è ancora presente e ha un ruolo importante. Se una molecola fosse deviata, verso sinistra o verso destra rispetto alla sua traiettoria, di una quantità piccolissima, paragonabile al raggio d'azione delle molecole di un gas, essa eviterebbe una collisione, oppure la subirebbe in condizioni diverse, e questo farebbe variare, magari di 90 o di 180 gradi, la direzione della sua velocità dopo l'urto.

E non è tutto: abbiamo appena visto che è sufficiente deviare la molecola, prima dell'urto, di una quantità infinitamente piccola, perché essa sia deviata, dopo l'urto, di una quantità finita.

Perché i meteorologi hanno tanta difficoltà a prevedere il tempo con un certo grado di esattezza? Perché i rovesci di pioggia, e le tempeste stesse, ci sembrano arrivare a caso, tanto che molte persone trovano del tutto naturale pregare per avere la pioggia o il bel tempo, mentre riterrebbero ridicolo invocare un'eclisse con la preghiera? Noi vediamo che le grandi perturbazioni si producono generalmente nelle regioni in cui l'atmosfera è in equilibrio instabile. I meteorologi sono ben consapevoli che questo equilibrio è instabile, che un ciclone nascerà da qualche parte, ma dove? Non sono in grado di dirlo; un decimo di grado in più o in meno in un punto qualunque e il ciclone scoppia qui e non là, porta le sue devastazioni in contrade che sarebbero state risparmiate. Se si fosse conosciuto questo decimo di grado, si sarebbe potuto prevederlo in anticipo, ma le osservazioni non erano né abbastanza ravvicinate né abbastanza precise, ed è per questo che tutto sembra dovuto all'intervento del caso.

Cos'è il Caos deterministico

- ◆ Diciamo che un fenomeno mostra un regime di **caos deterministico** quando:
- ◆ Abbiamo una dipendenza molto sensibile dalle condizioni iniziali
- ◆ Ovvero una **incertezza iniziale** che cresce esponenzialmente col tempo
- ◆ Questo determina una **impredicibilità a lungo termine** della sua evoluzione futura.



Perchè il Caos deterministico implica imprevedibilità a lungo termine

Abbiamo visto che l'incertezza iniziale ε_0 sempre presente si propaga nel tempo secondo la legge

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\lambda t} \quad (1)$$

λ si chiama **massimo esponente di Lyapunov**.

Supponiamo di non volere un'incertezza maggiore di 1, e indichiamo questo tempo di previsione massimo con $t_{\max}$, cioè sia $\varepsilon(t_{\max})=1$.

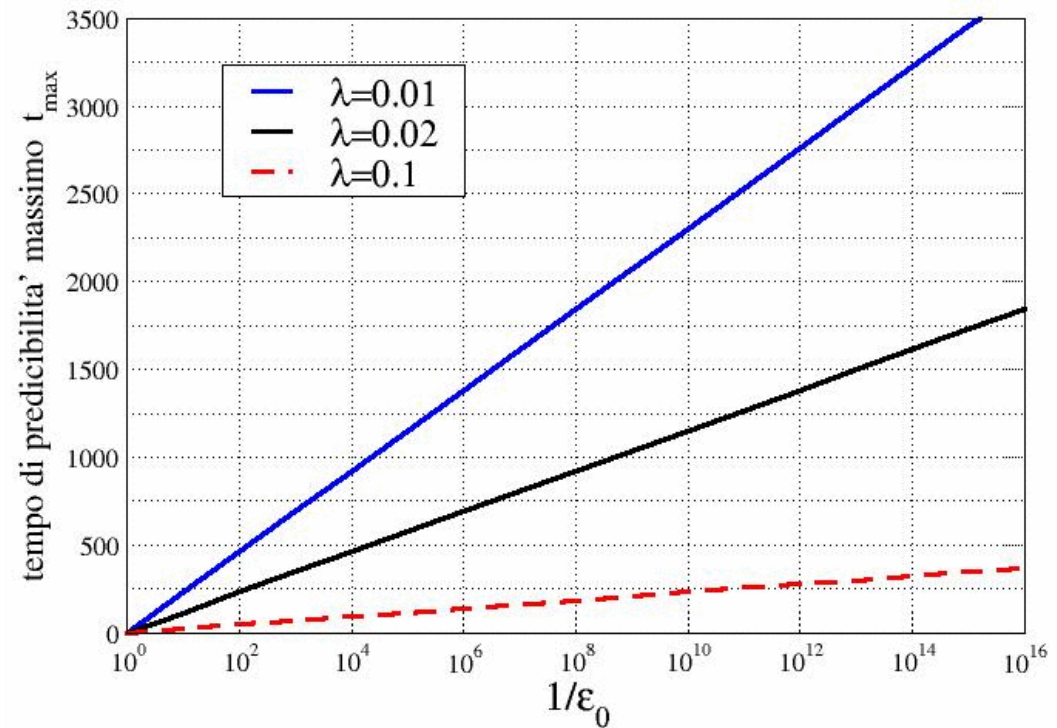
Allora dalla (1) prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ottiene

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

Per quanto piccolo possa essere il nostro tasso di crescita esponenziale λ , se $\lambda > 0$, per poter raddoppiare il tempo di previsione bisogna diminuire di molti ordini di grandezza l'incertezza iniziale, raggiungendo inevitabilmente dei limiti invalicabili

Impredicibilità a lungo termine

Per raddoppiare il tempo di previsione massimo $t_{\max}$ bisogna diminuire l'incertezza iniziale di parecchi ordini di grandezza...
...questo ovviamente è possibile solo fino ad un certo punto.



Il Caos è intorno a noi

Si potrebbe pensare che essendo stato ignorato per così tanto tempo questo fenomeno sia raro...

Invece si può tranquillamente affermare che

***Il caos deterministico
è la regola più che l'eccezione.***

Bisogna temere il caos?

Assolutamente No!

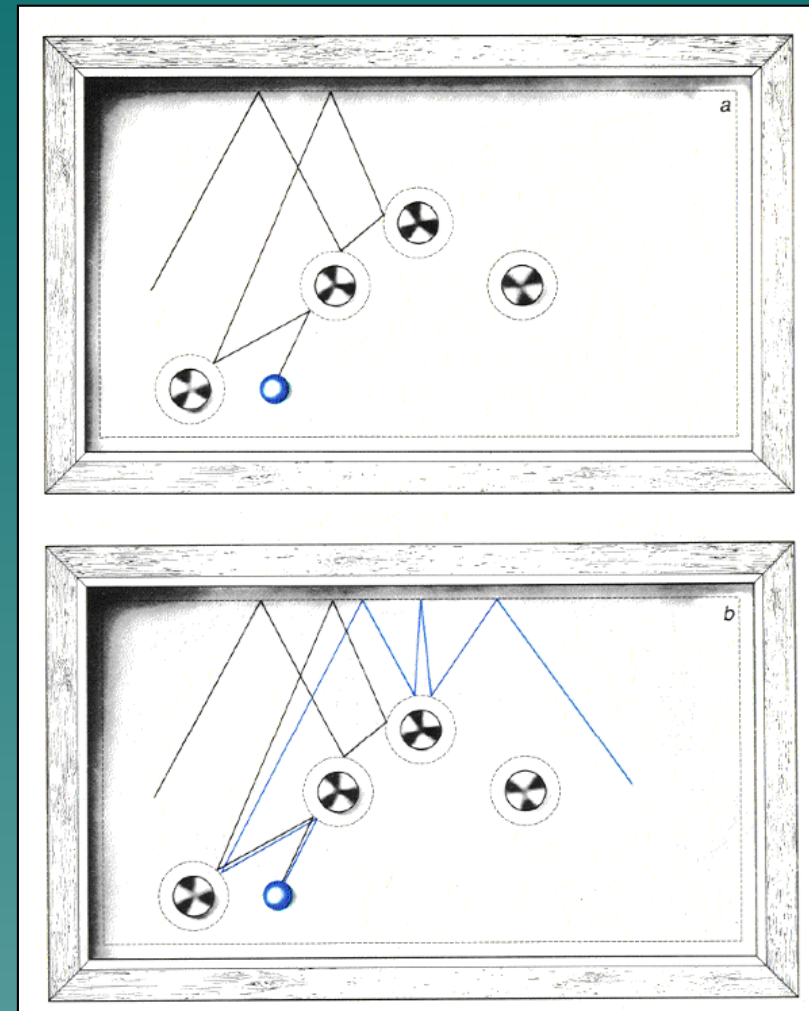
Ecco alcune buone ragioni

- ♦ Il caos può essere studiato in maniera rigorosa e segue delle leggi universali.
- ♦ E' fondamentale sapere se un sistema si trova in un regime caotico o regolare.
- ♦ Il caos può essere estremamente utile
- ♦ E' indispensabile al mescolamento dei fluidi, ma anche alla evoluzione dei viventi ed alla loro sopravvivenza in un ambiente che varia nel tempo.
- ♦ Il caos può essere controllato

