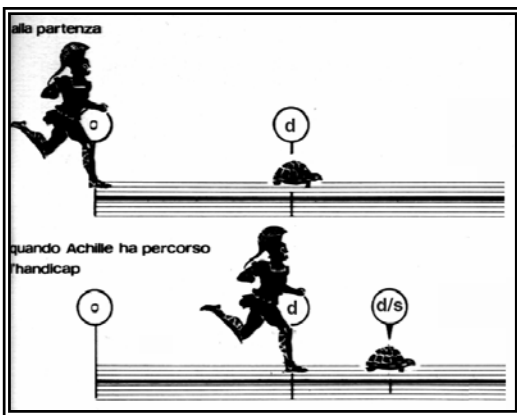


ACHILLE E LA TARTARUGA

“Se, in una gara di corsa, Achille concede un vantaggio $S_0 = d$ ad una Tartaruga, non riuscirà mai a raggiungerla, poiché quando Achille avrà recuperato l'handicap iniziale la Tartaruga avrà percorso un altro piccolo tratto di strada, e quando Achille avrà percorso questo nuovo tratto la Tartaruga si troverà ancora avanti di un ulteriore, più piccolo tratto, e così via all'infinito...” .

Con questo celebre paradosso il pensatore greco **Zenone** d'Elea, vissuto nel V secolo a.C. , voleva difendere la dottrina Parmenidea dell'unicità e dell'immobilità dell'essere, dimostrando come coloro che affermavano l'esistenza della molteplicità e del divenire si ritrovassero

impantanati in evidenti contraddizioni.



Secondo la tesi della divisibilità all'infinito dello spazio, ad esempio, **Achille** impiegherebbe un tempo infinito per percorrere le infinite (anche se sempre più piccole) porzioni di spazio che lo separano dalla **Tartaruga**, man mano che quest'ultima procede dalla sua posizione di partenza, non riuscendo così mai a raggiungerla. Un tipo di ragionamento, questo, che se

spinto alle sue estreme conseguenze sembrerebbe dimostrare addirittura l'impossibilità del moto, in quanto Achille, partendo dal punto zero, prima di coprire la distanza d dovrà aver coperto la metà di tale distanza, e prima ancora la metà della metà di quest'ultima, e così via in un regresso all'infinito che, in ultima analisi, impedirebbe ad Achille di spostarsi dalla posizione iniziale.

Ovviamente, nella realtà, le cose stanno ben diversamente e non è difficile confutare questa conclusione. Il vecchio filosofo **Diogene**, ad esempio, la smentì addirittura senza dire una parola, semplicemente mettendosi a camminare!

Per quanto le sue conclusioni conducessero ad un assurdo, però, il ragionamento di Zenone appariva logicamente corretto e fu dunque preso molto sul serio dai matematici dei secoli successivi. Dopotutto, infatti, sembrava perfettamente logico ed evidente che sommando un numero infinito di termini di una successione il risultato dovesse essere, a sua volta, infinito. E il fatto che i singoli termini fossero ciascuno più piccolo del precedente, come accadeva nel paradosso di Zenone, non sembrava alterare tale evidenza.

Ma ci si sbagliava di grosso!

Con lo sviluppo del *calcolo infinitesimale* e della *teoria dei limiti*, a cavallo tra Settecento ed Ottocento, si riuscì finalmente a dimostrare che una somma di quantità finite in numero illimitato *non è necessariamente infinita*, ossia non supera necessariamente, da un certo momento in poi,

ogni numero prefissato per quanto grande esso sia. In particolare, proprio nel caso in cui le quantità che si succedono sono sempre più piccole, può accadere che il limite delle loro successive somme sia finito: si parlerà in tal caso di **serie convergenti**, per distinguerle da quelle divergenti il cui limite è invece infinito.

In virtù di tali risultati diventa quasi banale risolvere il paradosso di Zenone, partendo ad esempio dalle proprietà delle cosiddette *progressioni geometriche*, ossia di quelle particolari successioni numeriche in cui ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per un certo fattore **q**, detto *ragione*.

Innanzitutto, supponendo che Achille proceda ad una velocità costante V_A di *s volte maggiore* di quella della Tartaruga (cioè supponendo che sia $V_A = s \cdot V_T$, con $s > 1$), dalle equazioni del moto uniforme in cinematica si trova facilmente che, nel medesimo intervallo di tempo t_1 in cui Achille percorre la distanza **d**, la Tartaruga avrà percorso un ulteriore tratto pari a $d \cdot (1/s) = d/s$.