Esempi di Caos deterministico

♦ Il biliardo

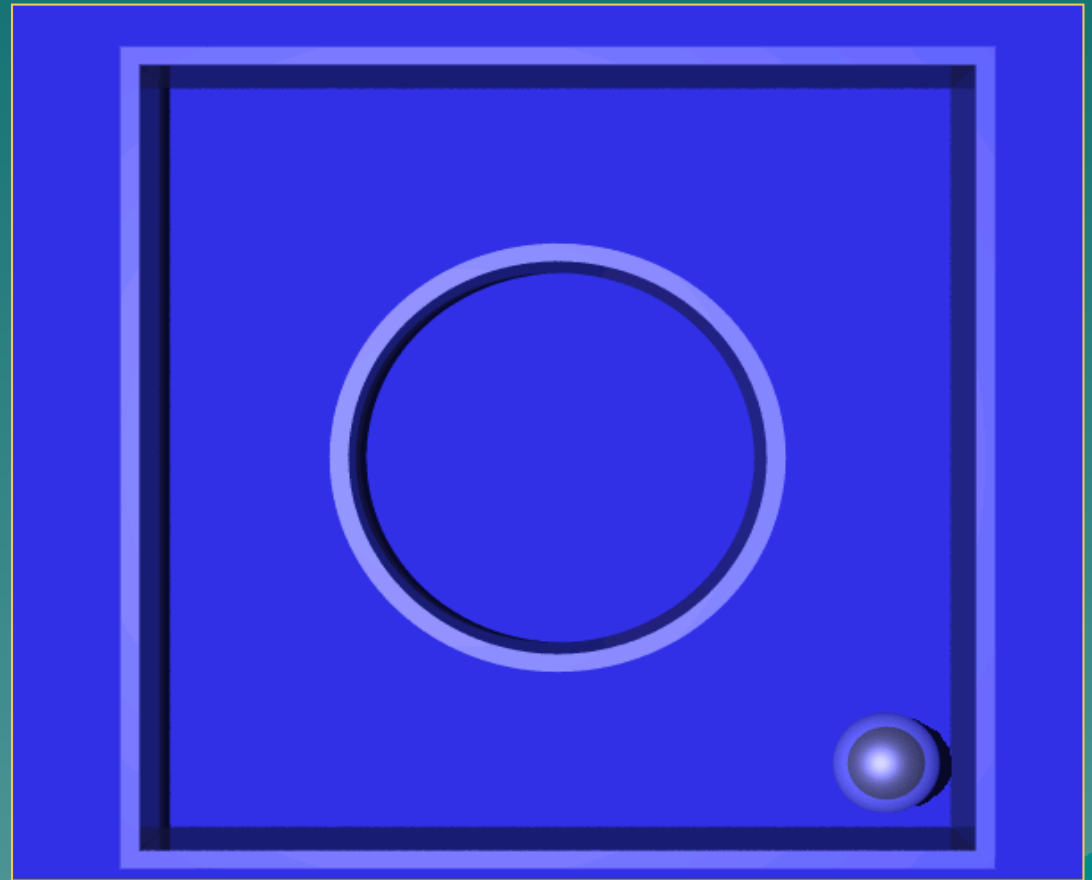
Gli ostacoli sferici per il potere defocalizzante delle superfici curve fanno sì che piccole differenze iniziali vengano amplificatedopo pochi rimbalzi due traiettorie inizialmente simili hanno una evoluzione completamente diversa



Il biliardo di Sinai



Il matematico russo Jakov Sinai (1935) oggi professore a Princeton ha provato in maniera rigorosa che questo biliardo con un ostacolo sferico mostra caos deterministico



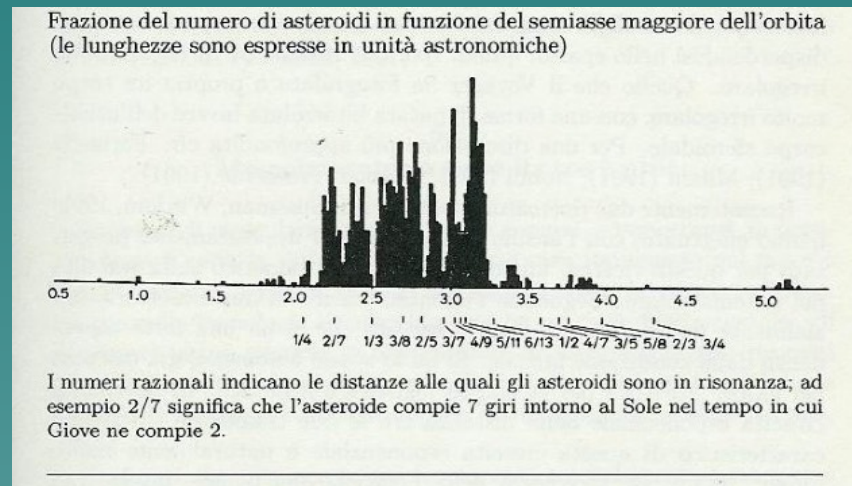
Esempi di Caos deterministico

- ♦ Il pendolo smorzato e forzato



Esempi di Caos deterministico

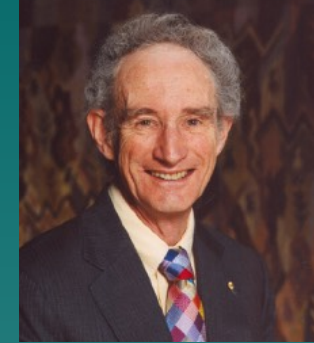
- ♦ Il sistema solare non è così stabile come si potrebbe pensare...
- ♦ Già' Poincarè si rese conto agli inizi del secolo che il **problema dei tre corpi non è integrabile**....ovvero non ammette una soluzione analitica... e un piccolo corpo di prova si muove in maniera erratica nel campo gravitazionale di due grossi corpi massivi.
- ♦ Oggi oltre a dettagliati studi teorici (Wisdom, Laskar e altri) vi sono diverse indicazioni sperimentali in questa direzione
 - Il moto irregolare di Iperione un satellite molto deformato di Saturno
 - la distribuzione dei periodi degli asteroidi, che mostra dei buchi in corrispondenza di valori razionali con il periodo dell'orbita di Giove



Esempi di Caos deterministico

- ♦ La mappa logistica di Robert May (1976)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$



Robert May (1936 -2000)

Nature **261** 459-67 (1976)

Simple mathematical models with very complicated dynamics

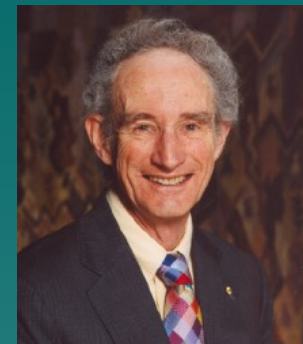
Robert M. May*

First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.

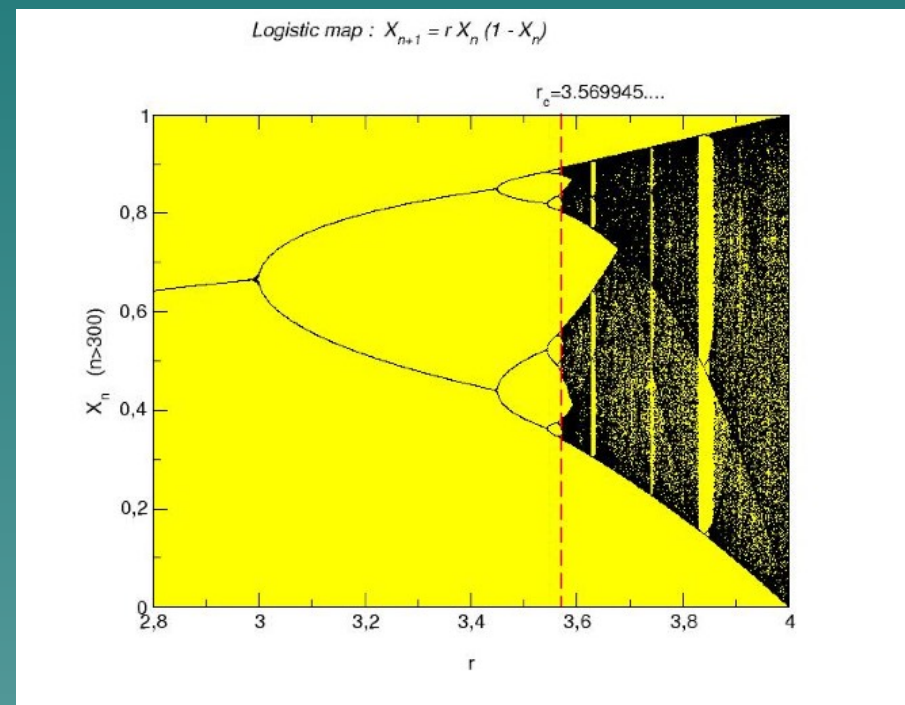
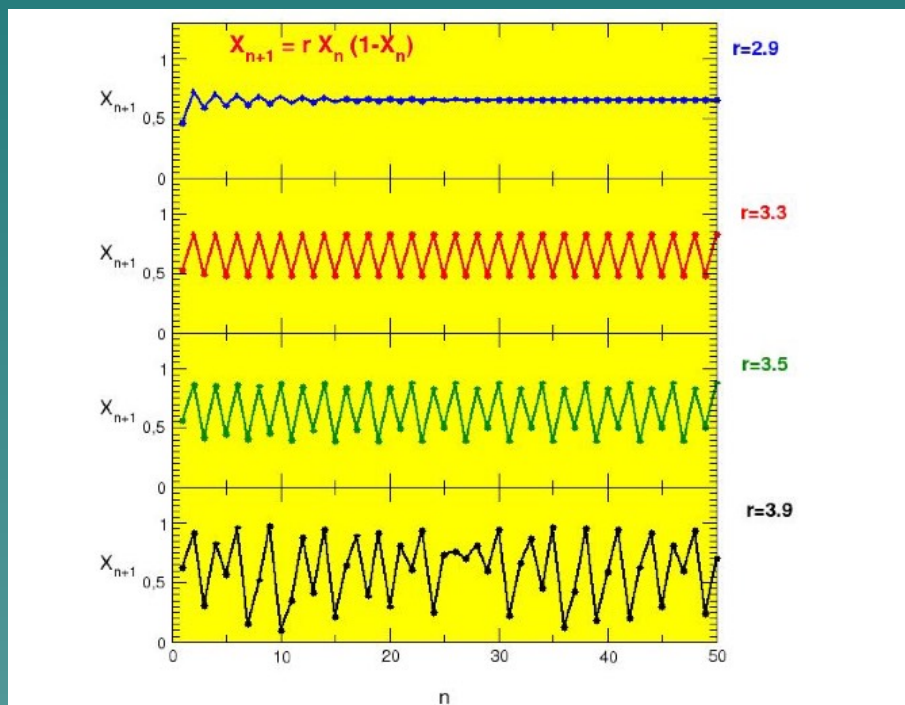
Esempi di Caos deterministico

- ♦ La mappa logistica di Robert May (1976)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$



Robert May (1936 -2000)



Esempi di Caos deterministico

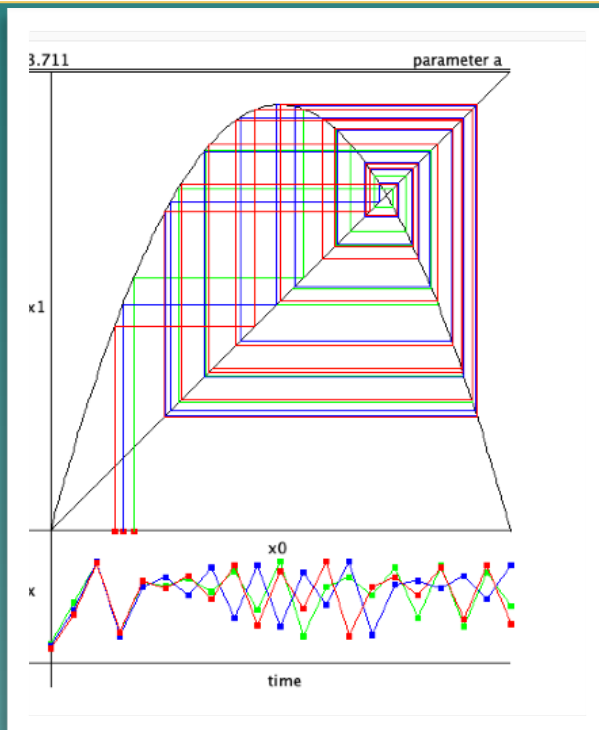
- ♦ La mappa logistica

May (1976)

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$$

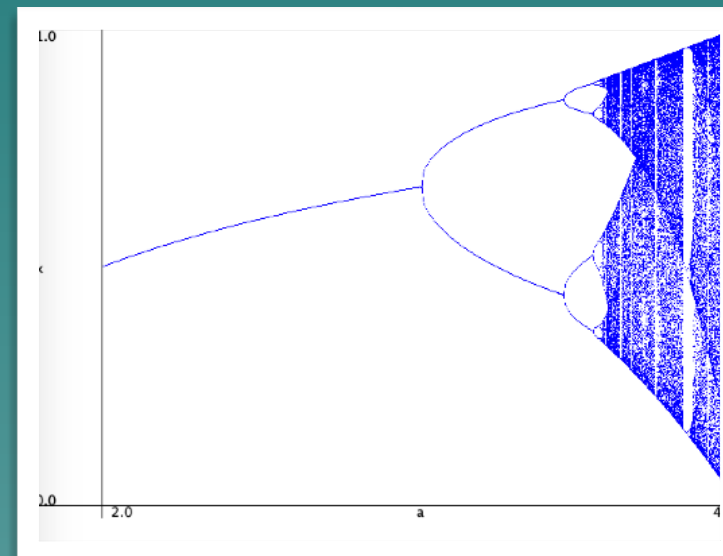
- ♦ Sensibilità alle condizioni iniziali

Time Series of Logistic map



- ♦ Diagramma di biforcazioni

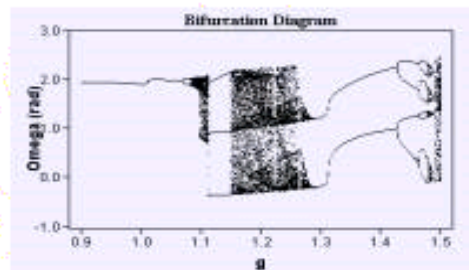
Bifurcation diagram of the logistic map



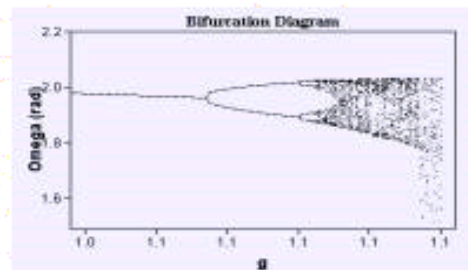
Biforcazioni nel pendolo

Observations:

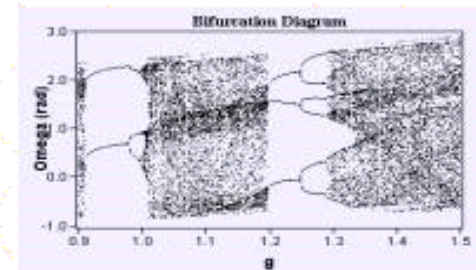
Below are some bifurcation diagrams that can be obtained for various values of the dampening factor (q).



(a)



(b)



(c)

Fig. 1: Bifurcation Diagram of the damped, driven pendulum when $\omega_D = 2/3$ and $\Phi = 0.0$. g ranges from 0.9 to 1.50 (a) $q = 2$; (b) an expansion of (a); (c) $q = 4$.

Depending on the initial conditions of the system, the behavior can follow different branches to chaos. Since the Bifurcation Diagram is viewed stroboscopically, a periodic system will have one point. A system exhibiting period doubling will have two points and a chaotic system will have multiple points. Figure (b) is an expansion of the bifurcation diagram for the system when experiencing the first bifurcation into period doubling and then chaos.

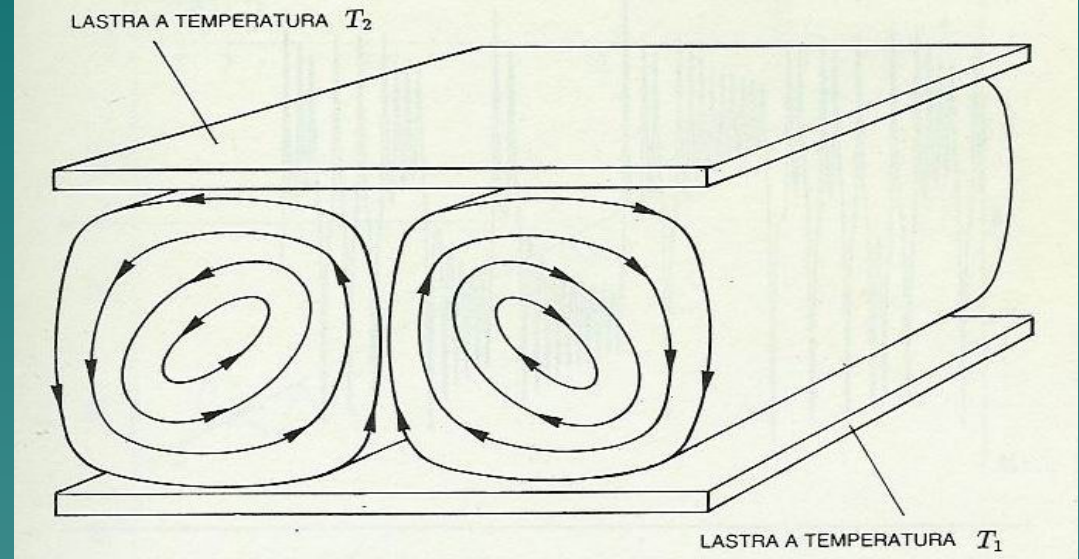
Attrattori strani

- ◆ Il modello di Lorenz (1963)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{array} \right.$$

x è legata alla velocità del fluido mentre y e z sono collegate alla differenza di temperatura

Convezione di Rayleigh-Bénard



$$\sigma = 10$$

Parametro che dipende dalla viscosità del fluido

$$b = 8/3$$

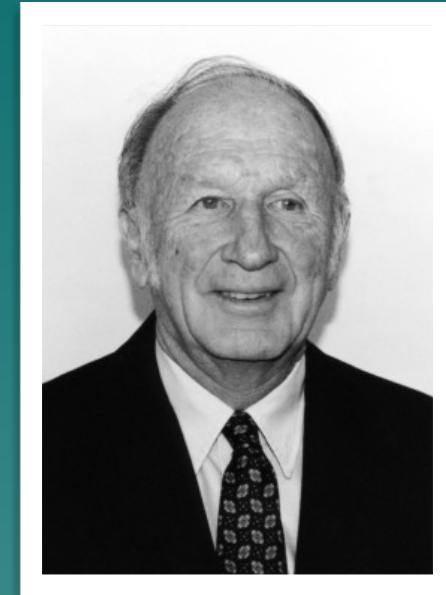
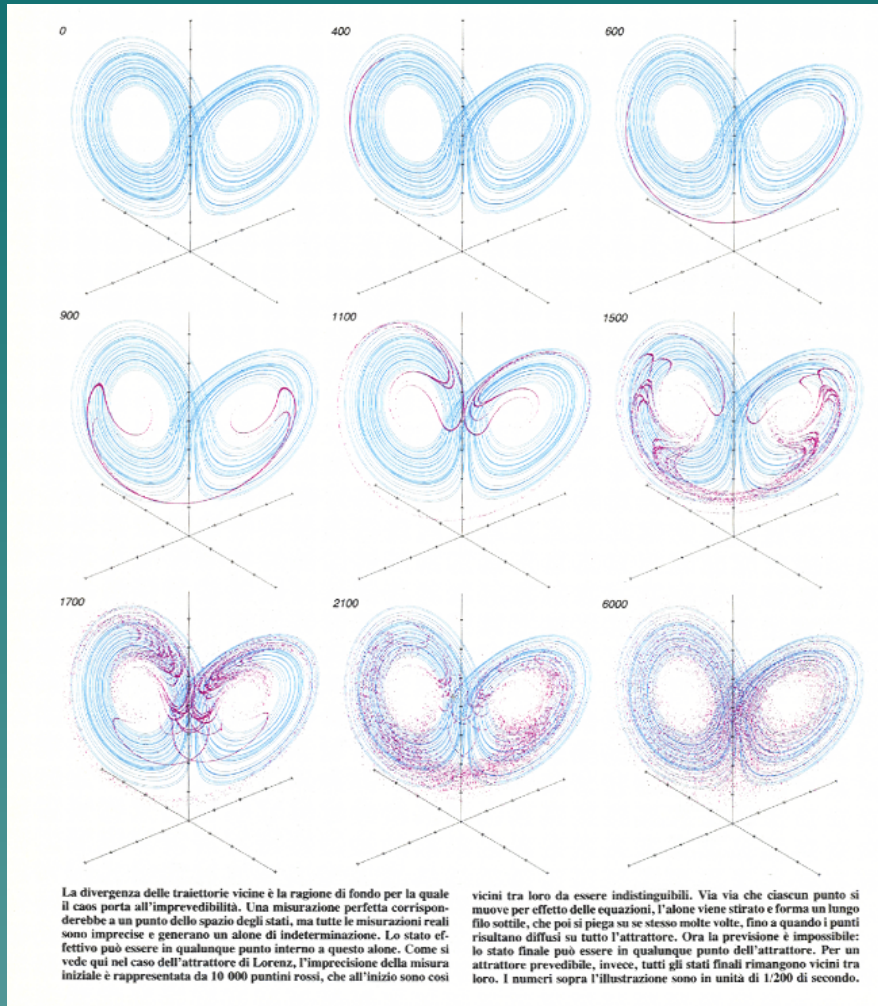
Parametro che dipende dalla geometria

$$r = 28$$

Parametro di controllo proporzionale alla differenza di temperatura

Attrattori strani

◆ L'attrattore di Lorenz (1963)