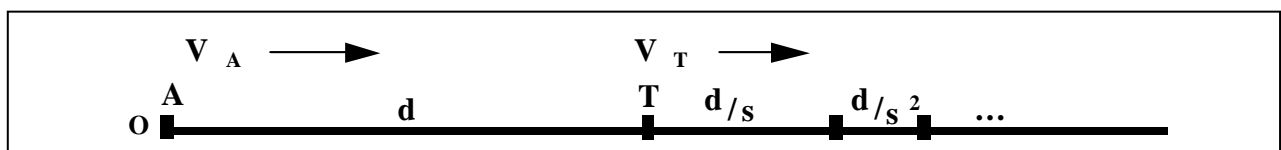
Per Achille, infatti, tale intervallo di tempo si ricava direttamente dall'espressione della velocità:

$$V_A = d / t_1 \rightarrow t_1 = d / V_A \rightarrow t_1 = d / (s \cdot V_T)$$

e in questo stesso intervallo di tempo la Tartaruga, che si muove a velocità V_T , avrà percorso una nuova distanza $x(t_1)$ pari a:

$$x(t_1) = V_T \cdot t_1 \rightarrow x(t_1) = V_T \cdot (d / (s \cdot V_T)) = d/s$$

Quando poi Achille avrà percorso questo nuovo tratto, la Tartaruga, nel frattempo, sarà avanzata ancora di $(d/s) \cdot (1/s) = d/s^2$, e così via... (vedi figura).



In altre parole, considerando i primi n tratti percorsi da Achille, essi saranno dati dalla successione:

$$d, \frac{d}{s}, \frac{d}{s^2}, \frac{d}{s^3}, \dots, \frac{d}{s^{n-1}}$$

che non è altro che una progressione geometrica avente come primo termine $a_0 = d$ e come ragione $q = 1/s$.

Essendo $s > 1$, la ragione q risulta minore di 1 (cioè i termini della progressione sono, come già sapevamo, sempre più piccoli), pertanto, se estendiamo la progressione ad un numero infinito di termini, la loro somma, genericamente data dall'espressione:

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

diventa in questo caso, al limite per n che tende all'infinito (e sostituendo poi ad a_0 e a q i rispettivi valori):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty = a_0 \frac{1 - q^\infty}{1 - q} = d \frac{1 - \frac{1}{s^\infty}}{1 - \frac{1}{s}} \cong d \frac{1}{1 - \frac{1}{s}} = d \frac{s}{s - 1} \quad (1)$$

dove si è trascurato il termine $\frac{1}{s^\infty}$ che, al crescere del denominatore, diventa piccolissimo.

Achille dunque, nonostante debba compiere un numero infinito di spostamenti, raggiungerà la Tartaruga in un tempo finito e ad una distanza ben precisa dal punto O d'origine, data appunto dall'espressione (1) che rappresenta quindi la coordinata di sorpasso.

Questo risultato, oltre a risolvere elegantemente il paradosso di Zenone, smentisce anche la tesi dei **Pitagorici**, acerrimi avversari dello stesso Zenone, i quali componevano il continuo con atomi (punti) di dimensione finita. Nell'ipotesi pitagorica, infatti, la somma di un numero crescente di segmenti, anche se decrescenti e dunque sempre più piccoli, dovrebbe tendere comunque all'infinito, perché ciascun segmento conterrebbe un numero intero di atomi dotati di dimensione (sarebbe come fare la somma di infiniti numeri interi, che tende certamente all'infinito). Invece, come abbiamo appena mostrato con l'aiuto delle progressioni geometriche, la somma di infiniti termini sempre più piccoli converge verso un risultato finito. La matematica conferma perciò quanto accadrebbe effettivamente nella realtà: Achille raggiunge e supera la Tartaruga in breve tempo, in barba ai Pitagorici!

In conclusione, mostriamo come l'espressione della **coordinata di sorpasso** (1) può facilmente ricavarsi dalla semplice applicazione delle sole equazioni della cinematica dei moti uniformi su traiettoria prestabilita.

Supponiamo, come al solito, che la Tartaruga parta con un vantaggio $s_0 = d$ rispetto ad Achille, che le loro rispettive velocità (\mathbf{V}_T e \mathbf{V}_A) siano costanti e che sia $\mathbf{V}_A = s \cdot \mathbf{V}_T$.

Le due equazioni che rappresentano lo spostamento di Achille (x_A) e della Tartaruga (x_T) al passare del tempo, sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_A = sV_T \cdot t \\ x_T = d + V_T \cdot t \end{cases} \quad (2)$$

e poiché nel punto di sorpasso deve essere ovviamente $x_A = x_T$, basta uguagliare i secondi membri e risolvere l'equazione risultante rispetto a t per trovare dopo quanto tempo avviene il sorpasso:

$$sV_T \cdot t = d + V_T \cdot t \quad \rightarrow \quad sV_T \cdot t - V_T \cdot t = d \quad \rightarrow \quad (s-1) V_T t = d \quad \rightarrow \quad t = \frac{d}{V_T (s-1)}$$

Sostituendo tale valore di t in una qualsiasi delle equazioni (2) si troverà infine l'espressione della coordinata di sorpasso in funzione del parametro s (parametro che, lo ricordiamo, indica di quanto Achille è più veloce della Tartaruga):

$$x_A = sV_T \cdot t = sV_T \cdot \frac{d}{V_T (s-1)} = d \frac{s}{s-1} \quad (3)$$

che, come si vede, è esattamente uguale alla (1) ottenuta per via matematica.

(Dalla (3) – o dalla (1) – si vede che, se ad esempio fosse $s = 2$, cioè se la velocità di Achille fosse esattamente il doppio di quella della Tartaruga, il sorpasso avverrebbe ad una distanza dall'origine pari a **2d**).