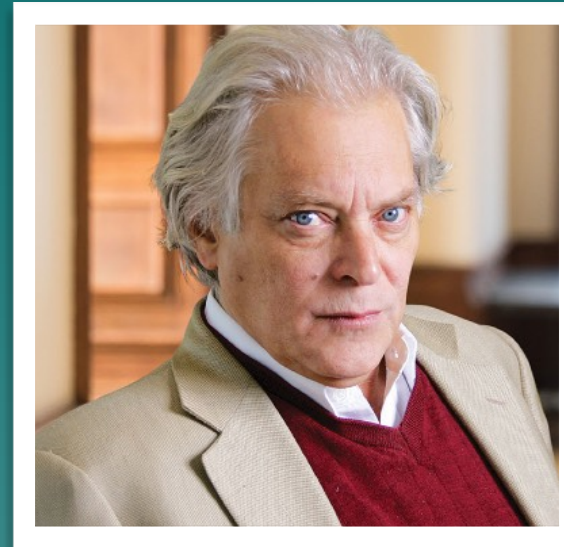


Edward Lorenz (1917 - 2008)

Universalità della transizione ordine-caos

La transizione dall'*ordine al caos* **segue delle leggi universali ben precise**

Infatti è caratterizzata da due costanti scoperte da Feigenbaum nel 1978 e confermate sperimentalmente con diversi dispositivi



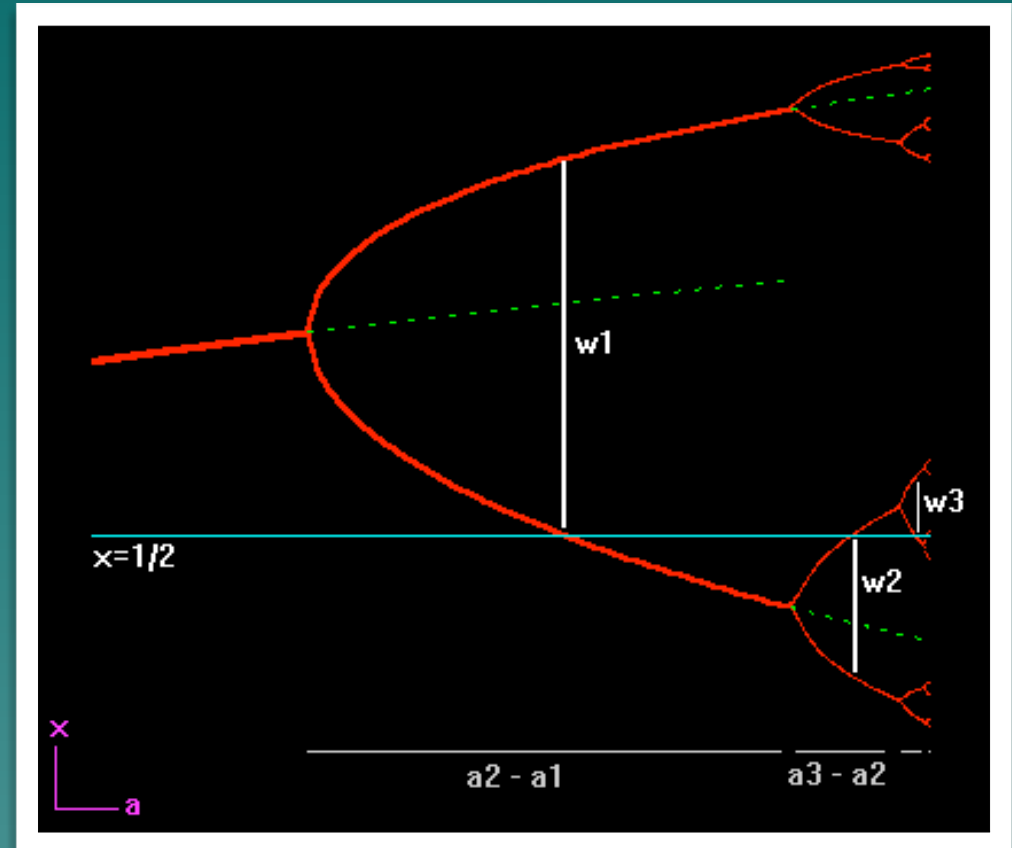
Mitchell Jay Feigenbaum (Filadelfia, 19 dicembre 1944 – New York, 30 giugno 2019) matematico e fisico statunitense, vincitore del premio Wolf nel 1986.

Universalità della transizione ordine-caos

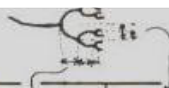
Costanti di Feigenbaum

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.6692016091...$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{w_{n+1}} = 2.5029078750...$$



Conferme sperimentali delle costanti di Feigenbaum α e δ



experiment	no. period doublings	δ	α
hydrodynamic:			
water[1]	2		
water[2]	4	4.3(8)	
helium[3]	4	3.5(1.5)	
mercury[4]	4	4.4(1)	
Electronic:			
diode[5]	4	4.5(6)	
diode[6]	5	4.3(1)	2.4(1)
transistor[7]	4	4.7(3)	
Josephson simul.[8]	3	4.5(3)	2.7(2)
Laser:			
laser feedback[9]	3	4.3(3)	O.K.
laser[10]	2		
laser[11]	3		
Acoustic:			
helium[12]	3		
helium[13]	3	4.8(6)	
Chemical:			
B-Zh reaction[14]	3		
Computer:			
N-S truncation[15]	5	4.6(2)	2.5(1)
Brusselator[16]	7	4.6(2)	
Theory:	∞	4.669..	2.503..
equation no.		(5.1)	(4.2)

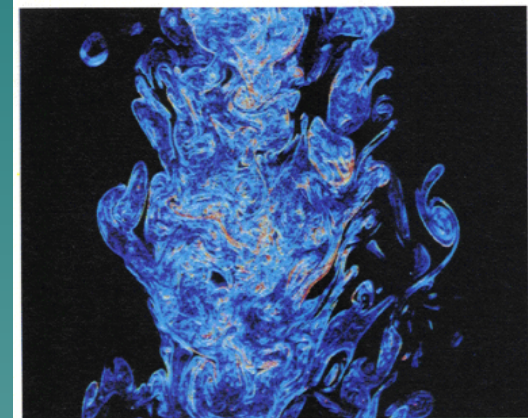
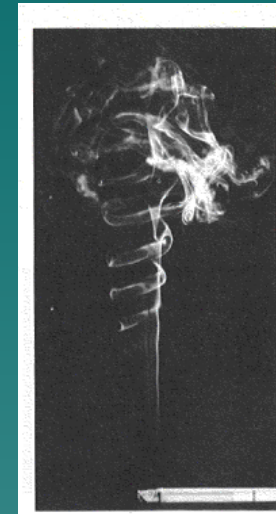
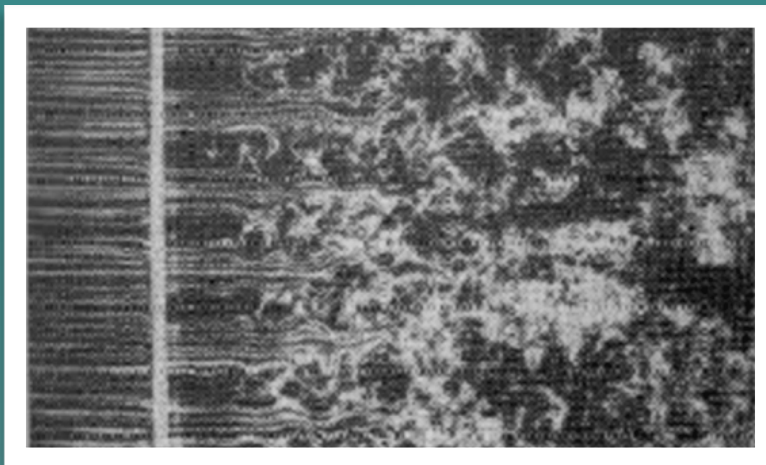
1. Gollub and Benson (1980).
2. Giglio, Musazzi and Perini (1981).
3. Libchaber and Maurer (1981).
4. Libchaber, Laroche and Fauve (1982).
5. Linsay (1982).
6. Testa, Pérez and Jefferies (1982).
7. Arecchi and Lisi (1982).
8. Yeh and Kao (1982).
9. Hopf, Kaplan, Gibbs and Shoemaker (1981).
10. Arecchi, Meucci, Puccioni and Tredicce (1982).
11. Weiss, Godone and Olafsson (1983).
12. Lauterborn and Cramer (1981).
13. Smith, Tejwani and Farris (1982).
14. Simoyi, Wolf and Swinney (1982).
15. Franceschini and Tebaldi (1979).
16. Kai (1981).

Caos spazio-temporale: La turbolenza

All'aumentare della velocità oltre una certa soglia il moto di un fluido passa da un regime **laminare**

ad uno **turbolento**.

Si formano strutture complesse che variano nello spazio e nel tempo. Si ha caos spazio-temporale.

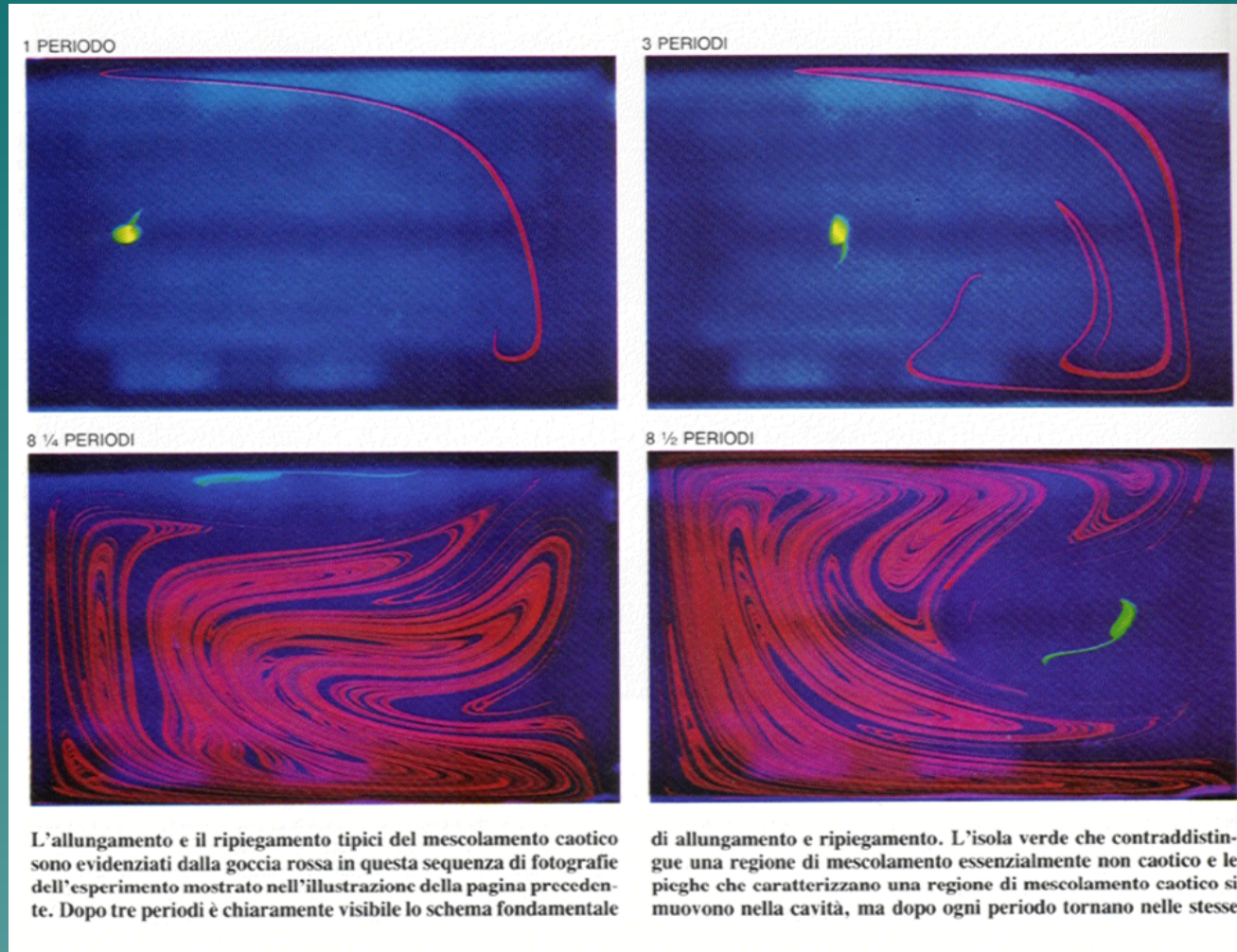


Il flusso turbolento può generare strutture molto diverse da quelle prodotte in un flusso viscoso lento. L'immagine, ottenuta da K. R. Sreenivasan della Yale University, è una ricostruzione al computer di un getto d'acqua espulso da un ugello circolare in acqua quieta. Le strutture del flusso venivano originariamente registrate su pellicola sciogliendo un colorante fluorescente nell'acqua espulsa e dirigendo una lama di luce laser lungo l'asse dell'ugello. L'intensità della fluorescenza risultante è proporzionale al gradiente di concentrazione relativo del colorante nell'acqua; le immagini sono state codificate in colore dal blu scuro al rosso a seconda del gradiente di concentrazione. Il flusso turbolento mostrato appare formato da varie strutture frattali sovrapposte, tra cui numerosi vortici.

Dal caos ai sistemi complessi
A. Rapisarda

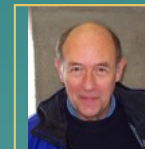
Caos e mescolamento di fluidi

Il meccanismo dell'allungamento e del ripiegamento



Breve cronistoria del caos deterministico

- ♦ **Poincarè (1900) Il problema dei tre corpi**
- ♦ **G. Birkhoff(1935) Teoremi sui sistemi dinamici**
- ♦ **Kolmogorov (1941) – Turbolenza, Entropia, Teorema KAM**
- ♦ **Y. Sinai – Ergodicità del biliardo con ostacoli sferici**
- ♦ **E. Lorenz (1963) – Effetto farfalla nelle previsioni meteorologiche**
- ♦ **B. Mandelbrot (1970) - I frattali**
- ♦ **D. Ruelle (1971) - Attrattori strani**
- ♦ **M. Feigenbaum (1980) – Universalità della mappa logistica**
- ♦ **...e da allora tanti altri fino ai giorni nostri**



Cos'è un frattale

"Perché la geometria viene spesso descritta come fredda e arida? Una ragione è l'inabilità di descrivere la forma di una nuvola o di una montagna una linea costiera o un albero. Le nuvole non sono delle sfere, le montagne non sono dei coni le linee costiere non sono dei cerchi, il sughero non è liscio ed i fulmini non si muovono lungo linee diritte."

-- Benoit B. Mandelbrot --

Così **Mandelbrot** nel suo libro *The Fractal Geometry of Nature* descrive l'inadeguatezza della geometria euclidea nella descrizione della natura.

Mandelbrot è il padre della **dei frattali** e inventore del famoso insieme che porta il suo nome.



Benoît Mandelbrot

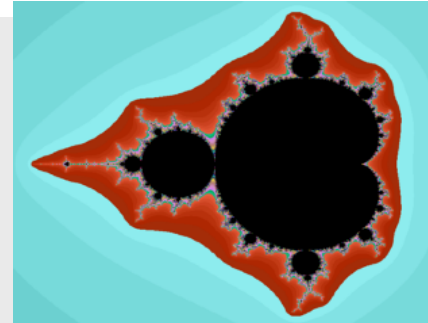
(Varsavia, 20 novembre 1924 – Cambridge, 14 ottobre 2010)

Mandelbrot è il padre dei frattali e inventore del famoso insieme che porta il suo nome.

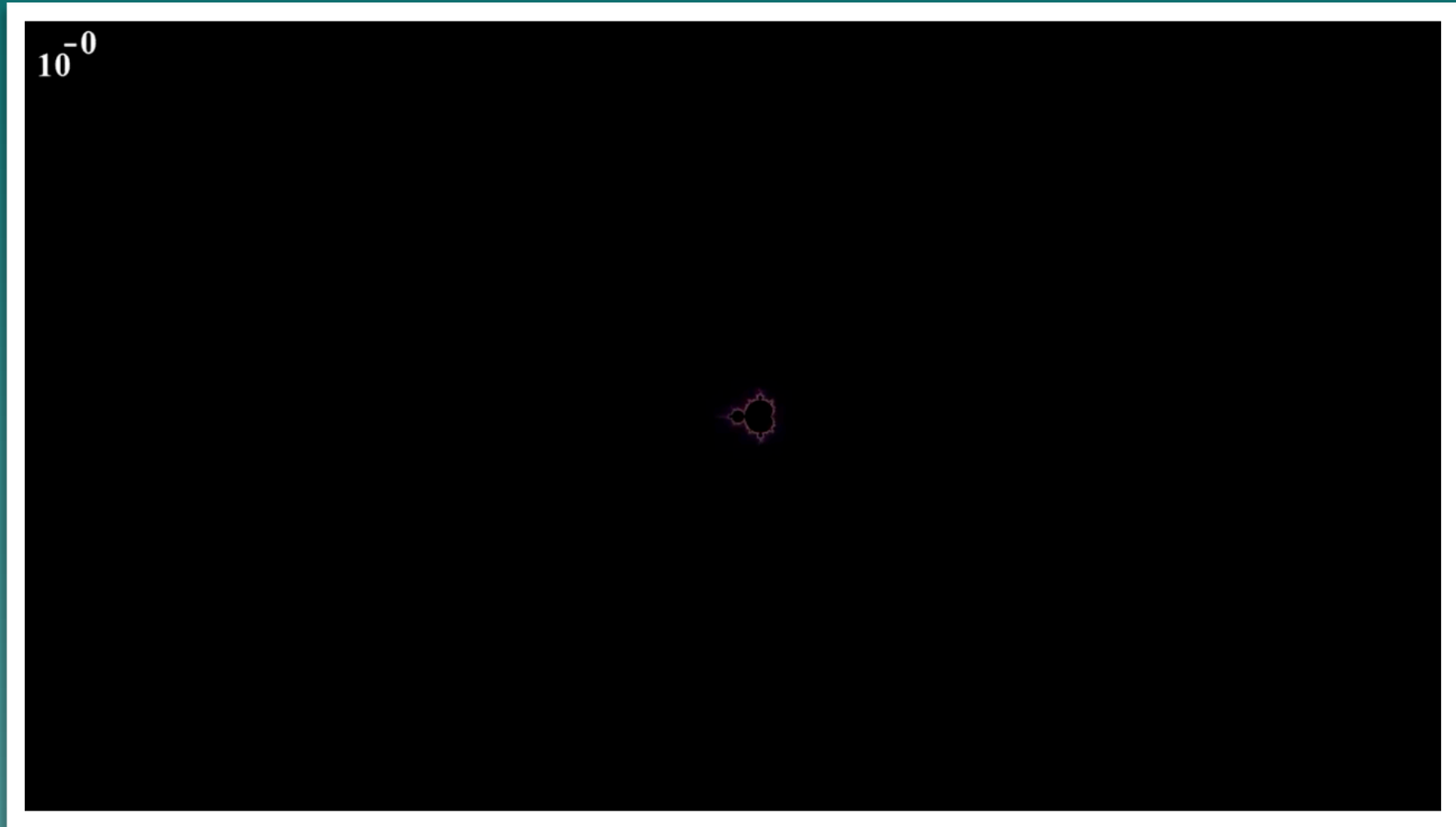
È l'insieme dei numeri complessi per i quali la successione definita da:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

è limitata

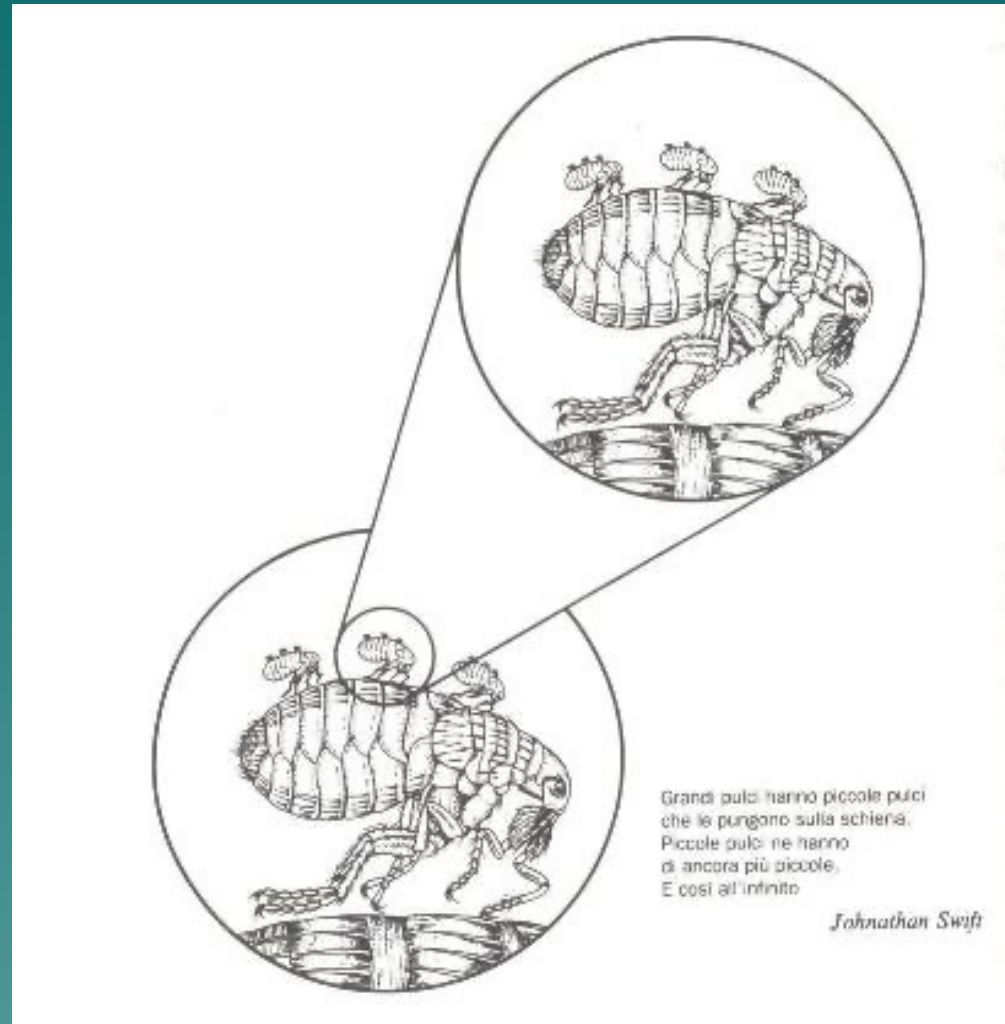


Il set di Mandelbrot



Cos'è un frattale

Un frattale è un oggetto che mostra una **invarianza di scala...ovvero ha la stessa struttura a tutte le scale** e che possiede **una dimensione non intera.**



Cos'è un frattale

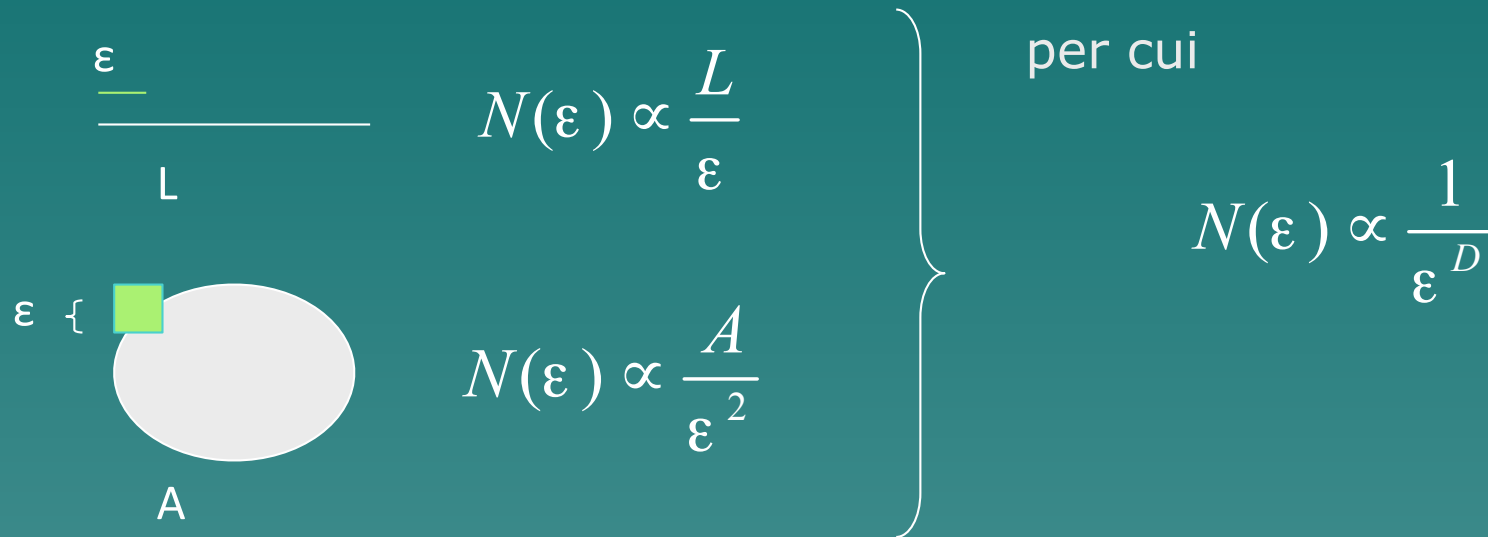
Il termine frattale fu coniato da Mandelbrot e ha origine nel termine latino *fractus*, poichè la dimensione di un frattale non è intera.

La dimensione di un oggetto è data dal numero minimo di coordinate necessarie ad individuare i punti dell'oggetto stesso.

Così per un punto è 0
per una linea è 1
per una superficie è 2
...

La dimensione frattale

La dimensione frattale è una generalizzazione della definizione di dimensione euclidea



per cui

$$N(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon^D}$$

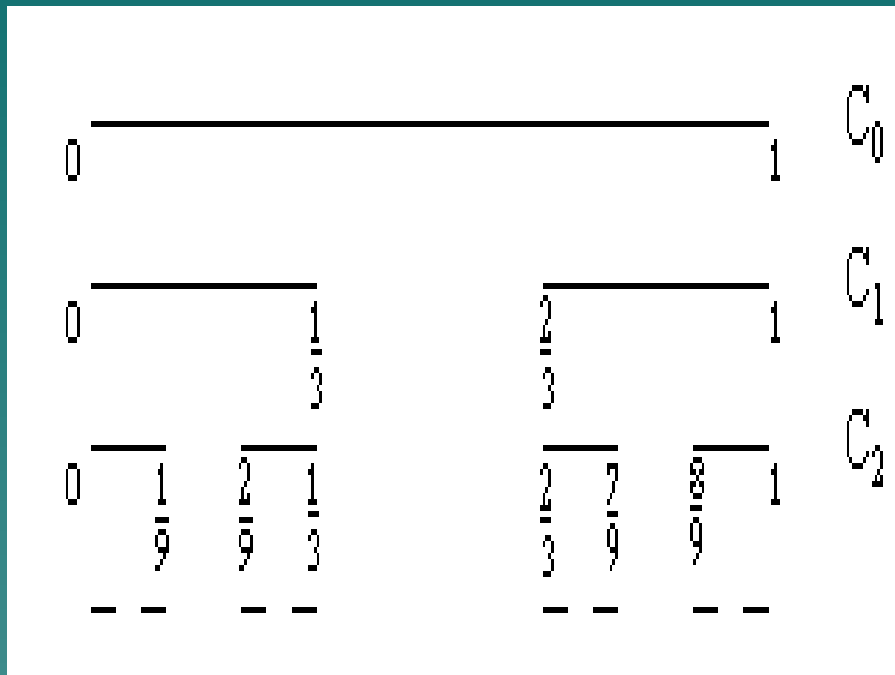
Generalizzando si può definire la dimensione frattale D_F come anche per valori non interi

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

Un semplice frattale: La polvere di Cantor



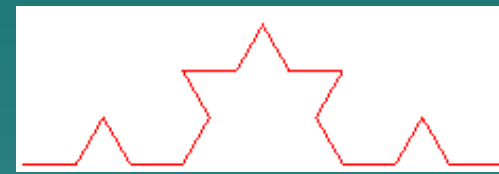
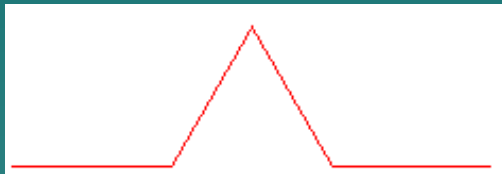
Georg Cantor
1845-1918



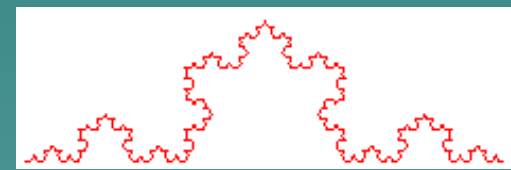
N	ε	iterazione
1	1	0
2	$1/3$	1
2^2	$(1/3)^2$	2
2^n	$(1/3)^n$	n

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(2)^2}{\ln(3)^2} = 0.63...$$

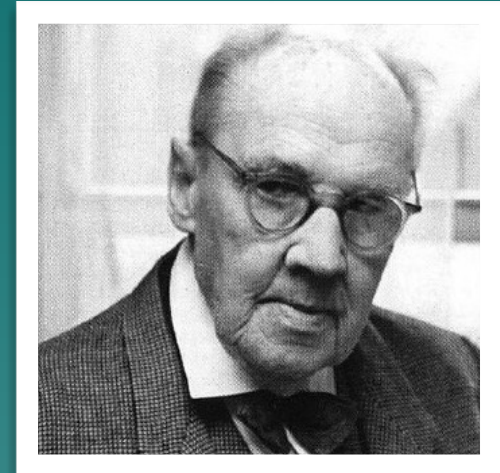
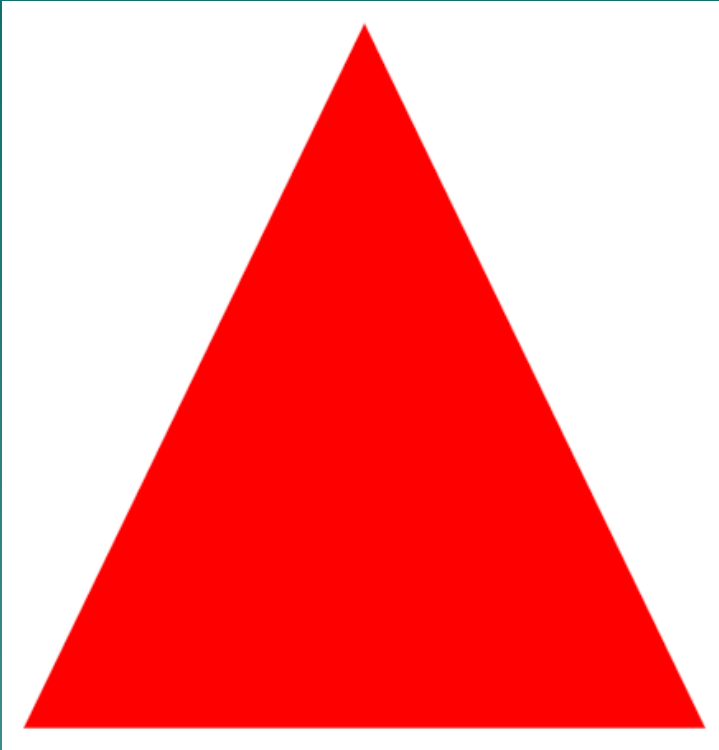
La curva di Koch



$$D_F = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26..$$



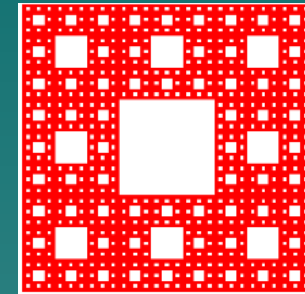
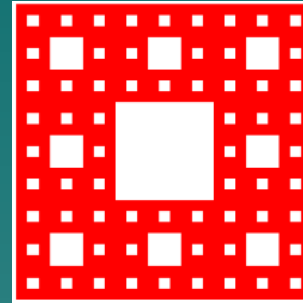
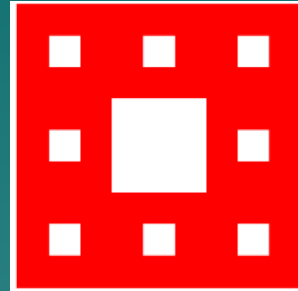
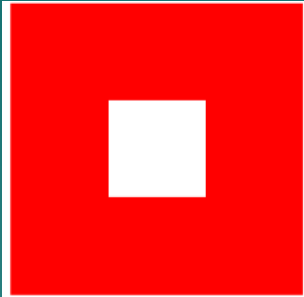
Il triangolo di Sierpinski



W. Sierpinski
(1882-1969)

$$D_F = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585...$$

Il tappeto di Sierpinski



W. Sierpinski
(1882-1969)

$$D_F = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.9$$

Strutture frattali intorno noi



Strutture frattali intorno noi

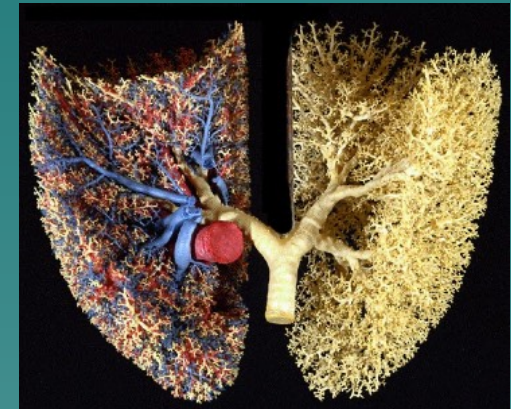
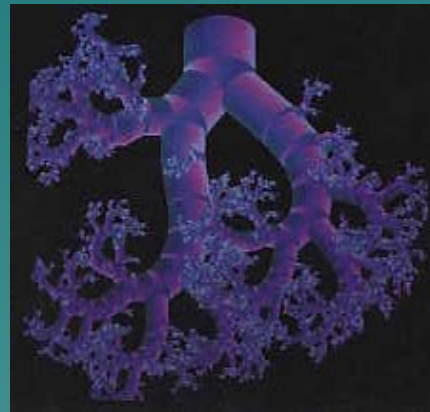
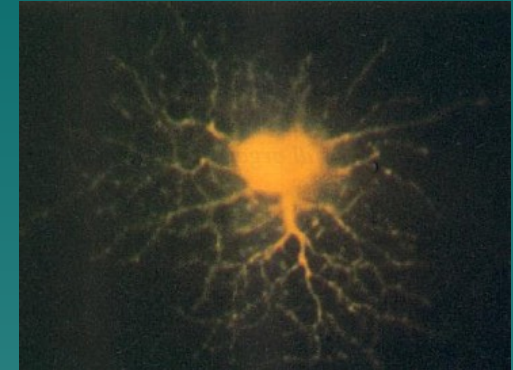
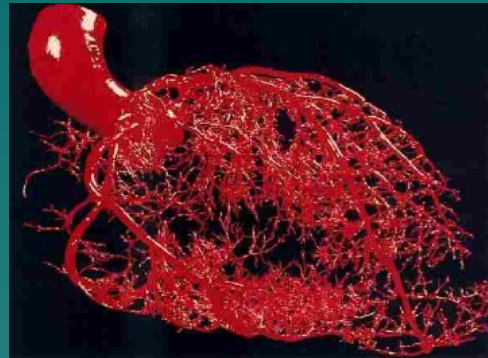
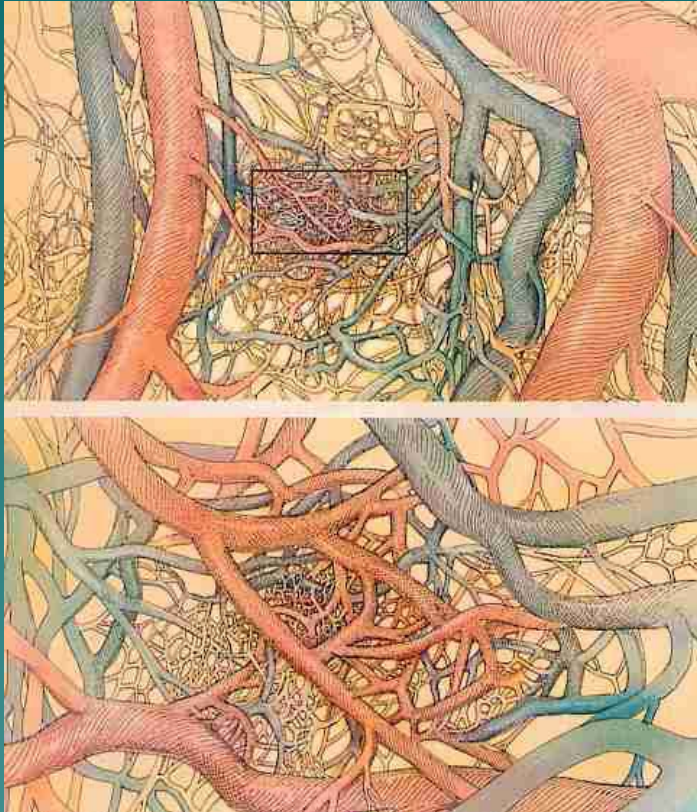


Strutture frattali intorno noi



Dal caos ai sistemi complessi
A. Rapisarda

strutture frattali intono a noi



Le strutture frattali massimizzano il rapporto superficie/volume: sebbene il volume di un paio di polmoni umani sia di soli ~ 4 - 6 litri, la superficie dello stesso paio di polmoni è compresa tra 50 e 100 metri quadrati, che è più o meno la stessa area di un campo da tennis!

strutture frattali intono a noi

- ♦ Una rete fluviale

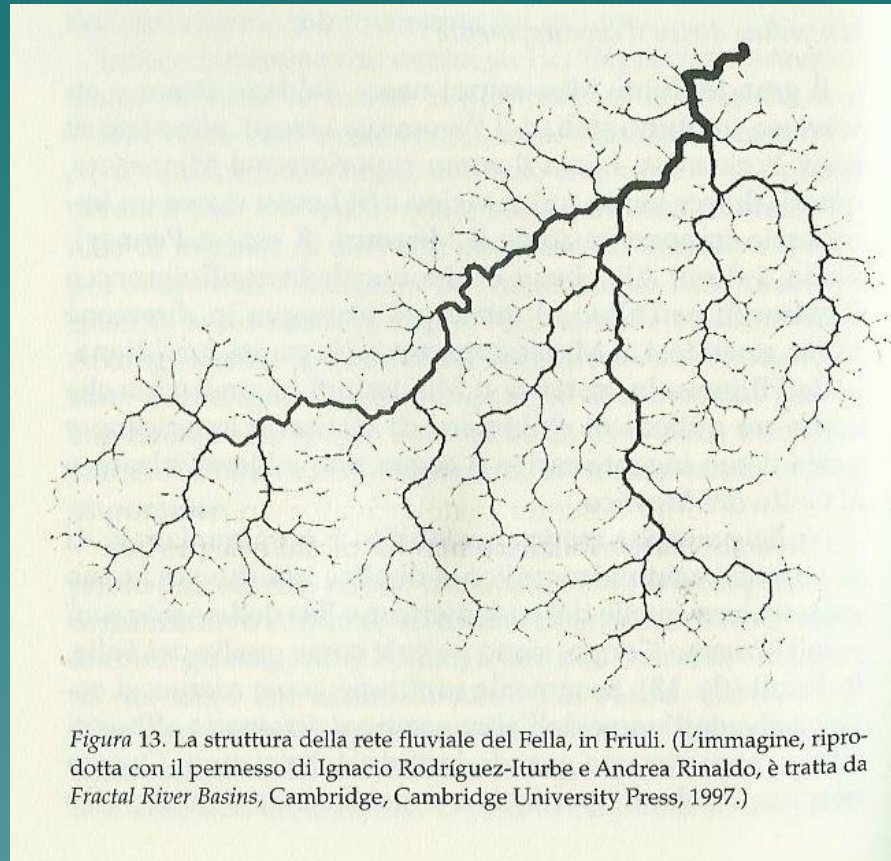
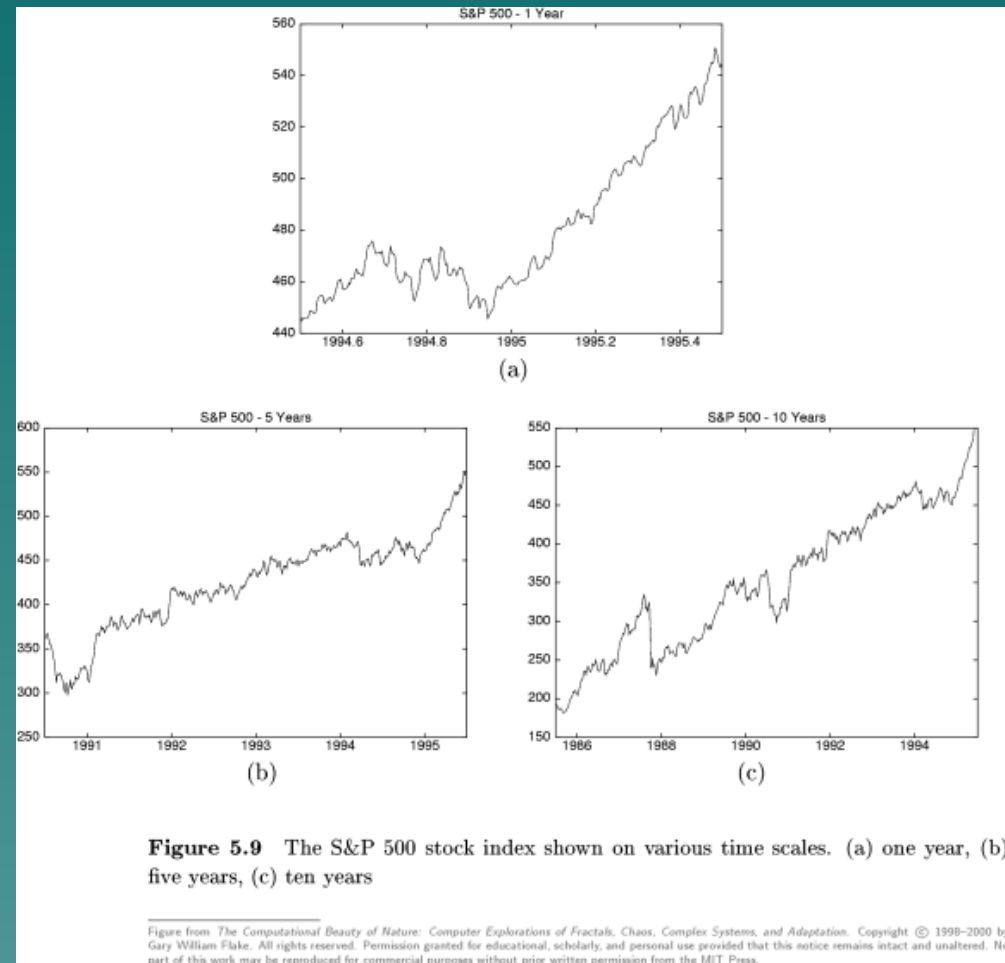


Figura 13. La struttura della rete fluviale del Fella, in Friuli. (L'immagine, riprodotta con il permesso di Ignacio Rodríguez-Iturbe e Andrea Rinaldo, è tratta da *Fractal River Basins*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.)

Frattali in economia

- ♦ L'andamento degli indici di Borsa ha una struttura irregolare ed autosimilare....ovvero è un frattale



- ◆ Non è difficile costruire un albero o una foglia con una semplice regola iterativa

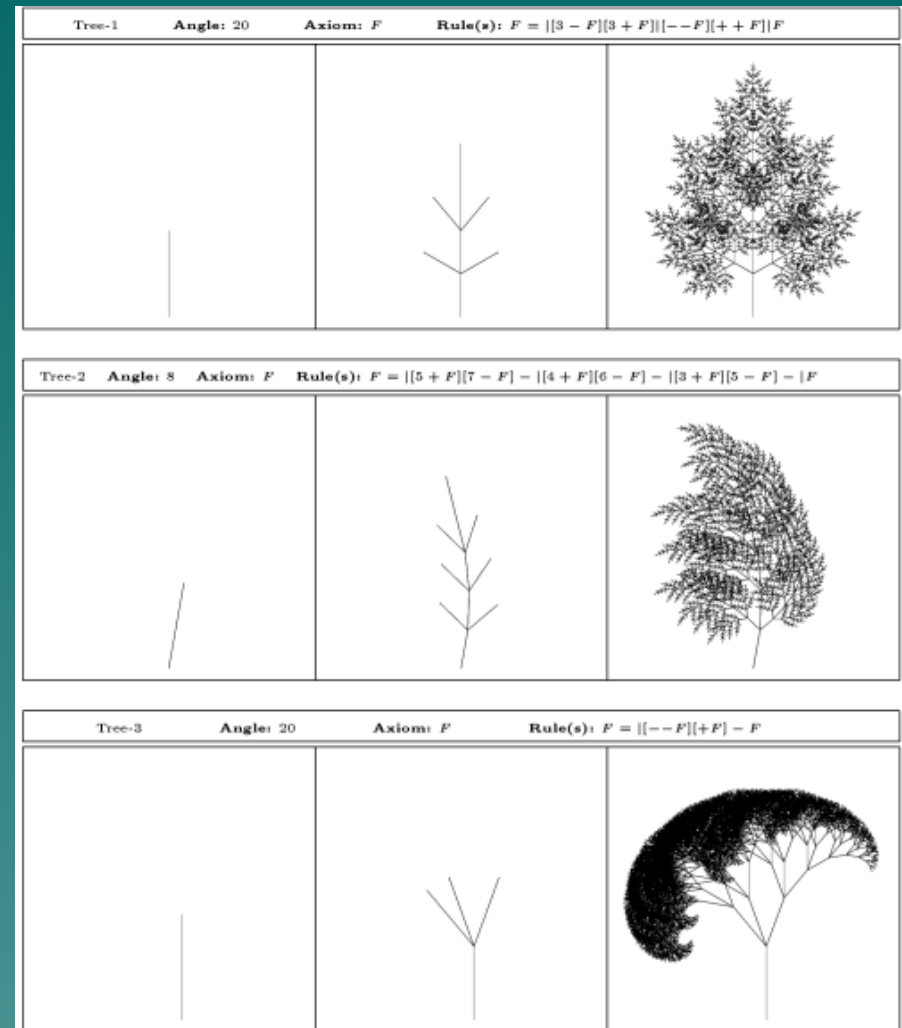
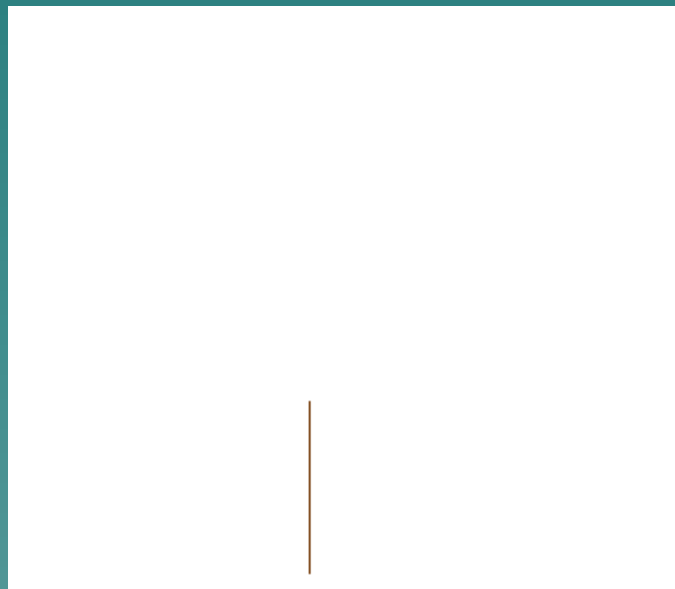


Figure 6.7 And yet more plantlike fractals: Tree-1 has an increased branching factor that creates a fuller image. Tree-2 illustrates how to use a small turning angle to make more realistic curves.